

实分析笔记：测度论基础

郝成春 *

整理：深度学习助手

更新：2026 年 3 月 22 日

目录

1 预备知识：σ-代数与 Borel 集	3
1.1 代数和 σ -代数	3
1.2 生成 σ -代数	3
1.3 Borel σ -代数	4
1.4 $\mathbb{R}^n$ 中开集的构造	4
1.4.1 一维情形：开区间分解	4
1.4.2 高维情形：方体分解	5
1.5 Cantor 集	5
2 外测度	5
2.1 定义与基本例子	6
2.2 外测度的性质	6
3 可测集与 Lebesgue 测度	7
3.1 可测性的定义	7
3.2 可测集的性质	8
3.3 可列可加性	9
3.4 测度的连续性	9
4 总结与展望	10
A 重要引理证明	10
A.1 引理：若 F 闭、 K 紧且不相交，则 $d(F, K) > 0$	10

*中国科学院数学与系统科学研究院

A.2 引理：开集构造定理 ($\mathbb{R}^n$) 的证明概要	10
A.3 外测度的正距离可加性详细证明	10

1 预备知识： σ -代数与 Borel 集

在测度论中，我们需要一个可以“测量”的集合族，它必须对可列运算封闭，这样才能处理极限和无穷过程。 σ -代数就是这样的结构。

1.1 代数和 σ -代数

设 X 是一个非空集合， $\mathcal{P}(X)$ 表示 X 的幂集。

定义 1.1 (代数). 设 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ 。若 $\emptyset \in \mathcal{A}$ ，且 $\mathcal{A}$ 对并运算和补运算封闭（即 $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ ，且 $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ ），则称 $\mathcal{A}$ 为代数（或域）。

命题 1.1. 设 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ，则：

- (i) 若 $\emptyset \in \mathcal{A}$ 且 $\mathcal{A}$ 对交运算和补运算封闭，则 $\mathcal{A}$ 是代数。
- (ii) 若 $\mathcal{A}$ 是代数，则 $\mathcal{A}$ 对交运算和差运算封闭。

证明思路： (i) 利用 De Morgan 律： $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ ，由对交和补封闭可得对并封闭。(ii) 利用 $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ ， $A \setminus B = A \cap B^c$ 。

定义 1.2 (σ -代数). 设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ 。若 $\emptyset \in \mathcal{F}$ ，且 $\mathcal{F}$ 对可列并和补运算封闭，则称 $\mathcal{F}$ 为 σ -代数（或 σ -域）。

【 σ -代数比代数更强：不仅对有限并封闭，还要对可列并封闭。这允许我们处理无限过程。】

例 1.1 (平凡的 σ -代数). • $\mathcal{P}(X)$ 是 X 上最大的 σ -代数（包含一切子集）。

- $\{\emptyset, X\}$ 是最小的 σ -代数。
- 任何 σ -代数都包含 $\emptyset$ 和 X （因为空集在定义中，补集给出全空间）。

命题 1.2. 设 $\mathcal{F}$ 是 σ -代数，则：

- (i) $\mathcal{F}$ 是代数。
- (ii) $\mathcal{F}$ 对可列交封闭，也对有限交、差封闭。

证明： (i) 由于 $\mathcal{F}$ 对可列并封闭，当然对有限并封闭，补封闭由定义直接有，所以是代数。(ii) 利用 De Morgan 律： $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c)^c$ ，可列交可由可列并和补得到。

1.2 生成 σ -代数

给定一个集类 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ ，我们希望找到包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ -代数。由于 $\mathcal{P}(X)$ 本身是 σ -代数，所以包含 $\mathcal{C}$ 的 σ -代数总是存在的。取所有这些 σ -代数的交，即可得到最小的 σ -代数，记作 $\sigma(\mathcal{C})$ ，称为由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ -代数。**【生成 σ -代数的过程类似于“闭包”：不断添加可列并、交、补，直到不再产生新集合。】**

1.3 Borel σ -代数

定义 1.3 (Borel σ -代数). 设 X 是一个度量空间 (如 $\mathbb{R}^n$)。由 X 中所有开集生成的 σ -代数称为 **Borel σ -代数**，记作 $\mathcal{B}_X$ 。它的成员称为 **Borel 集**。

【Borel 集是开集经过可列次并、交、补运算得到的集合。它们构成了我们通常能“测量”的集合的基础。】

常见的 Borel 集类型：

- 开集、闭集。
- G_δ 集：可列个开集的交集。
- F_σ 集：可列个闭集的并集。
- $G_{\delta\sigma}$ 集：可列个 G_δ 集的并集。
- $F_{\sigma\delta}$ 集：可列个 F_σ 集的交集。
- 等等。

这些集合在分析中非常常见，例如有理数集是 F_σ (因为每个单点是闭集，有理数是可列个单点的并)。

1.4 $\mathbb{R}^n$ 中开集的构造

在 $\mathbb{R}^n$ 中，开集可以用方体 (或长方体) 来构造。我们先回忆一下长方体的体积定义。

定义 1.4 (长方体与体积). 设 $a_j \leq b_j$, $j = 1, \dots, n$ 。闭长方体

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

的体积定义为 $|R| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ 。开长方体是开区间的乘积。【当 $n = 1$ 时就是长度， $n = 2$ 时就是面积。】

1.4.1 一维情形：开区间分解

定理 1.1 ($\mathbb{R}$ 中开集的构造). $\mathbb{R}$ 中的每个开子集 O 可以唯一地表示为至多可列个互不相交的开区间的并集 (这些开区间可以是 $(-\infty, a)$ 、 (b, ∞) 或 $(-\infty, \infty)$)。

证明思路 (直观): 对每个 $x \in O$ ，考虑最大的开区间 (a_x, b_x) 包含 x 且包含在 O 中。这些区间要么相等要么不相交，因为若两个相交则它们的并也是开区间且仍在 O 中，矛盾。所以这些区间是互不相交的。又因为每个区间包含一个有理数，有理数可数，所以区间个数至多可列。【这个定理告诉我们，一维开集的结构非常简单：就是一些不相交的开区间。因此开集的“长度”可以自然地定义为这些区间长度之和。】

1.4.2 高维情形：方体分解

然而在 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 中，开集不能唯一地分解成互不相交的开方体（比如圆盘不能用不相交的矩形完美覆盖）。但有一个替代结果：

定理 1.2 ($\mathbb{R}^n$ 中开集的构造). 设 $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ 中的每个开子集 O 可以表示为至多可列个几乎互不相交的闭方体的并集，即它们的内部互不相交。

【这个定理的证明通常使用二进方体分解 (dyadic cubes)。将 $\mathbb{R}^n$ 分割成边长为 2^{-k} 的二进方体，取那些完全包含在 O 中的最大方体，这些方体内部互不相交，且覆盖 O 除了边界。这样，即使分解不唯一，但体积和是确定的，因为边界测度为零。】

1.5 Cantor 集

Cantor 集是实分析中一个经典的反例集合，它有许多奇特的性质。

定义 1.5 (Cantor 三分集). 从 $C_0 = [0, 1]$ 出发，每一步去掉每个区间中间的开区间（长度为该区间长度的 $1/3$ ）。得到递减的紧集序列 C_k ，其中 C_k 由 2^k 个长度为 3^{-k} 的闭区间组成。Cantor 集定义为

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

性质：

- C 是紧集（闭集且有界），完全不连通（任何两点之间有一个去掉的区间），没有内点。
- C 的 Lebesgue 外测度为 0：因为 $C \subset C_k$ ，而 $|C_k| = (2/3)^k$ ，所以 $m_*(C) \leq (2/3)^k \rightarrow 0$ 。
- C 的势为 $\aleph_0$ （与 $[0, 1]$ 等势，即不可数）。证明可用三进制展开： C 中的点可以写成三进制小数，只包含数字 0 和 2（每一步去掉中间 $1/3$ 对应数字 1），这种表示与 $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ 一一对应，后者势为 $2^{\aleph_0} = c$ 。

【Cantor 集展示了测度为 0 的不可数集的存在性，对理解测度与基数的关系很有帮助。它还是一个“自相似”分形。】

2 外测度

在 $\mathbb{R}^n$ 中，我们首先通过外部逼近来定义任意子集的一个“尺寸”概念——外测度。这类似于用方体覆盖来近似集合的“体积”。

2.1 定义与基本例子

定义 2.1 (外测度). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$. E 的外测度定义为

$$m_*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, Q_j \text{ 是闭方体} \right\}.$$

这里下确界取遍所有由闭方体构成的可数覆盖。允许无限覆盖是必要的，否则有限覆盖无法精确逼近某些集合（如有理点集）。【可以把外测度理解为“用方体覆盖 E 的最小总成本”。就像我们要测量一个不规则形状的土地，用许多小正方形去覆盖，正方形的总面积之和的下确界就是外测度。】

例 2.1. • $m_*(\{x_0\}) = 0$: 因为可以用边长为 ε 的方体覆盖，体积为 ε^n ，取 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。

- 若 Q 是闭方体，则 $m_*(Q) = |Q|$: 一方面 Q 本身覆盖给出上界 $|Q|$ ；另一方面，任何覆盖的体积和至少为 $|Q|$ （需要证明，利用有限覆盖定理和长方体的体积不等式）。若 Q 是开方体，也有 $m_*(Q) = |Q|$ 。
- $m_*(\mathbb{R}^n) = \infty$: 因为任何有界覆盖只能覆盖有界部分，无法覆盖全空间。
- Cantor 集 C 的外测度为 0: 因为 $C \subset C_k$, $|C_k| = (2/3)^k \rightarrow 0$ 。

2.2 外测度的性质

外测度满足以下重要性质，证明基于定义和下确界的性质。

命题 2.1 (单调性). 若 $E_1 \subset E_2$ ，则 $m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$ 。

证明: E_2 的任何覆盖也是 E_1 的覆盖，因此下确界更小。

命题 2.2 (可列次可加性). 对任意可列个集合 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ ，有

$$m_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j).$$

证明: 对任意 $\varepsilon > 0$ ，对每个 j ，存在闭方体覆盖 $\{Q_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $E_j \subset \bigcup_k Q_{j,k}$ 且 $\sum_k |Q_{j,k}| \leq m_*(E_j) + \varepsilon/2^j$ 。则所有 $\{Q_{j,k}\}$ 构成 $\bigcup_j E_j$ 的可数覆盖，且

$$\sum_{j,k} |Q_{j,k}| \leq \sum_j \left(m_*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) = \sum_j m_*(E_j) + \varepsilon.$$

由下确界定义， $m_*(\bigcup_j E_j) \leq \sum_j m_*(E_j) + \varepsilon$ ，令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得证。

命题 2.3 (开集逼近). 对任意 $E \subset \mathbb{R}^n$ ，有

$$m_*(E) = \inf \{ m_*(O) : O \text{ 是开集}, O \supset E \}.$$

证明：设右端为 m 。由于开集也是 $\mathbb{R}^n$ 的子集， $m_*(E) \leq m_*(O)$ ，故 $m_*(E) \leq m$ 。反之，对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在闭方体覆盖 $\{Q_j\}$ 使得 $\sum |Q_j| \leq m_*(E) + \varepsilon$ 。将每个 Q_j 稍扩大为开方体 Q_j° ，使得 $|Q_j^\circ| \leq |Q_j| + \varepsilon/2^j$ ，则 $O = \bigcup Q_j^\circ$ 是开集， $E \subset O$ ，且 $m_*(O) \leq \sum |Q_j^\circ| \leq m_*(E) + 2\varepsilon$ 。所以 $m \leq m_*(E) + 2\varepsilon$ ，令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得 $m \leq m_*(E)$ 。

命题 2.4 (正距离的可加性). 若 E_1, E_2 满足 $d(E_1, E_2) > 0$ ，则

$$m_*(E_1 \cup E_2) = m_*(E_1) + m_*(E_2).$$

证明：由次可加性， $\leq$ 显然。要证 $\geq$ 。设 $d = d(E_1, E_2) > 0$ 。取方体覆盖 $\{Q_j\}$ 使得 $E_1 \cup E_2 \subset \bigcup Q_j$ 且 $\sum |Q_j| \leq m_*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon$ 。将 Q_j 分为两类：与 E_1 相交的记为 Q'_j ，其余的记为 Q''_j 。由于 E_1 和 E_2 距离为正，我们可以将每个 Q_j 适当细分，使得 Q'_j 只覆盖 E_1 ， Q''_j 只覆盖 E_2 （实际上，可以取更小的方体使得它们不跨过两个集合）。严格证明中常用到：将 E_1 和 E_2 分开一定距离，覆盖可以分割成不相交的两组，然后利用外测度定义得到下界。这里给出一个简洁版本：因为 $d > 0$ ，存在 $\delta > 0$ 使得 E_1 的 δ -邻域与 E_2 不相交。对于任何覆盖，我们可以将覆盖的方体适当细分，使得每个小方体直径小于 δ ，从而每个小方体至多与 E_1 或 E_2 之一相交。然后这些覆盖 E_1 的小方体体积和至少 $m_*(E_1)$ ，覆盖 E_2 的至少 $m_*(E_2)$ 。因此 $\sum |Q_j| \geq m_*(E_1) + m_*(E_2) - \varepsilon$ 。取极限得 $m_*(E_1 \cup E_2) \geq m_*(E_1) + m_*(E_2)$ 。

命题 2.5 (方体分解). 若 E 是几乎互不相交的闭方体的可列并： $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ ，则

$$m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|.$$

证明：由次可加性得 $m_*(E) \leq \sum |Q_j|$ 。反方向：对任意 N ， $Q_1, \dots, Q_N$ 的内部互不相交，且它们之间的距离为正（因为它们是紧集且内部不相交，边界可能相交但边界测度为零，可通过微调得到正距离）。利用正距离可加性，有限可加性成立： $m_*(\bigcup_{j=1}^N Q_j) = \sum_{j=1}^N |Q_j|$ 。又因为 $\bigcup_{j=1}^N Q_j \subset E$ ，由单调性得 $\sum_{j=1}^N |Q_j| \leq m_*(E)$ 。令 $N \rightarrow \infty$ 得 $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E)$ 。

3 可测集与 Lebesgue 测度

外测度虽然具有次可加性，但不满足可列可加性（即对互不相交的集，外测度不一定等于和）。为了修复这一缺陷，我们引入可测集的概念，将那些“良性的”集合分离出来。

3.1 可测性的定义

定义 3.1 (可测集). 称 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是 Lebesgue 可测的，如果对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在开集 $O \supset E$ 使得

$$m_*(O \setminus E) \leq \varepsilon.$$

若 E 可测, 则定义它的 **Lebesgue 测度** 为 $m(E) = m_*(E)$ 。

【这个定义的意思是：可测集就是可以用开集从外部任意逼近的集合，且逼近的误差（开集减去原集）的外测度可以任意小。想象我们用一把很细的筛子去筛集合，筛子孔就是开集，剩下被筛掉的 $(O \setminus E)$ 可以做到任意小。】

3.2 可测集的性质

命题 3.1. $\mathbb{R}^n$ 中的任意开集是可测的。

证明：取 O 本身即可。

命题 3.2 (零测集可测). 若 $m_*(E) = 0$, 则 E 可测。

证明：对任意 $\varepsilon > 0$, 由开集逼近, 存在开集 $O \supset E$ 使得 $m_*(O) \leq \varepsilon$ 。则 $m_*(O \setminus E) \leq m_*(O) \leq \varepsilon$ 。

命题 3.3 (可列并保持可测性). 可列个可测集的并集是可测的。

证明：设 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, E_j 可测。对任意 $\varepsilon > 0$, 取开集 $O_j \supset E_j$ 使得 $m_*(O_j \setminus E_j) \leq \varepsilon/2^j$ 。令 $O = \bigcup_j O_j$, 则 O 是开集, $E \subset O$ 。且 $O \setminus E \subset \bigcup_j (O_j \setminus E_j)$, 由次可加性,

$$m_*(O \setminus E) \leq \sum_j m_*(O_j \setminus E_j) \leq \sum_j \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

所以 E 可测。

命题 3.4 (闭集可测). 任意闭集是可测的。

证明思路：先证紧集可测（利用有限覆盖和开集逼近），然后闭集可以写成可列个紧集的并（例如 $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} (F \cap \overline{B(0, k)})$ ），再由可列并封闭得证。这里需要引理：若 F 闭、 K 紧且不相交，则 $d(F, K) > 0$ ，这用于构造开集逼近时分开它们。

命题 3.5 (补集可测). 若 E 可测, 则 E^c 也可测。

证明：对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $O \supset E$ 使得 $m_*(O \setminus E) \leq \varepsilon$ 。令 $F = O^c$, 则 F 是闭集, 且 $F \subset E^c$ 。我们有 $E^c \setminus F = O \setminus E$, 且 $m_*(E^c \setminus F) \leq \varepsilon$ 。现在对 F 使用闭集可测性（或直接用定义）可得存在开集 $U \supset E^c$ 使得 $m_*(U \setminus E^c)$ 任意小, 从而 E^c 可测。

命题 3.6 (可列交保持可测性). 可列个可测集的交集是可测的。

证明：由 De Morgan 律, $\bigcap E_j = (\bigcup E_j^c)^c$, 补集和并集运算封闭性保持可测。

由此可知, 所有可测集构成的族是一个 σ -代数, 它包含所有开集, 因此也包含所有 Borel 集。实际上, 存在不可测的集合（需要选择公理），但 Borel 集都是可测的。

3.3 可列可加性

测度最重要的性质是它关于互不相交的可列并具有可加性。

定理 3.1 (可列可加性). 设 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是互不相交的可测集, 则

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

证明: 首先证明有限可加性: 对互不相交的可测集 E, F , 有 $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$ 。由于 E, F 可测, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $O_1 \supset E, O_2 \supset F$ 使得 $m_*(O_1 \setminus E) \leq \varepsilon, m_*(O_2 \setminus F) \leq \varepsilon$ 。令 $O = O_1 \cup O_2$, 则 O 是开集且包含 $E \cup F$ 。但更精细地, 我们可以找到开集 $U \supset E \cup F$ 使得 $U \setminus (E \cup F)$ 的外测度很小。实际上, 利用正距离可加性: 因为 E 和 F 不相交, 我们可以用开集 U 分开它们, 然后利用外测度的可加性 (正距离情形)。另一种方法是利用 Carathéodory 条件: 可测集满足对任意 A , $m_*(A) = m_*(A \cap E) + m_*(A \cap E^c)$ 。取 $A = E \cup F$, 则 $A \cap E = E, A \cap E^c = F$, 所以 $m_*(E \cup F) = m_*(E) + m_*(F)$ 。因此有限可加性成立。

然后对可列情形, 由有限可加性, 对任意 N ,

$$\sum_{j=1}^N m(E_j) = m\left(\bigcup_{j=1}^N E_j\right) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right).$$

令 $N \rightarrow \infty$ 得 $\sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)$ 。反向不等式由次可加性直接得到。因此等式成立。

3.4 测度的连续性

测度在单调极限下保持连续性。

推论 3.1 (测度的下连续性). 若 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ 且 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, 则

$$m(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} m(E_N).$$

证明: 令 $F_1 = E_1, F_j = E_j \setminus E_{j-1} (j \geq 2)$, 则 F_j 互不相交, 且 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j, E_N = \bigcup_{j=1}^N F_j$ 。由可列可加性,

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(F_j) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N m(F_j) = \lim_{N \rightarrow \infty} m(E_N).$$

推论 3.2 (测度的上连续性). 若 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots, E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$, 且存在 k 使得 $m(E_k) < \infty$, 则

$$m(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} m(E_N).$$

证明: 考虑 $F_j = E_k \setminus E_{k+j}$ ($j \geq 0$), 则 F_j 递增, 且 $\bigcup_{j=0}^{\infty} F_j = E_k \setminus E$. 由下连续性,

$$m(E_k) - m(E) = m(E_k \setminus E) = \lim_{j \rightarrow \infty} m(E_k \setminus E_{k+j}) = m(E_k) - \lim_{j \rightarrow \infty} m(E_{k+j}).$$

由于 $m(E_k) < \infty$, 可消去得 $m(E) = \lim_{j \rightarrow \infty} m(E_{k+j})$, 即 $\lim_{N \rightarrow \infty} m(E_N)$ 存在且等于 $m(E)$ 。

注记 3.1 (反例). 没有有限测度条件时, 结论可能不成立。例如在 $\mathbb{R}$ 中取 $E_n = (n, \infty)$, 则 $m(E_n) = \infty$, 但 $\bigcap E_n = \emptyset$, 测度为 0, 极限不相等。

4 总结与展望

本章从外测度出发, 通过引入可测集的概念, 建立了 Lebesgue 测度。可测集构成一个 σ -代数, 并且测度满足可列可加性, 这为后续积分理论奠定了基础。理解外测度的次可加性和正距离可加性, 以及可测集的定义, 是掌握测度论的关键。

在后续章节中, 我们将讨论可测函数、Lebesgue 积分以及微分理论, 进一步深化对测度的应用。例如, 我们将利用测度的连续性证明 Lebesgue 积分与极限交换的条件, 并研究函数的可微性 (如 Lebesgue 微分定理、有界变差函数等)。

A 重要引理证明

A.1 引理: 若 F 闭、 K 紧且不相交, 则 $d(F, K) > 0$

证明. 假设 $d(F, K) = 0$, 则存在点列 $x_j \in F$, $y_j \in K$ 使得 $|x_j - y_j| \rightarrow 0$ 。由 K 紧, 存在子列 $y_{j_k} \rightarrow y \in K$ 。则 $x_{j_k} \rightarrow y$ 。由于 F 闭, $y \in F$, 这与 $F \cap K = \emptyset$ 矛盾。 $\square$

A.2 引理: 开集构造定理 ($\mathbb{R}^n$) 的证明概要

这里给出二进方体分解的证明思路: 对于开集 O , 考虑所有边长为 2^{-k} 的二进方体, 这些方体覆盖 $\mathbb{R}^n$ 且内部互不相交。取那些完全包含在 O 中的最大方体 (即对于某个 k , 该方体包含在 O 中, 但它的父方体不包含在 O 中), 这些方体内部互不相交, 且它们的并集等于 O 除去边界。由于边界是零测集, 因此 O 可表示为这些方体 (几乎互不相交) 的可列并。

A.3 外测度的正距离可加性详细证明

证明. 设 $d = d(E_1, E_2) > 0$ 。任取 $\varepsilon > 0$, 存在覆盖 $E_1 \cup E_2$ 的闭方体族 $\{Q_j\}$ 使得 $\sum |Q_j| \leq m_*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon$ 。取 $\delta < d/\sqrt{n}$, 使得每个方体的直径小于 d 。将每个 Q_j 细分 (用网格) 成许多小方体, 每个小方体直径小于 δ 。这样, 每个小方体至多与 E_1 或 E_2 之一相交 (否则其直径会跨越距离 d)。令 $\{P_j\}$ 为这些与 E_1 相交的小方体, $\{R_j\}$

为与 E_2 相交的小方体。则 $\{P_j\}$ 覆盖 E_1 , $\{R_j\}$ 覆盖 E_2 , 且 $\sum |P_j| + \sum |R_j| = \sum |Q_j|$ (因为细分不改变总体积)。于是

$$m_*(E_1) + m_*(E_2) \leq \sum |P_j| + \sum |R_j| = \sum |Q_j| \leq m_*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 得 $m_*(E_1) + m_*(E_2) \leq m_*(E_1 \cup E_2)$ 。

□