

实分析作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

2026 年 3 月 16 日

第一章 第1周实分析作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

练习 1.1. 设 A_n 是如下一列点集：

$$A_{2m+1} = \left[0, 2 - \frac{1}{2m+1}\right], \quad m \in \mathbb{N},$$

$$A_{2m} = \left[0, 1 + \frac{1}{2m}\right], \quad m \in \mathbb{N}.$$

求 $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ 和 $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$.

解. n 为奇数时, A_n 递增到 $[0, 2)$; n 为偶数时, A_n 递减到 $[0, 1]$.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \mid \text{存在无穷多 } n, x \in A_n\} = [0, 2)$$

因为任意 $x \in [0, 2)$, 都会存在无穷多个 m , 使得 $x \in A_{2m+1}$.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \mid n \text{ 充分大后均有 } x \in A_n\} = [0, 1]$$

当 n 充分大后, $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 2) \cap [0, 1] = [0, 1]$.

练习 1.2. 设 $\{A_n\}$ 是一列集合, 作 $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right), n = 2, 3, \dots$, 证明 $\{B_n\}$ 是一

列互不相交的集合, 而且 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n B_i, n \in \mathbb{N}$.

证明. 使用数学归纳法. $B_2 = A_2 \setminus A_1$ 与 $B_1 = A_1$ 没有交集。

假设 $n = k$ 时, $B_1, \dots, B_k$ 互不相交。当 $n = k + 1$,

$$B_{k+1} = A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \{x \mid x \in A_{k+1} \text{ 且 } x \notin A_i, i = 1, 2, \dots, k\}$$

因为 $B_i \subset A_i$, B_{k+1} 中所有的元素都不属于任何一个 A_i , 故 B_{k+1} 与 $B_1, \dots, B_k$ 均无交集。

由数学归纳法可得, $\{B_n\}$ 是一列互不相交的集合。

第二个仍然用数学归纳法。我想要证明:

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n \left[A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) \right] = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

$n = 1$ 显然成立。

假设 $n = k$ 时, 等式成立。当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{k+1} \left[A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) \right] &= \bigcup_{i=1}^k \left[A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) \right] \cup \left[A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right) \right] \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) \cup \left[A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right) \right] \\ &= \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \end{aligned}$$

由数学归纳法, 对任意的 n , 有 $\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n \left[A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) \right] = \bigcup_{i=1}^n A_i$ 。

1.3. 给定一个集族 $F_1, \dots, F_n$, 构造另一个集族 $F_1^*, \dots, F_N^*$, 其中 $N = 2^n - 1$, 使得 $\bigcup_{k=1}^N F_k =$

$\bigcup_{j=1}^N F_j^*$, 且 $\{F_j^*\}$ 互不相交, 且对每个 k , $F_k = \bigcup_{F_j^* \subset F_k} F_j^*$ 。

提示: 考察 2^n 个集合 $F'_1 \cap F'_2 \cap \dots \cap F'_n$, 其中每个 F'_k 为 F_k 或 F_k^c 。

1. $F_1^*, \dots, F_N^*$ 从集合 $\{F'_1 \cap F'_2 \cap \dots \cap F'_n\} - \{F_1^c \cap F_2^c \cap \dots \cap F_n^c\}$ 中选择, 其中每个 F'_k 为 F_k 或 F_k^c 。

下面挨着验证这三个:

1. 互不相交。对任意不同的 i, j , F_i^*, F_j^* 至少一个含有 F_k , 一个含有 F_k^c 。所以必然不相交。

2. $F_k = \bigcup_{F_j^* \subset F_k} F_j^*$ 。用数学归纳法, 假设 $n - 1$ 的时候成立, 那么

$$\bigcup_{F_j^* \subset F_k} F_j^* = \bigcup_{F_j^* \subset F_k} \left[F_k \cap \left(\bigcap_{i \neq k} F'_i \right) \right] = F_k \cap \bigcup_{i \neq k} \bigcap_{i \neq k} F'_i = F_k$$

因此 n 的时候也成立。所以 $F_k = \bigcup_{F_j^* \subset F_k} F_j^*$ 。

$$3. \bigcup_{k=1}^n F_k = \bigcup_{j=1}^N F_j^*. \text{ 由2可以直接得到。}$$

§1.4. 证明:

- (i) $E \triangle \emptyset = E, E \triangle E = \emptyset, E \triangle E^c = X, E \triangle X = E^c$, 其中 X 为全集.
- (ii) 交换律: $E \triangle F = F \triangle E$.
- (iii) 结合律: $(E \triangle F) \triangle G = E \triangle (F \triangle G)$.
- (iv) 交与对称差满足分配律: $E \cap (F \triangle G) = (E \cap F) \triangle (E \cap G)$.
- (v) $E^c \triangle F^c = E \triangle F$; $E = E \triangle F$ 当且仅当 $F = \emptyset$.
- (vi) 对任意的集合 E 与 F , 存在唯一的集合 G , 使得 $E \triangle G = F$ (实际上 $G = E \triangle F$).

§1. (i)

$$E \triangle \emptyset = (E \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus E) = E \cup \emptyset = E, \quad E \triangle E = (E \setminus E) \cup (E \setminus E) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

$$E \triangle E^c = (E \setminus E^c) \cup (E^c \setminus E) = E \cup E^c = X, \quad E \triangle X = (E \setminus X) \cup (X \setminus E) = E^c \cup E^c = E^c$$

(ii)

$$E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) = (F \setminus E) \cup (E \setminus F) = F \triangle E$$

(iii)

$$\begin{aligned} (E \triangle F) \triangle G &= [(E \setminus F) \cup (F \setminus E)] \triangle G \\ &= [(E \setminus F) \cup (F \setminus E)] \setminus G \cup (G \setminus [(E \setminus F) \cup (F \setminus E)]) \\ &= [E \setminus (F \cup G)] \cup [F \setminus (E \cup G)] \cup [G \setminus (E \cup F)] \cup [E \cap F \cap G] \\ &= (E \setminus [(F \setminus G) \cup (G \setminus F)]) \cup [(F \setminus G) \cup (G \setminus F)] \setminus E \\ &= E \triangle [(F \setminus G) \cup (G \setminus F)] \\ &= E \triangle (F \triangle G) \end{aligned}$$

(iv) 左边:

$$\begin{aligned} E \cap (F \triangle G) &= E \cap [(F \setminus G) \cup (G \setminus F)] = [E \cap (F \setminus G)] \cup [E \cap (G \setminus F)] \\ &= (E \cap F \cap G^c) \cup (E \cap G \cap F^c) \end{aligned}$$

右边 $(E \cap F) \triangle (E \cap G) = [(E \cap F) \setminus (E \cap G)] \cup [(E \cap G) \setminus (E \cap F)]$, 其中

$$(E \cap F) \setminus (E \cap G) = \{x \in E \cap F \mid x \notin E \cap G\}$$

由于 $x \in E$, 所以 $x \notin E \cap G$ 等价于 $x \notin G$. 即

$$(E \cap F) \setminus (E \cap G) = E \cap F \cap G^c$$

同理

$$(E \cap G) \setminus (E \cap F) = E \cap G \cap F^c$$

所以, 左边等于右边, 于是 $E \cap (F \triangle G) = (E \cap F) \triangle (E \cap G)$.

(v) 先证明 $E^c \triangle F^c = E \triangle F$. $E^c \triangle F^c = E \triangle F \Leftrightarrow (E^c \cap F) \cup (F^c \cap E) = (E \cap F^c) \cup (F \cap E^c)$, 仅仅是顺序的交换, 成立。

再证明 $E = E \triangle F$ 当且仅当 $F = \emptyset$.

“ $\Rightarrow$ ”: 两边同时对 E 做对称差, $E = E \triangle F \Rightarrow E \triangle E = E \triangle (E \triangle F) \Rightarrow \emptyset = F$

“ $\Leftarrow$ ”: 由(i)成立。

(vi) 首先验证 $E \triangle (E \triangle F) = F$. 由结合律,

$$E \triangle (E \triangle F) = (E \triangle E) \triangle F = \emptyset \triangle F = F$$

再证明 G 是唯一的。假如存在 $G' \neq G$, 且 $E \triangle G' = F$. 于是

$$E \triangle G = E \triangle G'$$

两边同时对 E 做对称差, 有

$$E \triangle (E \triangle G) = E \triangle (E \triangle G') \Rightarrow G = G'$$

于是矛盾, 可知 G 是唯一的。

1.5. 设有集合列 $\{A_n\}, \{B_n\}$, 试证明

- (i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cup \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n \right);$
(ii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) = \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cap \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n \right).$

1. (i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = \{x \mid \text{存在无穷多 } n, x \in A_n \cup B_n\} = \{x \mid \text{存在无穷多 } n, x \in A_n \text{ 或 } x \in B_n\},$

于是 x 要么属于无穷多个 A_n , 要么属于无穷多个 B_n , 或者都属于, 所以 $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) \subset \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cup \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n \right).$

反过来, 如果 x 要么属于无穷多个 A_n , 要么属于无穷多个 B_n , 那么自然就属于无穷多个 $A_n \cup B_n$, 所以 $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) \supset \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cup \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n \right).$

综上, $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cup \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n \right).$

(ii) $x \in \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n)$, 意味着当 n 充分大后, $x \in A_n$ 且 $x \in B_n$, 于是 $x \in \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cap \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n \right)$, 所以 “ $\subset$ ” 成立。

$x \in \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cap \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n \right)$, 就意味着当 n 充分大之后, $x \in A_n$ 并且 $x \in B_n$, 于是 $x \in A_n \cap B_n$, 于是 “ $\supset$ ” 成立。

综上, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) = \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cap \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n \right).$

1.6. 证明 $[a, b]$ 上的全体连续函数组成的集合 $C([a, b])$ 的势为 $\aleph$.

证明. 由于 $\text{card}(\mathbb{R}) = \aleph$, 先证明 $\text{card}(C([a, b])) \geq \text{card}(\mathbb{R})$. 由于 $\{f(x) = ax\}, a \in \mathbb{R}$ 是 $C([a, b])$ 的真子集, 且与 $\mathbb{R}$ 一一对应, $a \mapsto f(x) = ax$, 故 $\text{card}(C([a, b])) \geq \text{card}(\mathbb{R})$.

再证明 $\text{card}(C([a, b])) \leq \text{card}(\mathbb{R})$. 定义映射: $\alpha: C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q} \cap [a, b]}, f \mapsto f|_{\mathbb{Q} \cap [a, b]}$. 如果连续函数不同, 那他们在有理数点的取值不会完全相同, 所以 α 是单射. 所以 $\text{card}(C([a, b])) \leq \text{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{Q} \cap [a, b]}) = \aleph$.

综上, $\text{card}(C([a, b])) = \aleph$.

1.7. 从良序原理证明 Zorn 引理.

证明. 设 $(X, \leq)$ 是一个非空半序集, 且 X 的每个非空全序子集都有上界. 由良序原理, 存在一个序 $\leq$, 使得 X 是一个全序集.

先任意选取一个 $a \in X$, 定义 $C = \{a\}$. 然后定义 $C_x := \{y \in C \mid y \leq x\}$, 这样, x 就是 C 的一个上界, 并将 x 加入到 C 中, 然后重复此操作. 这样, C 是一个非空全序集且是极大的. 因为假设 $z \notin C$ 且 z 大于 C 中所有元素, 那么 $z \in C$, 矛盾.

有假设, C 有上界 m . 假设 m 不是 X 的极大元, 那么就存在 $m \leq n$, 但是 n 应该属于 C 但不属于 C , 矛盾! 所以 m 就是极大元.

第二章 第2周实分析作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

2.1. 设 $E \subset \mathbb{R}^n, \delta > 0$, 证明集合 $\mathcal{O} = \{x : d(x, E) > \delta\}$ 是开集.

证明. 要证明集合 $\mathcal{O}$ 是开集, 需证明对任意 $x \in \mathcal{O}$, 存在开球 $B(x, r)$, 使得 $x \in B(x, r) \subset \mathcal{O}$.

取 $r = \frac{d(x, E) - \delta}{2} > 0$, 对任何 $x \in \mathcal{O}, y \in B(x, r), z \in E$, 有

$$d(z, y) \geq d(z, x) - d(y, x)$$

两边取下确界, 有

$$d(y, E) \geq d(x, E) - r = \frac{d(x, E) + \delta}{2} > \delta$$

所以 $y \in \mathcal{O}$, 即 $B(x, r) \subset \mathcal{O}$, 于是 $\mathcal{O}$ 是开集.

2.2. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 证明 $f(x) := d(x, E)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续.

证明. 要证明 $f(x)$ 一致连续, 即证明 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$, 使得 $f(B(x, \delta_\varepsilon)) \subset B(f(x), \varepsilon)$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立, 且 δ_ε 只和 ε 有关与 x 无关.

取 $\delta_\varepsilon = \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in B(x, \delta_\varepsilon), z \in E$, 有

$$d(y, x) \geq d(z, x) - d(z, y)$$

两边取下确界, 有

$$d(x, E) - d(y, E) \leq d(x, y) \iff f(x) - f(y) \leq d(x, y) < \varepsilon$$

所以 $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$, 所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \varepsilon$, 使得 $f(B(x, \delta_\varepsilon)) \subset B(f(x), \varepsilon)$, 也就是一致连续.

2.3. 设函数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. 证明: $f(x)$ 连续当且仅当对 $\mathbb{R}$ 中任意开集 $\mathcal{O}$, $f^{-1}(\mathcal{O})$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集. 若定义域 $\mathbb{R}^n$ 改为开区间, 结论是否正确? 若定义域改为闭区间又如何?

ëğčçñĤ. “ $\Leftarrow$ ”: 设 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbb{R}$ 中任意开集, $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$, 那么存在 r , $B(x, r) \subset f^{-1}(\mathcal{O})$, 于是 $f(x) \in f(B(x, r)) \subset \mathcal{O}$, 所以 f 是连续的。

“ $\Rightarrow$ ”: 因为 f 连续, 所以取 $f(x) \in \mathcal{O}$, $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$ 。由于 $\mathcal{O}$ 是开集, 所以存在 r , $B(f(x), r) \subset \mathcal{O}$, 于是 $x \in f^{-1}(B(f(x), r)) \subset f^{-1}(\mathcal{O})$, 所以 $f^{-1}(\mathcal{O})$ 是开集。

改成开闭区间都是对的, 证明中就没有涉及原空间的属性。

éŮőéćŸ 2.4. 设 F_1, F_2 是 $\mathbb{R}$ 中两个互不相交的闭集. 证明: 存在两个互不相交的开集 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, 使得 $\mathcal{O}_1 \supset F_1, \mathcal{O}_2 \supset F_2$.

ëğčçñĤ. 构造 $\mathcal{O}_1 = \{x : d(x, F_1) < \delta_1\}$, $\mathcal{O}_2 = \{x : d(x, F_2) < \delta_2\}$, 且 $\delta_1 + \delta_2 < d(F_1, F_2)$. 然后只需证明 $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ 。假设 $x \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, 那么 $d(x, F_1) < \delta_1, d(x, F_2) < \delta_2$, 于是

$$d(x, F_1) + d(x, F_2) < d(F_1, F_2)$$

但是 $d(x, F_1) + d(x, F_2) \geq d(F_1, F_2)$, 矛盾! 所以 $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ 。

éŮőéćŸ 2.5. 设 $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一族有界闭集. 若对任意有限多个 $F_{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, N$, $\bigcap_{i=1}^N F_{\lambda_i} \neq \emptyset$, 则 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$ 。

ëğčçñĤ. 使用反证法, 假设 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \emptyset$, 那么设 X 是全集, 由德摩根定律

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \right)^c = X$$

选取 λ_0 , 由于 F_{λ_0} 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, 所以是紧集, 且被一族开区间覆盖。那么就可以选取有限个 $F_{\lambda_i}^c$, 覆盖 F_{λ_0} , 于是

$$F_{\lambda_0} \cap \left(\bigcap_{i=1}^N F_{\lambda_i} \right) = F_{\lambda_0} \cap \left(\bigcup_{i=1}^N F_{\lambda_i}^c \right)^c = F_{\lambda_0} \cap F_{\lambda_0}^c = \emptyset$$

这样就找到了有限个 F_{λ_i} , 他们的交集是空集, 矛盾! 所以 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$ 。

éŮőéćŸ 2.6. 证明: 代数 $\mathcal{A}$ 是 σ -代数当且仅当 $\mathcal{A}$ 关于可列递增并运算封闭 (即, 若 $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{A}$ 且 $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, 则 $\bigcup_{j=1}^\infty E_j \in \mathcal{A}$)。

ëğčçñĤ. “ $\Rightarrow$ ”: $\mathcal{A}$ 是 σ -代数, $\mathcal{A}$ 就对可列并运算封闭。

“ $\Leftarrow$ ”: 首先当 E_j 都是空集的时候, 有 $\emptyset \in \mathcal{A}$ 。然后证明他对可列并运算封闭。任取 $\{A_j\}_1^\infty$, 取 $\{E_j\}_1^\infty$, 满足 $E_j = \bigcup_{i=1}^j A_j$, 这样, $\{E_j\}$ 就是递增序列, $\mathcal{A}$ 对后者的可列并封闭就

意味着对任意的 $\{A_j\}$ 的可列并封闭。最后，由于 $\mathcal{A}$ 是代数，所以对补运算封闭。所以 $\mathcal{A}$ 是 σ -代数。

2.7. 设 $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. 若 $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{E})$, 证明:

$$\mathcal{M} = \bigcup \{ \sigma(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ 为 } \mathcal{E} \text{ 中可列子集} \}.$$

对任意可列子集 $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{E})$, 所以 $\bigcup \sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{E})$.

任意的 $M_0 \in \mathcal{M}$, 设 $M_0 = M_1 \cup M_2 \cdots \cup M_n \cdots$, 设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{P}(M_i)$, $\mathcal{B}_i = \sigma(\mathcal{A}_i), (i = 0, 1, 2, \cdots)$, 那么就有

$$\mathcal{B}_0 = \sigma(\mathcal{A}_0) \subset \sigma(\mathcal{E})$$

于是

$$\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{M} = \bigcup \mathcal{B}_0 \subset \bigcup \sigma(\mathcal{A}_0) \subset \bigcup \sigma(\mathcal{F})$$

所以 $\mathcal{M} = \bigcup \{ \sigma(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ 为 } \mathcal{E} \text{ 中可列子集} \}$.