

实分析作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

Spring 2026

目录

第一章 第 1 周实分析作业	2
第二章 第 2 周实分析作业	7
第三章 第 3 周实分析作业	11
第四章 第 4 周实分析作业	16
第五章 第 5 周实分析作业	23
第六章 第 6 周实分析作业	31
第七章 第 7 周实分析作业	36
第八章 第 8 周实分析作业	41
第九章 第 9 周实分析作业	49
第十章 第 10 周实分析作业	53
第十一章 第 11 周实分析作业	59
第十二章 第 12 周实分析作业	68
第十三章 第 13 周实分析作业	76

目 录	2
第十四章 第 14 周实分析作业	78
第十五章 第 15 周实分析作业	82

第一章 第 1 周实分析作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

题目 1.1. 设 A_n 是如下一列点集:

$$A_{2m+1} = \left[0, 2 - \frac{1}{2m+1}\right], \quad m \in \mathbb{N},$$

$$A_{2m} = \left[0, 1 + \frac{1}{2m}\right], \quad m \in \mathbb{N}.$$

求 $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ 和 $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$.

解答. n 为奇数时, A_n 递增到 $[0, 2)$; n 为偶数时, A_n 递减到 $[0, 1]$.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \mid \text{存在无穷多 } n, x \in A_n\} = [0, 2)$$

因为任意 $x \in [0, 2)$, 都会存在无穷多个 m , 使得 $x \in A_{2m+1}$.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \mid n \text{ 充分大后均有 } x \in A_n\} = [0, 1]$$

当 n 充分大后, $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 2) \cap [0, 1] = [0, 1]$.

题目 1.2. 设 $\{A_n\}$ 是一列集合, 作 $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i), n = 2, 3, \dots$, 证明 $\{B_n\}$ 是一列互不相交的集合, 而且 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n B_i, n \in \mathbb{N}$.

解答. 使用数学归纳法. $B_2 = A_2 \setminus A_1$ 与 $B_1 = A_1$ 没有交集.

假设 $n = k$ 时, $B_1, \dots, B_k$ 互不相交. 当 $n = k + 1$,

$$B_{k+1} = A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \{x \mid x \in A_{k+1} \text{ 且 } x \notin A_i, i = 1, 2, \dots, k\}$$

因为 $B_i \subset A_i$, B_{k+1} 中所有的元素都不属于任何一个 A_i , 故 B_{k+1} 与 $B_1, \dots, B_k$ 均无交集。

由数学归纳法可得, $\{B_n\}$ 是一列互不相交的集合。

第二个仍然用数学归纳法。我想要证明:

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n \left[A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) \right] = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

$n = 1$ 显然成立。

假设 $n = k$ 时, 等式成立。当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{k+1} \left[A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) \right] &= \bigcup_{i=1}^k \left[A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) \right] \cup \left[A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right) \right] \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) \cup \left[A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right) \right] \\ &= \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \end{aligned}$$

由数学归纳法, 对任意的 n , 有 $\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n \left[A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) \right] = \bigcup_{i=1}^n A_i$ 。

题目 1.3. 给定一个集族 $F_1, \dots, F_n$, 构造另一个集族 $F_1^*, \dots, F_N^*$, 其中 $N = 2^n - 1$, 使得 $\bigcup_{k=1}^n F_k = \bigcup_{j=1}^N F_j^*$, 且 $\{F_j^*\}$ 互不相交, 且对每个 k , $F_k = \bigcup_{F_j^* \subset F_k} F_j^*$ 。

提示: 考察 2^n 个集合 $F'_1 \cap F'_2 \cap \dots \cap F'_n$, 其中每个 F'_k 为 F_k 或 F_k^c 。

解答. $F_1^*, \dots, F_N^*$ 从集合 $\{F'_1 \cap F'_2 \cap \dots \cap F'_n\} - \{F_1^c \cap F_2^c \cap \dots \cap F_n^c\}$ 中选择, 其中每个 F'_k 为 F_k 或 F_k^c 。

下面挨着验证这三个:

1. 互不相交。对任意不同的 i, j , F_i^*, F_j^* 至少一个含有 F_k , 一个含有 F_k^c 。所以必然不相交。

2. $F_k = \bigcup_{F_j^* \subset F_k} F_j^*$ 。用数学归纳法, 假设 $n - 1$ 的时候成立, 那么

$$\bigcup_{F_j^* \subset F_k} F_j^* = \bigcup_{F_j^* \subset F_k} \left[F_k \cap \left(\bigcap_{i \neq k} F'_i \right) \right] = F_k \cap \bigcup_{i \neq k} \bigcap F'_i = F_k$$

因此 n 的时候也成立。所以 $F_k = \bigcup_{F_j^* \subset F_k} F_j^*$ 。

3. $\bigcup_{k=1}^n F_k = \bigcup_{j=1}^N F_j^*$ 。由 2 可以直接得到。

题目 1.4. 证明:

- (i) $E \Delta \emptyset = E, E \Delta E = \emptyset, E \Delta E^c = X, E \Delta X = E^c$, 其中 X 为全集.
- (ii) 交换律: $E \Delta F = F \Delta E$.
- (iii) 结合律: $(E \Delta F) \Delta G = E \Delta (F \Delta G)$.
- (iv) 交与对称差满足分配律: $E \cap (F \Delta G) = (E \cap F) \Delta (E \cap G)$.
- (v) $E^c \Delta F^c = E \Delta F$; $E = E \Delta F$ 当且仅当 $F = \emptyset$.
- (vi) 对任意的集合 E 与 F , 存在唯一的集合 G , 使得 $E \Delta G = F$ (实际上 $G = E \Delta F$).

解答. (i)

$$E \Delta \emptyset = (E \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus E) = E \cup \emptyset = E, \quad E \Delta E = (E \setminus E) \cup (E \setminus E) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

$$E \Delta E^c = (E \setminus E^c) \cup (E^c \setminus E) = E \cup E^c = X, \quad E \Delta X = (E \setminus X) \cup (X \setminus E) = E^c \cup E^c = E^c$$

(ii)

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) = (F \setminus E) \cup (E \setminus F) = F \Delta E$$

(iii)

$$\begin{aligned} (E \Delta F) \Delta G &= [(E \setminus F) \cup (F \setminus E)] \Delta G \\ &= ([(E \setminus F) \cup (F \setminus E)] \setminus G) \cup (G \setminus [(E \setminus F) \cup (F \setminus E)]) \\ &= [E \setminus (F \cup G)] \cup [F \setminus (E \cup G)] \cup [G \setminus (E \cup F)] \cup [E \cap F \cap G] \\ &= (E \setminus [(F \setminus G) \cup (G \setminus F)]) \cup ([(F \setminus G) \cup (G \setminus F)] \setminus E) \\ &= E \Delta [(F \setminus G) \cup (G \setminus F)] \\ &= E \Delta (F \Delta G) \end{aligned}$$

(iv) 左边:

$$\begin{aligned} E \cap (F \Delta G) &= E \cap [(F \setminus G) \cup (G \setminus F)] = [E \cap (F \setminus G)] \cup [E \cap (G \setminus F)] \\ &= (E \cap F \cap G^c) \cup (E \cap G \cap F^c) \end{aligned}$$

右边 $(E \cap F) \Delta (E \cap G) = [(E \cap F) \setminus (E \cap G)] \cup [(E \cap G) \setminus (E \cap F)]$, 其中

$$(E \cap F) \setminus (E \cap G) = \{x \in E \cap F \mid x \notin E \cap G\}$$

由于 $x \in E$, 所以 $x \notin E \cap G$ 等价于 $x \notin G$. 即

$$(E \cap F) \setminus (E \cap G) = E \cap F \cap G^c$$

同理

$$(E \cap G) \setminus (E \cap F) = E \cap G \cap F^c$$

所以, 左边等于右边, 于是 $E \cap (F \Delta G) = (E \cap F) \Delta (E \cap G)$.

(v) 先证明 $E^c \Delta F^c = E \Delta F$. $E^c \Delta F^c = E \Delta F \Leftrightarrow (E^c \cap F) \cup (F^c \cap E) = (E \cap F^c) \cup (F \cap E^c)$, 仅仅是顺序的交换, 成立。

再证明 $E = E \Delta F$ 当且仅当 $F = \emptyset$.

“ $\Rightarrow$ ”: 两边同时对 E 做对称差, $E = E \Delta F \Rightarrow E \Delta E = E \Delta (E \Delta F) \Rightarrow \emptyset = F$

“ $\Leftarrow$ ”: 由 (i) 成立。

(vi) 首先验证 $E \Delta (E \Delta F) = F$. 由结合律,

$$E \Delta (E \Delta F) = (E \Delta E) \Delta F = \emptyset \Delta F = F$$

再证明 G 是唯一的。假如存在 $G' \neq G$, 且 $E \Delta G' = F$. 于是

$$E \Delta G = E \Delta G'$$

两边同时对 E 做对称差, 有

$$E \Delta (E \Delta G) = E \Delta (E \Delta G') \Rightarrow G = G'$$

于是矛盾, 可知 G 是唯一的。

题目 1.5. 设有集合列 $\{A_n\}, \{B_n\}$, 试证明

(i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = (\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \cup (\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n)$;

(ii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) = (\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \cap (\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n)$.

解答. (i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = \{x \mid \text{存在无穷多 } n, x \in A_n \cup B_n\} = \{x \mid \text{存在无穷多 } n, x \in A_n \text{ 或 } x \in B_n\}$
于是 x 要么属于无穷多个 A_n , 要么属于无穷多个 B_n , 或者都属于, 所以 $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) \subset (\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \cup (\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n)$.

反过来, 如果 x 要么属于无穷多个 A_n , 要么属于无穷多个 B_n , 那么自然就属于无穷多个 $A_n \cup B_n$, 所以 $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) \supset (\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \cup (\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n)$ 。

综上, $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = (\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \cup (\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n)$ 。

(ii) $x \in \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n)$, 意味着当 n 充分大后, $x \in A_n$ 且 $x \in B_n$, 于是 $x \in (\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \cap (\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n)$, 所以 “ $\subset$ ” 成立。

$x \in (\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \cap (\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n)$, 就意味着当 n 充分大之后, $x \in A_n$ 并且 $x \in B_n$, 于是 $x \in A_n \cap B_n$, 于是 “ $\supset$ ” 成立。

综上, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) = (\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \cap (\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n)$ 。

题目 1.6. 证明 $[a, b]$ 上的全体连续函数组成的集合 $C([a, b])$ 的势为 $\aleph$.

解答. 由于 $\text{card}(\mathbb{R}) = \aleph$, 先证明 $\text{card}(C([a, b])) \geq \text{card}(\mathbb{R})$. 由于 $\{f(x) = ax\}, a \in \mathbb{R}$ 是 $C([a, b])$ 的真子集, 且与 $\mathbb{R}$ 一一对应, $a \mapsto f(x) = ax$, 故 $\text{card}(C([a, b])) \geq \text{card}(\mathbb{R})$.

再证明 $\text{card}(C([a, b])) \leq \text{card}(\mathbb{R})$. 定义映射: $\alpha: C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q} \cap [a, b]}, f \mapsto f|_{\mathbb{Q} \cap [a, b]}$. 如果连续函数不同, 那他们在有理数点的取值不会完全相同, 所以 α 是单射. 所以 $\text{card}(C([a, b])) \leq \text{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{Q} \cap [a, b]}) = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph$.

综上, $\text{card}(C([a, b])) = \aleph$.

题目 1.7. 从良序原理证明 Zorn 引理.

解答. 设 $(X, \leq)$ 是一个非空半序集, 且 X 的每个非空全序子集都有上界. 由良序原理, 存在一个序 $\leq$, 使得 X 是一个全序集.

先任意选取一个 $a \in X$, 定义 $C = \{a\}$. 然后定义 $C_x := \{y \in C \mid y \leq x\}$, 这样, x 就是 C 的一个上界, 并将 x 加入到 C 中, 然后重复此操作. 这样, C 是一个非空全序集且是极大的. 因为假设 $z \notin C$ 且 z 大于 C 中所有元素, 那么 $z \in C$, 矛盾.

有假设, C 有上界 m . 假设 m 不是 X 的极大元, 那么就存在 $m \leq n$, 但是 n 应该属于 C 但不属于 C , 矛盾! 所以 m 就是极大元.

解答. (标准解答) 良序集是一种全序集, 他的非空子集都有极小元.

超限归纳法: 设 X 为良序集, 若 A 是 X 的子集 ($A \neq \emptyset$), 并且

$$I_x := \{y \in X \mid y < x\} \subset A \implies x \in A$$

则 $A = X$.

对比数学归纳法, 无非就是把 X 换成了 $\mathbb{N}$.

下面开始证明, 使用反证法.

$(X, \leq)$ 任意链有上界, 但 X 没有极大元. $x \in X$, 考虑 x 所在的链 $I_\alpha = \{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$, α, β 为序数. 由条件, I_α 有上界, 记 I_α 全体上界组成的子集为 $U_\alpha \subset X$. 由良序定理, $(U_\alpha, \leq)$ 是良序集, 取 U_α 极小元为 $\tilde{x}$. 任意的 $x \in I_\alpha, x \leq \tilde{x}$. 延拓 I_α , 得到 $I_{\alpha+1} = I_\alpha \cup \{\tilde{x}\}$ 在 $<$ 序下是一个延拓的新链. 由超限归纳法, 存在序数 λ , 使得 I_λ 是延拓后的最终链. I_λ 有上界 y , 因为 y 不是极大元, 所以存在某个 $z \in X, z > y$, 那 z 应该属于 I_λ . 但是不应该属于, 得到矛盾.

第二章 第 2 周实分析作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 2.1. 设 $E \subset \mathbb{R}^n, \delta > 0$, 证明集合 $\mathcal{O} = \{x : d(x, E) > \delta\}$ 是开集.

解答. 要证明集合 $\mathcal{O}$ 是开集, 需证明对任意 $x \in \mathcal{O}$, 存在开球 $B(x, r)$, 使得 $x \in B(x, r) \subset \mathcal{O}$.

取 $r = \frac{d(x, E) - \delta}{2} > 0$, 对任何 $x \in \mathcal{O}, y \in B(x, r), z \in E$, 有

$$d(z, y) \geq d(z, x) - d(y, x)$$

两边取下确界, 有

$$d(y, E) \geq d(x, E) - r = \frac{d(x, E) + \delta}{2} > \delta$$

所以 $y \in \mathcal{O}$, 即 $B(x, r) \subset \mathcal{O}$, 于是 $\mathcal{O}$ 是开集。

题目 2.2. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 证明 $f(x) := d(x, E)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续.

解答. 要证明 $f(x)$ 一致连续, 即证明 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$, 使得 $f(B(x, \delta_\varepsilon)) \subset B(f(x), \varepsilon)$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立, 且 δ_ε 只和 ε 有关与 x 无关。

取 $\delta_\varepsilon = \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in B(x, \delta_\varepsilon), z \in E$, 有

$$d(y, x) \geq d(z, x) - d(z, y)$$

两边取下确界, 有

$$d(x, E) - d(y, E) \leq d(x, y) \iff f(x) - f(y) \leq d(x, y) < \varepsilon$$

所以 $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$, 所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \varepsilon$, 使得 $f(B(x, \delta_\varepsilon)) \subset B(f(x), \varepsilon)$, 也就是一致连续。

题目 2.3. 设函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. 证明: $f(x)$ 连续当且仅当对 $\mathbb{R}$ 中任意开集 $\mathcal{O}$, $f^{-1}(\mathcal{O})$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集. 若定义域 $\mathbb{R}^n$ 改为开区间, 结论是否正确? 若定义域改为闭区间又如何?

解答. “ $\Leftarrow$ ”: 设 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbb{R}$ 中任意开集, $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$, 那么存在 r , $B(x, r) \subset f^{-1}(\mathcal{O})$, 于是 $f(x) \in f(B(x, r)) \subset \mathcal{O}$, 所以 f 是连续的。

“ $\Rightarrow$ ”: 因为 f 连续, 所以取 $f(x) \in \mathcal{O}$, $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$. 由于 $\mathcal{O}$ 是开集, 所以存在 r , $B(f(x), r) \subset \mathcal{O}$, 于是 $x \in f^{-1}(B(f(x), r)) \subset f^{-1}(\mathcal{O})$, 所以 $f^{-1}(\mathcal{O})$ 是开集。

改成开闭区间都是对的, 证明中就没有涉及原空间的属性。

解答. 改成开区间是对的, 因为 $\mathbb{R}^n$ 本来也是开集。但是改成闭区间是不对的, 我们看一个例子:

$$f(x) = [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x, \text{ 于是 } f^{-1}((0, \infty)) = (0, 1].$$

如果同时改成闭区间, 就是对的。

题目 2.4. 设 F_1, F_2 是 $\mathbb{R}$ 中两个互不相交的闭集. 证明: 存在两个互不相交的开集 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, 使得 $\mathcal{O}_1 \supset F_1, \mathcal{O}_2 \supset F_2$.

解答. 构造 $\mathcal{O}_1 = \{x: d(x, F_1) < \delta_1\}$, $\mathcal{O}_2 = \{x: d(x, F_2) < \delta_2\}$, 且 $\delta_1 + \delta_2 < d(F_1, F_2)$. 然后只需证明 $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. 假设 $x \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, 那么 $d(x, F_1) < \delta_1, d(x, F_2) < \delta_2$, 于是

$$d(x, F_1) + d(x, F_2) < d(F_1, F_2)$$

但是 $d(x, F_1) + d(x, F_2) \geq d(F_1, F_2)$, 矛盾! 所以 $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ 。

解答. 令 $\mathcal{O}_1 = \bigcup_{x \in F_1} B(x, \frac{1}{2}d(x, F_2))$, $\mathcal{O}_2 = \bigcup_{x \in F_2} B(x, \frac{1}{2}d(x, F_1))$, 直接用集合间的距离定义可能会出现 $d(F_1, F_2) = 0$ 的情况, 所以不如直接用点和集合之间的距离然后取并集来定义好。

题目 2.5. 设 $\{F_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一族有界闭集. 若对任意有限多个 $F_{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, N, \bigcap_{i=1}^N F_{\lambda_i} \neq \emptyset$, 则 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$.

解答. 使用反证法, 假设 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \emptyset$, 那么设 X 是全集, 由德摩根定律

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \right)^c = X$$

选取 λ_0 , 由于 F_{λ_0} 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, 所以是紧集, 且被一族开区间覆盖。那么就可

以选取有限个 $F_{\lambda_i}^c$, 覆盖 F_{λ_0} , 于是

$$F_{\lambda_0} \cap \left(\bigcap_{i=1}^N F_{\lambda_i} \right) = F_{\lambda_0} \cap \left(\bigcup_{i=1}^N F_{\lambda_i}^c \right)^c = F_{\lambda_0} \cap F_{\lambda_0}^c = \emptyset$$

这样就找到了有限个 F_{λ_i} , 他们的交集是空集, 矛盾! 所以 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_{\lambda} \neq \emptyset$.

题目 2.6. 证明: 代数 $\mathcal{A}$ 是 σ -代数当且仅当 $\mathcal{A}$ 关于可列递增并运算封闭 (即, 若 $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{A}$ 且 $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, 则 $\bigcup_1^\infty E_j \in \mathcal{A}$).

解答. “ $\implies$ ”: $\mathcal{A}$ 是 σ -代数, $\mathcal{A}$ 就对可列并运算封闭.

“ $\impliedby$ ”: 首先当 E_j 都是空集的时候, 有 $\emptyset \in \mathcal{A}$. 然后证明他对可列并运算封闭. 任取 $\{A_j\}_1^\infty$, 取 $\{E_j\}_1^\infty$, 满足 $E_j = \bigcup_{i=1}^j A_j$, 这样, $\{E_j\}$ 就是递增序列, $\mathcal{A}$ 对后者的可列并封闭就意味着对任意的 $\{A_j\}$ 的可列并封闭. 最后, 由于 $\mathcal{A}$ 是代数, 所以对补运算封闭. 所以 $\mathcal{A}$ 是 σ -代数.

题目 2.7. 设 $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. 若 $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{E})$, 证明:

$$\mathcal{M} = \bigcup \{ \sigma(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ 为 } \mathcal{E} \text{ 中可列子集} \}.$$

解答. 对任意可列子集 $\mathcal{F}$, $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{E})$, 所以 $\bigcup \sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{E})$.

任意的 $M_0 \in \mathcal{M}$, 设 $M_0 = M_1 \cup M_2 \cdots \cup M_n \cdots$, 设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{P}(M_i)$, $\mathcal{B}_i = \sigma(\mathcal{A}_i)$, ($i = 0, 1, 2, \dots$), 那么就有

$$\mathcal{B}_0 = \sigma(\mathcal{A}_0) \subset \sigma(\mathcal{E})$$

于是

$$\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{M} = \bigcup \mathcal{B}_0 \subset \bigcup \sigma(\mathcal{A}_0) \subset \bigcup \sigma(\mathcal{F})$$

所以 $\mathcal{M} = \bigcup \{ \sigma(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ 为 } \mathcal{E} \text{ 中可列子集} \}$.

解答. 由于 $\mathcal{F} \subset \mathcal{E} \implies \sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{E}) \implies \bigcup \{ \sigma(\mathcal{F}) \} \subset \sigma(\mathcal{E})$.

只需证明 $\sigma(\mathcal{E}) \subset \bigcup \{ \sigma(\mathcal{F}) \} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(\mathcal{F}_\lambda)$, 可以拆分成证明 $\mathcal{E} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(\mathcal{F}_\lambda)$ 和 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(\mathcal{F}_\lambda)$ 是一个 σ -代数.

先做第二个: $\forall y \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(\mathcal{F}_\lambda)$, $\exists \lambda$, 使得 $y \in \sigma(\mathcal{F}_\lambda) \implies y^c \in \sigma(\mathcal{F}_\lambda) \implies y^c \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(\mathcal{F}_\lambda)$.

$\forall \{y_i\}_{i=1}^\infty \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(\mathcal{F}_\lambda)$, $\exists \{\lambda\}_{i=1}^\infty$, s.t. $y_i \in \sigma(\mathcal{F}_{\lambda_i})$, 取 $\mathcal{F}' = \bigcup_{i=1}^\infty \sigma(\mathcal{F}_{\lambda_i})$ 是 $\mathcal{E}$

中的可列子集。

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} y_i \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma(\mathcal{F}_{\lambda_i}) \subset \sigma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\lambda_i}\right) = \sigma(\mathcal{F}') \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(\mathcal{F}_{\lambda})$$

因此, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(\mathcal{F}_{\lambda})$ 是一个 σ -代数。

再做第一个: $\forall e \in \mathcal{E}, e \in \mathcal{P}(X), \forall x \in e, \{x\}$ 是可列的, $\exists \lambda, \{x\} \subset \mathcal{F}_{\lambda}$,

$$e = \bigcup_{x \in e} \{x\} \in \bigcup_{x \in e} \sigma(\mathcal{F}_{\lambda}) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(\mathcal{F}_{\lambda})$$

所以 $\mathcal{E} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(\mathcal{F}_{\lambda})$ 。

综上, $\sigma(\mathcal{E}) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(\mathcal{F}_{\lambda})$ 。

第三章 第 3 周实分析作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

题目 3.1. 证明： $\mathbb{R}^n$ 中每个闭集可表为可列个开集的交.

解答. 令 R 为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集. 构造集合 $E_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, R) < \frac{1}{k}\}$, 下面我们论证 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = R$.

任意的 $x \in R$, $\forall k > 0$, $d(x, R) = 0 < \frac{1}{k}$, 所以 $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. 所以 $R \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$.

任意的 $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, $d(x, R) \geq 0$ 是显然的. 任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 当 $k > N$ 时, 由于 $x \in E_N$, 所以 $d(x, R) < \varepsilon$, 所以

$$0 \leq d(x, R) < \varepsilon$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 就得到 $d(x, R) = 0$, 又由于 R 是闭集, 所以 $x \in R$. 所以 $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \subset R$.

综上, $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = R$.

题目 3.2. 证明:

(i) C 是非空有界闭集. (ii) C 是完全不连通的.

(iii) C 是完全集, 即没有孤立点. (iv) C 无内点.

(v) C 的势是 $\aleph$. (vi) C 的总长度为 0.

解答. (i) 由于 $0 \in C \subset [0, 1]$, 所以是非空有界集. 因为每一步留下的都是闭集, 而闭集的无限并也是闭集, 所以 C 就是闭集.

(ii) 假设 x, y 是连通的, 那么一定存在足够大的 n , 使得 $3^{-n} < |y - x|$, 进而会使得区间 $[x, y]$ 中扣掉一块长度为 3^{-n} 的区间. 于是 x, y 不连通了. 所以 C 中没有任何两个点是连通的, 也就是 C 是完全不连通的.

(iii) 设 $x \in [a_n, b_n] \subset \mathcal{C}$, 这里 a_n, b_n 是 C_n 的各个区间, 长度为 3^{-n} . 任意的 ε , 存在 $n = [1 - \log_3 \varepsilon]$,

第一种情况, $x \in (a_n, b_n)$, 此时 $|x - a_n| < 3^{-n} < \varepsilon$, 因此他是极限点, 不是孤立点。

第二种情况, $x = a_n$ (或 $x = b_n$ 一样的), 将 $[a_n, b_n]$ 扣去中间的区间, 产生两个新区间, 看 $[a_n, a_{n+1}]$, $|a_{n+1} - a_n| < 3^{-n-1} < \varepsilon$, 所以他也不是孤立点。

因此 $\mathcal{C}$ 是完全集, 即没有孤立点。

(iv) 设 $x \in (a_n, b_n) \subset C_n$, 总会在有限次操作之后被丢掉。(这咋说)

【可以反证法, 假如有内点, 那么测度不为零。】

(v) 构造一个二进制小数 $0.\overline{a_1 a_2 \cdots a_n \cdots}$, 其中 $a_i \in \{0, 1\}$, 对 C_n 中的每个小区间进行编号, 满足左边的区间的小数第 n 位为 0, 右边的区间的小数的第 n 位为 1. 一开始定义为 0. C_1 中两个集合为 0.0 和 0.1, C_2 中四个集合为 0.00, 0.01, 0.10, 0.11, 以此类推。这样, 康托尔集就与一个二进制无穷小数一一对应。所以 $\text{card}(\mathcal{C}) = \text{card}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) = 2^{\aleph_0} = \aleph$.

(vi) 首先它是一个闭集减去一个开集族, 所以仍然是闭集, 所以是可测的。 $m(a_{n,i}) = \frac{1}{3^n}$, $1 \leq i \leq 2^{n-1}$,

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} a_{n,i}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$$

所以

$$m(\mathcal{C}) = 1 - m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} a_{n,i}\right) = 0.$$

题目 3.3. 在 Cantor 集 $\mathcal{C}$ 上定义 Cantor-Lebesgue 函数 $F(x)$. 对 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \in \mathcal{C}$, 其中 $a_i \in \{0, 2\}$, 令

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}.$$

(i) 证明: $\mathcal{C}$ 上的 Cantor-Lebesgue 函数 F 在 $\mathcal{C}$ 上连续, 且 $F(0) = 0, F(1) = 1$.

(ii) 若 a, b 是 $\mathcal{C}$ 的构造中所去掉的任一开区间的端点, 证明: $F(a) = F(b)$.

若 $x \in [0, 1] \setminus \mathcal{C}$, 则 x 一定属于 $\mathcal{C}$ 的构造中所去掉的某个开区间 (a, b) . 由 (ii) 知 $F(a) = F(b)$, 对所有 $x \in (a, b)$, 定义 $F(x) = F(a)$.

(iii) 证明: F 在 $[0, 1]$ 上单调且连续.

(iv) 证明: F 满足 $F(x) = 2F(\frac{x}{3}), \forall x \in [0, 1]$.

(v) 求使 F 不可微的点.

解答. (i) 对于 $x = 0$, 其三进制展开全为 0, 故 $F(0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{0}{2^i} = 0$.

对于 $x = 1$, 其三进制展开为 0.22222 , 即 $a_i = 2$ 对所有 i , 故 $F(1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$.

再证明 F 在 $\mathcal{C}$ 上连续。对任意 $x \in \mathcal{C}$ 和 $\varepsilon > 0$, 取正整数 $2^{-N} < \varepsilon$, 令 $\delta = 3^{-N}$, 这样, 对任意 $y \in \mathcal{C}$ 且 $|y - x| < \delta$, 他们的三进制展开的前 N 位数字相同, 否则就会差至少 3^{-N} , 所以 $F(x)$ 与 $F(y)$ 的二进制展开的前 N 位也相同, 从而

$$|F(x) - F(y)| \leq 2^{-N} < \varepsilon$$

故 F 在 x 处连续, 由 x 的任意性知 F 在 $\mathcal{C}$ 上连续。

(ii) 左端点 a 转换为 3 进制, 前 $n-1$ 位是某个由 0 和 2 组成的序列, 第 n 位是 0, 之后所有位都是 2。右端点 b 的三进制展开为: 前 $n-1$ 位是某个由 0 和 2 组成的序列, 与 a 相同, 第 n 位是 2, 之后所有位都是 0。所以

$$a = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i} + \frac{0}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i}, \quad b = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i} + \frac{2}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{0}{3^i}.$$

计算 F 值,

$$F(a) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i} + \frac{0}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i} + \frac{2}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{0}{3^i} \right) = F(b).$$

(iii) F 连续是显然的。 F 单调是因为 F 在 $\mathcal{C}$ 上是根据三进制展开映射到二进制小数, 这个映射也是保持大小顺序的。所以 F 在 $[0, 1]$ 上单调递增。

(iv) 当 $x \in \mathcal{C}$ 时, 设 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, 于是 $F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$, 而

$$2F\left(\frac{x}{3}\right) = 2F\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^{i+1}}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = F(x).$$

当 $x \notin \mathcal{C}$ 时, 假设 x 是在第 n 次操作被挖掉的, 那么 $F(x) = F(a_n)$. 那么 $\frac{x}{3}$ 就会是第 $n+1$ 次操作被挖掉的, $F\left(\frac{x}{3}\right) = F\left(\frac{a_n}{3}\right)$, 由于 $a_n, \frac{a_n}{3} \in \mathcal{C}$, 所以

$$F(x) = F(a_n) = 2F\left(\frac{a_n}{3}\right) = 2F\left(\frac{x}{3}\right).$$

(v) F 在 $\mathcal{C}$ 的补集上都是可微的, 导数存在且等于 0.

F 在 $\mathcal{C}$ 上的每一点都是不可微的。假设 $a_n, b_n \in C_n$ 是两个端点, 设 $a_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, 那么 $b_n = a_n + \frac{1}{3^n}$,

$$F(a_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}, \quad F(b_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}$$

差商

$$\frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{2^{-n}}{3^{-n}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 极限趋向于无穷大, 所以不可微。

题目 3.4. $\mathbb{R}$ 中子集 E 的 Jordan 外容度 $J_*(E)$ 定义为

$$J_*(E) = \inf \sum_{j=1}^N |I_j|,$$

其中 $\inf$ 对所有由区间 I_j 构成的有限覆盖 $\bigcup_{j=1}^N I_j \supset E$ 取值.

- (i) 证明对每个集合 E 有 $J_*(E) = J_*(\bar{E})$ (其中 $\bar{E}$ 表示 E 的闭包).
 - (ii) 试给出一个可列子集 $E \subset [0, 1]$ 使得 $J_*(E) = 1$ 但 $m_*(E) = 0$.
 - (iii) (单调性) 若 $E \subset F$, 则 $J_*(E) \leq J_*(F)$.
 - (iv) (非可列次可加性) 举例说明: 若 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, 则一般而言有 $J_*(E) \not\leq \sum_{j=1}^{\infty} J_*(E_j)$.
 - (v) (开集逼近) 若 $E \subset \mathbb{R}$, 则 $J_*(E) = \inf J_*(\mathcal{O})$, 其中下确界关于所有包含 E 的开集 $\mathcal{O}$ 取.
 - (vi) (分离集的可加性) 若 $E = E_1 \cup E_2$ 且 $d(E_1, E_2) > 0$, 则 $J_*(E) = J_*(E_1) + J_*(E_2)$.
- 【提示: 对于举例而言, 可考虑 $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ 并利用 $\mathbb{Q}$ 在 $[0, 1]$ 中的稠密性.】

解答. (i) 先证明 $J_*(E) \leq J_*(\bar{E})$, 设 $\bar{E} \subset \bigcup_{k=1}^N J_k$, 那么由于 $E \subset \bar{E}$, 所以 $E \subset \bigcup_{k=1}^N J_k$, 所以

$$J_*(E) = \inf \sum_{j=1}^N |I_j| \leq \inf \sum_{k=1}^N |J_k| = J_*(\bar{E}).$$

再证明 $J_*(E) \geq J_*(\bar{E})$.

(ii) $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. 则 E 为可列集, 故其外测度 $m_*(E) = 0$. 另一方面, 由于 E 在 $[0, 1]$ 中稠密, 任何有限个开区间若要覆盖 E , 则这些开区间的并必须包含 $[0, 1]$ 中除至多有限个点外的所有点 (否则若存在一个开区间未被覆盖, 则其中必含有理数), 从而总长度可任意接近 1 但不能小于 1. 因此 Jordan 外测度 $J_*(E) = 1$.

(iii) 若区间族 $\{I_j\}$ 覆盖 F , 那么他就覆盖 E , 所以 $J_*(E) \leq \inf \sum_{j=1}^N |I_j| = J_*(F)$.

(iv) $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. 取 E_j 为所有有理数的单点集, 这是一个可列的求和. 但是 $J_*(E) = 1$, $\sum_{j=1}^{\infty} J_*(E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} J_*(\{q\}) = 0$.

(v) 由于 $E \subset \mathcal{O}$, 所以 $J_*(E) \leq J_*(\mathcal{O}) \implies J_*(E) \leq \inf J_*(\mathcal{O})$.

再证明反向. $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $E \subset \bigcup_{i=1}^N Q_j$, $\sum_{i=1}^N |Q_j| \leq J_*(E) + \varepsilon$. 令 Q_i^0 为包含 Q_i

的一个开方体, 且 $|Q_i^0| \leq |Q_i| + \frac{\varepsilon}{2^i}$. 那么取 $\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^N Q_i^0 \supset E$ 是开集. 那么

$$J_*(\mathcal{O}) \leq \sum_{i=1}^N |Q_i^0| \leq \sum_{i=1}^N |Q_i| + \frac{\varepsilon}{2^i} \leq J_*(E) + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^N}\right)$$

由 ε 的任意性, 所以 $J_*(\mathcal{O}) \leq J_*(E)$, 所以 $\inf J_*(\mathcal{O}) \leq J_*(E)$, 所以 $J_*(E) = \inf J_*(\mathcal{O})$.

(vi) 设 $d(E_1, E_2) = \delta > 0$. 首先, 由定义显然有 $J_*(E) \leq J_*(E_1) + J_*(E_2)$, 因为取 E_1 和 E_2 的有限开覆盖合并即得 E 的一个覆盖.

反之, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有限个开区间 $\{I_j\}_{j=1}^N$ 覆盖 E , 使得 $\sum_{j=1}^N |I_j| < J_*(E) + \varepsilon$. 若某个区间 $I = (a, b)$ 同时含有 E_1 和 E_2 中的点, 则由于两点距离至少为 δ , 可设 $m = \sup(E_1 \cap I)$, $n = \inf(E_2 \cap I)$, 则 $n - m \geq \delta$. 将 I 替换为两个开区间 $I_1 = (a, m + \frac{\delta}{2})$ 和 $I_2 = (n - \frac{\delta}{2}, b)$, 它们分别覆盖 $E_1 \cap I$ 和 $E_2 \cap I$, 且长度之和 $|I_1| + |I_2| = (b - a) - (n - m) + \delta \leq b - a$. 对每个这样的区间施行此操作, 得到一个新的有限开区间族, 它们仍然覆盖 E , 且总长度不超过原总长度. 新族中的区间分为两类: 一类只与 E_1 相交, 另一类只与 E_2 相交. 这些区间分别构成 E_1 和 E_2 的有限开覆盖, 因此它们的总长度分别不小于 $J_*(E_1)$ 和 $J_*(E_2)$, 即

$$\sum |I_j| \geq J_*(E_1) + J_*(E_2).$$

于是 $J_*(E) + \varepsilon > J_*(E_1) + J_*(E_2)$, 由 ε 的任意性得 $J_*(E) \geq J_*(E_1) + J_*(E_2)$. 结合反向不等式, 有 $J_*(E) = J_*(E_1) + J_*(E_2)$.

题目 3.5. 令 $E \subset \mathbb{R}$ 且 $m_*(E) > 0$. 证明: 对每个 $\alpha \in (0, 1)$, 存在开区间 I 使得

$$m_*(E \cap I) \geq \alpha m_*(I).$$

粗略地说, 这个估计说明 E 几乎包含整个区间.

【提示: 选一个开集 $\mathcal{O} \supset E$ 且满足 $m_*(E) \geq \alpha m_*(\mathcal{O})$. 将 $\mathcal{O}$ 表示为互不相交开区间的可列并, 并说明这些区间之一一定满足想要的性质.】

解答. 根据提示选一个开集 $E \subset \mathcal{O}$ 满足 $m_*(E) \geq \alpha m_*(\mathcal{O})$, 由 $\mathbb{R}$ 中的开集构造定理可知, 存在可列个不相交的开集 Q_i , 使得 $\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$. 则 $m_*(\mathcal{O}) = \sum_{i=1}^{\infty} m_*(Q_i)$. 假设这些 Q_i 都使得 $m_*(E \cap Q_i) < \alpha m_*(Q_i)$, 则由外测度的可加性, 可得

$$m_*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_*(E \cap Q_i) < \alpha m_*(\mathcal{O})$$

矛盾! 所以必然存在 Q_i 满足 $m_*(E \cap Q_i) \geq \alpha m_*(Q_i)$.

第四章 第 4 周实分析作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

题目 4.1. (Borel-Cantelli 引理)

设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是由 $\mathbb{R}^n$ 的可测子集组成的可列族且

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty.$$

令

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{对无穷多个 } k, x \in E_k\} = \limsup_{k \rightarrow \infty} E_k.$$

(i) 证明 E 可测.

(ii) 证明 $m(E) = 0$.

【提示】利用表达式 $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} E_k$.

解答. (i) 因为 $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} E_k$, 由于每个 E_k 都是可测的, 所以他们的可列并可列交也都是可测的, 所以 E 是可测的。

(ii) 由测度的次可加性,

$$m(E) \leq m\left(\bigcup_{k \geq n} E_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} m(E_k)$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$, 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, $m(E) = 0$.

题目 4.2. 设 $A \subset E \subset B$, 其中 A 和 B 为有限可测集. 证明: 若 $m(A) = m(B)$, 则 E 可测.

解答. 由于 A 和 B 为有限可测集, 且 $A \subset B$, 所以

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A) = 0$$

由于 $E \setminus A \subset B \setminus A$, 所以由测度的单调性, 可得

$$m(E \setminus A) \leq m(B \setminus A) = 0$$

所以 $m(E \setminus A) = 0$, 所以 $E \setminus A$ 是零测集, 是可测集. 所以 $E = (E \setminus A) \cup A$ 是可测集.

题目 4.3. 设 $\{E_n\}$ 为 $[0, 1]$ 中的可测集列, 且满足 $\limsup_{n \rightarrow \infty} m(E_n) = 1$. 证明对于任意 $\alpha \in (0, 1)$, 存在子列 $\{E_{n_k}\}$, 使得

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\right) > \alpha.$$

解答. 假设对于任意的 $\alpha \in (0, 1)$, 不存在子列 $\{E_{n_k}\}$, 使得 $m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}) > \alpha$. 那也就是说任意的子列 $\{E_{n_k}\}$, $m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}) = 0$. 因为 $\limsup_{n \rightarrow \infty} m(E_n) = 1$, 所以存在子列 $\{E_{n,k}\}$, 使得 $m(E_{n,k}) \rightarrow 1$, 设满足

$$1 - m(E_{n,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

那么令 $F_k = [0, 1] \setminus E_{n,k}$, 则 $m(F_k) = 1 - m(E_{n,k})$, 所以由测度的次可加性可得

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(F_k) < \varepsilon$$

因此,

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n,k}\right) = 1 - m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) > 1 - \varepsilon$$

令 $\varepsilon = 1 - \alpha$, 得到了矛盾. 所以原结论成立.

题目 4.4. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 可测且 $m(E) > 0$. 证明如下定义的 E 的差集

$$\{z \in \mathbb{R} : \text{对某个 } x, y \in E, z = x - y\},$$

包含一个中心在原点的开区间.

解答. 首先整个差集是一个中心在原点的区间. 记 E 的差集为 F , 因为 $\forall z \in F$, $\exists x, y \in E, x - y = z$, 于是 $y - x = -z \in F$.

由于 $m(E) > 0$, 所以任意的 ε , 存在 δ , 能找到一个 $x \in E$, 且 $(x - \delta, x + \delta) \subset E$, 不然 $m(E) = 0$ 。这样, 这个小开集的差集 $F' = (-2\delta, 2\delta) \subset F$, 以原点为中心且是开集。

解答. 【正确解答】:

1. 利用 Lebesgue 密度定理

因为 $m(E) > 0$, 由 Lebesgue 密度定理, 存在点 $a \in E$ 使得

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{m(E \cap (a - r, a + r))}{2r} = 1.$$

作平移 $E' = E - a$, 则 $0 \in E'$ 且 $E' - E' = E - E$ 。因此不妨设 $a = 0$, 即

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{m(E \cap (-r, r))}{2r} = 1. \quad (1)$$

2. 选取适当的 δ

由极限定义, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $0 < r < \delta$ 有

$$\frac{m(E \cap (-r, r))}{2r} > \frac{3}{4}.$$

取 $r = \delta$, 则

$$m(E \cap (-\delta, \delta)) > \frac{3}{4} \cdot 2\delta = \frac{3\delta}{2}. \quad (2)$$

记 $F = E \cap (-\delta, \delta)$, 则 $F \subset (-\delta, \delta)$ 且 $m(F) > \frac{3\delta}{2}$ 。

3. 证明小平移与 $\setminus(F \setminus)$ 有交

取任意实数 z 满足 $|z| < \frac{\delta}{4}$ 。考虑平移集 $z + F = \{z + x : x \in F\}$ 。因为 $F \subset (-\delta, \delta)$, 所以

$$z + F \subset (-\delta + z, \delta + z) \subset \left(-\delta - \frac{\delta}{4}, \delta + \frac{\delta}{4}\right) = \left(-\frac{5\delta}{4}, \frac{5\delta}{4}\right).$$

同时 $F \subset (-\delta, \delta) \subset \left(-\frac{5\delta}{4}, \frac{5\delta}{4}\right)$ 。因此

$$(z + F) \cup F \subset \left(-\frac{5\delta}{4}, \frac{5\delta}{4}\right),$$

其测度

$$m((z + F) \cup F) \leq \frac{5\delta}{2}. \quad (3)$$

现在计算 $(z + F) \cap F$ 的测度。由测度的次可加性:

$$m(z + F) + m(F) = m((z + F) \cup F) + m((z + F) \cap F),$$

即

$$m((z + F) \cap F) = m(z + F) + m(F) - m((z + F) \cup F).$$

由于平移保持测度, $m(z + F) = m(F)$, 代入得

$$m((z + F) \cap F) = 2m(F) - m((z + F) \cup F).$$

利用 (2) 和 (3):

$$m((z + F) \cap F) \geq 2 \cdot \frac{3\delta}{2} - \frac{5\delta}{2} = 3\delta - 2.5\delta = 0.5\delta > 0.$$

因此 $(z + F) \cap F$ 的测度严格为正, 特别地它非空。于是存在 $x, y \in F \subset E$ 使得 $x = z + y$, 即 $z = x - y$ 。故 $z \in \Delta_E$ 。

4. 结论

对任意满足 $|z| < \frac{\delta}{4}$ 的 z 都有 $z \in \Delta_E$, 所以开区间 $(-\frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{4}) \subset \Delta_E$ 。这就证明了差集包含一个中心在原点的开区间。

题目 4.5. 在 $\mathbb{R}^n$ 中构造一个 Lebesgue 不可测集。

解答. 由于 Vitali 集 $\mathcal{N}$ 在 $(0, 1)$ 中是不可测的。所以令 $\varphi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$, 那么 $\varphi(\mathcal{N}) = \{x \in \mathcal{N} : \varphi(x)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的不可测集。

备注 4.1. 这里我问 AI 能不能用 $\tan$ 函数把 $(0, 1)$ 上的不可测集变成 $\mathbb{R}$ 上的不可测集, 他说可以, 因为 $\psi : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$, $\psi(y) = \frac{1}{\pi} \arctan y + \frac{1}{2}$ 作为 φ 的逆映射是 Lipschitz 连续的, 如果一个映射 f 是连续的也是 Lipschitz 连续的, 那么对任意勒贝格可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 像 $f(E)$ 也是 Lebesgue 可测的。

因为可测集可写为一个 F_σ 集和一个零测集的并, 连续映射保持 Borel 性, Lipschitz 连续把零测集映为零测集, 因此像可测。

所以在这里, 假如 $\varphi(\mathcal{N})$ 可测, 那么 $\psi(\varphi(\mathcal{N})) = \mathcal{N}$ 就是可测的了, 矛盾, 所以 $\varphi(\mathcal{N})$ 是 $\mathbb{R}$ 上的不可测集。

题目 4.6. 假设 A 是可测集, B 是不可测集, 证明 $A \triangle B$ 是不可测集。

解答. 因为全体可测集构成一个 σ -代数, 所以假如 $A \triangle B$ 可测, 那么 $B = A \triangle (A \triangle B)$ 也可测, 从而得到矛盾。所以 $A \triangle B$ 不可测。

题目 4.7. 令 $\mathcal{N}$ 表示课堂中构造的 $I = [0, 1]$ 中的不可测集。

(i) 证明: 若 E 是 $\mathcal{N}$ 的可测子集, 则 $m(E) = 0$ 。

(ii) 证明: 集合 $\mathcal{N}^c = I - \mathcal{N}$ 满足 $m_*(\mathcal{N}^c) = 1$, 且若取 $E_1 = \mathcal{N}$ 和 $E_2 = \mathcal{N}^c$, 虽然 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 但是仍有

$$m_*(E_1) + m_*(E_2) \neq m_*(E_1 \cup E_2).$$

(iii) 证明: 若 $G \subset \mathbb{R}$ 且 $m_*(G) > 0$, 则 G 包含一个不可测子集.

【提示】(i) 可用 E 的有理数平移. (ii) 为证明 $m_*(\mathcal{N}^c) = 1$, 可用反证法, 选取一个可测集 U 使得 $U \subset I, \mathcal{N}^c \subset U$ 且 $m_*(U) < 1 - \varepsilon$.

解答. (i) 设 $\mathcal{N}_k = r_k + \mathcal{N}, E_k = r_k + E, r_k$ 是 $[0, 1]$ 中的有理数, 那么 $m(\mathcal{N}_k) = m(\mathcal{N})$. 但是由于 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_k \subset [-1, 2]$, 所以

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) \leq 3$$

所以 $m(E_k)$ 只能等于 0, 所以 $m(E) = 0$.

(ii) 假设 $m_*(\mathcal{N}^c) < 1$, 那么就存在可测集 U 满足 $\mathcal{N}^c \subset U \subset I$, 且 $m_*(U) < 1 - \varepsilon$, 但是这样 $I \setminus U \subset \mathcal{N}$, 由第一问知 $m_*(I \setminus U) = 0$, 所以 $m_*(U) = 1$ 矛盾. 因此 $m_*(\mathcal{N}^c) = 1$.

由于 $m_*(\mathcal{N}) \neq 0$, 否则 $m_*(\mathcal{N})$ 就是可测集了, 所以

$$m_*(E_1) + m_*(E_2) > 1 = m_*(E_1 \cup E_2)$$

(iii) 只要把 $\mathcal{N}$ 平移缩放进到 G 中就可以。

题目 4.8. 设 $f(x), g(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数, 且 $f(x) > 0$, 证明 $f(x)^{g(x)}$ 是可测函数.

解答. 考虑函数 $h(x) = g(x) \ln f(x)$, 因为 $\ln x$ 可测, 所以 $h(x)$ 是一堆函数的复合也是可测的. 而由于 e^x 是连续的, 所以

$$f(x)^{g(x)} = e^{h(x)}$$

也是可测的。

题目 4.9. 在 $[0, 1]$ 上构造一个闭集 $\hat{\mathcal{C}}$, 在构造的第 k 阶段删除 2^{k-1} 个位于中心位置的长度为 ℓ_k 的开区间, 其中

$$\sum_{j=1}^k 2^{j-1} \ell_j < 1.$$

- (i) 若取 ℓ_j 足够小, 则 $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j-1}\ell_j < 1$. 在此情况下, 证明 $\hat{\mathcal{C}}$ 的总长度 $|\hat{\mathcal{C}}| = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j-1}\ell_j$.
- (ii) 证明: 若 $x \in \hat{\mathcal{C}}$, 则存在一点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $x_n \notin \hat{\mathcal{C}}$, 但 $x_n \rightarrow x$ 且 $x_n \in I_n$, 其中 I_n 是 $[0, 1] \setminus \hat{\mathcal{C}}$ 的子区间且 $|I_n| \rightarrow 0$.
- (iii) 证明 $\hat{\mathcal{C}}$ 是完全集且不包含任何开区间.
- (iv) 证明 $\hat{\mathcal{C}}$ 是不可列的.
- (v) 利用类 Cantor 集构造一个可测集 E , 使得对 $[0, 1]$ 的任何非空开子区间 I 成立 $m(E \cap I) > 0$ 和 $m(E^c \cap I) > 0$.
- (vi) 证明 $f = \chi_E$ 具有性质: 若 $g = f$ a.e., 则 g 在 $[0, 1]$ 的每个点处必不连续.

解答. (i) 由于被删除的区间互不相交, 所以被删除的区间总的长度为 $\sum_{j=1}^k 2^{j-1}\ell_j$. 由条件, 该级数收敛且和小于 1, 并且 $[0, 1]$ 的 Lebesgue 测度为 1, 所以 $|\hat{\mathcal{C}}| = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j-1}\ell_j$.

(ii) 若 $x \in \hat{\mathcal{C}}$, 那么 x 一定是在某个端点上, 即存在很小的 δ , $(x - \delta, x + \delta) \cap \hat{\mathcal{C}} = \emptyset$, 否则再进行一次删除区间这个点就没了.

$\forall \varepsilon > 0, \exists K$, 当 $k > K$ 时, 令 I_k 为第 k 阶段去掉的集合的并集. 因为 $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j-1}\ell_j$ 是收敛的, 所以 $2^{k-1}\ell_k$ 一定是趋于 0 的. 取 x_k 为最靠近 x 的被去掉的区间里的一个点, 这样就构成了一个点列 $\{x_k\}$. 且 $|x_k - x| < 2\ell_k \rightarrow 0$, 所以就找到了这样的点列.

(iii) 假设 $\hat{\mathcal{C}}$ 包含某个开区间 (a, b) , 由于 $m((a, b)) \leq m(\hat{\mathcal{C}}) = 0$ 所以 $m((a, b)) = 0$, 但这是不对的, 开区间的测度不为 0. 所以 $\hat{\mathcal{C}}$ 不包含开区间.

然后由于 $\hat{\mathcal{C}}$ 是有限个闭区间的并, 所以是闭集, 然后 $\hat{\mathcal{C}}$ 没有孤立点是因为 $\forall x \in \hat{\mathcal{C}}$, 类比于 Cantor 集, x 会有一个选择序列 $(a_1, a_2, \dots)$, 其中 $a_i \in \{0, 1\}$ 表示在第 i 步选择左或右子区间. $\forall \varepsilon > 0$, 取 K 使得 $\ell_K < \varepsilon$. 将 x 的第 K 个选择进行改变, 得到 $y \in \hat{\mathcal{C}}$, 由于 x, y 同属于第 $K - 1$ 阶段的某个区间, 所以 $|x - y| \leq \ell_K < \varepsilon$, 因此 x 不是孤立点. 闭且无孤立点即为完全集.

(iv) $\hat{\mathcal{C}}$ 和 Cantor 三分集是一样的, 而 Cantor 三分集不可列, 所以 $\hat{\mathcal{C}}$ 也不可列.

(v)(vi) 不会.

解答. 【正确解答】 (v) 首先引入邻域基的概念.

邻域: $A \subset X$ 时 $x \in X$ 的邻域, 如果 $x \in \overset{\circ}{A}$.

邻域基: (X, τ) 是一个拓扑空间, 一个 τ 在点 $x \in X$ 处的邻域基 $N \subset \tau$ 是指 $\forall V \in N, x \in V$, 若 $U \in \tau, x \in U$, 则存在 $V \in N, x \in V \subset U$.

比如: $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], a < b\}$ 是 $[0, 1]$ 的邻域基.

然后回到这个题的证明, 作 $\hat{\mathcal{C}} \subset [0, 1]$, $m(\hat{\mathcal{C}}) = \frac{1}{2}, m([0, 1] \setminus \hat{\mathcal{C}}) = \frac{1}{2}$. 令 $[0, 1]$ 上的邻域基为 $\{\mathcal{I}_n\} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], a < b\}$, 令 $C = \{a\hat{\mathcal{C}} + b \mid a, b \in [0, 1]\}$.

取 $A_1, B_1 \subset C$, 使得 $A_1, B_1 \in \mathcal{I}_1, A_1 \cap B_1 = \emptyset$.

若已取 $A_1, B_1, \dots, A_k, B_k$, 取 $A_{k+1}, B_{k+1}, \mathcal{I}_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k (A_i \cup B_i) \right)$ 。令 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset E^c$,

$$m(E \cap I) \geq m(A_n) > 0, \quad m(E^c \cap I) \geq m(B_n) > 0$$

(vi) 因为处处不连续, 所以修改一个零测集上的点也不会改变不连续性。

第五章 第 5 周实分析作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

题目 5.1. 令 $\{f_n\}$ 为 $[0, 1]$ 上的可测函数列且 $|f_n(x)| < \infty$, a.e. x . 证明存在正实数列 $\{c_n\}$ 使得

$$\frac{f_n(x)}{c_n} \rightarrow 0 \quad \text{a.e. } x.$$

提示：取 c_n 使得 $m(\{x : \left|\frac{f_n(x)}{c_n}\right| > \frac{1}{n}\}) < 2^{-n}$, 运用 Borel-Cantelli 引理.

解答. 令 $E_n = \left\{x : \left|\frac{f_n(x)}{c_n}\right| > \frac{1}{n}\right\}$, $\{c_n\}$ 是使得 $m(E_n) < 2^{-n}$ 的正实数列. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \infty$, 所以 $m(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) = 0$, 即几乎每个点至多属于有限多个 E_n . 所以存在 N , 当 $n > N$ 时, $x \notin E_n$ a.e. 也就是

$$\left|\frac{f_n(x)}{c_n}\right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{a.e.}$$

这样的 c_n 是存在的. 因为 $\{f_n\}$ 可测且 $|f_n(x)| < \infty$, 所以 $\lim_{M \rightarrow \infty} m(\{x : |f_n(x)| > M\}) = 0$, 令 $M = \frac{c_n}{n}$, 只要 M 足够大, 就有

$$m\left(\left\{x : |f_n(x)|/c_n > \frac{1}{n}\right\}\right) < 2^{-n}.$$

题目 5.2. 设 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上分别连续, 即固定一个变量, f 关于另一个变量连续. 证明 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上可测.

提示：关于变量 x , 用分段线性函数 f_n 逼近 f , 使得 $f_n \rightarrow f$ 逐点成立.

解答. 对每个正整数 n , 将 $\mathbb{R}$ 划分成长度为 $\frac{1}{n}$ 的左闭右开区间:

$$I_{k,n} = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

定义

$$\varphi_n(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{n}, y\right) \cdot \delta_{I_{k,n}}$$

这样, φ_n 是简单函数, 且是关于 x 的分段常数, 在区间 $I_{k,n}$ 上等于 $f\left(\frac{k}{n}, y\right)$.

由一元的简单函数逼近定理可知, $\varphi_n(x, y)$ 逐点收敛于 $f(x, y)$, 由于 $\varphi_n(x, y)$ 是可测的, 所以求和取极限之后仍然是可测的, 所以 $f(x, y)$ 就是可测的。

解答. (正确解答) 构造这样的一个函数列

$$f_n(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & x = \frac{k}{n} \\ \tau f\left(\frac{k}{n}, y\right) + (1 - \tau) f\left(\frac{k+1}{n}, y\right), & x = \tau \frac{k}{n} + (1 - \tau) \frac{k+1}{n} \end{cases}$$

首先 $f_n(x, y) \rightarrow f(x, y)$ 是显而易见的。然后证明可测只需说明 f_n 足够好, 比如 f_n 连续。对于点 (x_0, y_0) , $\forall y = y_0$, $|f_n(x, y) - f_n(x_0, y)| \rightarrow 0$ 。当 $y \neq y_0$ 时,

$$\begin{aligned} |f_n(x_0, y_0) - f_n(x, y)| &\leq |f_n(x, y) - f_n(x, y_0)| + |f_n(x, y_0) - f(x, y_0)| \\ &\quad + |f(x, y_0) - f_n(x, y_0)| + |f_n(x, y_0) - f_n(x, y)| \end{aligned}$$

由于 f_n 关于 y 连续, f 关于 x 连续, $f_n \rightarrow f$, 所以可以证明 f_n 连续。

题目 5.3. 设 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的曲线 $y = f(x)$, 其中 f 连续. 证明: $m(\Gamma) = 0$.

解答. 将 $\mathbb{R}$ 划分为可列个区间 $I_n = [n, n+1], n \in \mathbb{Z}$ 的并, 这样

$$\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma_n := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{(x, f(x)) : x \in I_n\}$$

这样, 我们只需要在每一个 I_n 中进行处理。

由于 f 是连续的, 所以 f 在 I_n 中是一致连续的。任意的 $\varepsilon > 0$, 将 I_n 均分为 k_n 份, 使得每一小份上 $\omega(f) < \frac{\varepsilon}{k_n}$, 这样, 在 I_n 中就可以用测度小于 ε 的长方形覆盖 Γ_n , 于是 Γ_n 就是零测集。所以 Γ 是零测集的可列并, 还是零测集, 即 $m(\Gamma) = 0$ 。

题目 5.4. 设 $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}, f, g$ 在可测集 E 上可测. 证明: 若 $f_k \xrightarrow{m} f$, 且 $f_k(x) \leq g(x)$, a.e., 则 $f(x) \leq g(x)$, a.e.

解答. 假设存在非零测集 A , 使得对任意的 δ , $f(x) \geq \delta + g(x)$ 。由于对任意 $x \in A$, $f_k(x) \leq g(x)$, 于是

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_k(x)|$$

所以 $|f(x) - f_k(x)| \geq \delta$ 。

设 $B = \{x : |f(x) - f_k(x)| \geq \delta\}$, $A = \{x : |f(x) - g(x)| \geq \delta\}$, 所以 $m(B) \geq m(A) > 0$, 与依测度收敛矛盾。所以使得 $f(x) \geq \delta + g(x)$ 的 x 构成零测集, 于是令 $\delta \rightarrow 0$, 可以得到 $f(x) \leq g(x)$ 几乎处处成立。

题目 5.5. 设 $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, f 在可测集 E 上可测. 证明: 若 $f_k \xrightarrow{m} f$, 且 $\forall k \in \mathbb{N}, f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$, 则 $f_k \xrightarrow{a.e.} f$.

解答. 由 Riesz 定理, 依测度收敛的序列存在子列几乎处处收敛, 因此存在子列 $\{f_{k_j}\}$ 使得

$$f_{k_j}(x) \rightarrow f(x), \text{ a.e. } x \in E$$

由于单调序列的子列收敛于同一极限, 于是整个序列几乎处处收敛于 f 。

题目 5.6. 设 $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, f 在有限可测集 E 上可测. 证明: $f_k \xrightarrow{m} f$ 当且仅当对 $\{f_k\}$ 的任意子列, 存在该子列的子列 a.e. 收敛于 f .

解答. “ $\implies$ ”: 由 Riesz 定理可得。子列的字列仍然是子列, 所以也成立。

“ $\impliedby$ ”: 因为 f 是在有限可测集 E 上可测, 所以 $f(x)$ 几乎处处有限, 由 Lebesgue 定理, f_k 依测度收敛到 f 。

解答. (正确解答) “ $\implies$ ”: 由 Riesz 定理可得。 $f_{k_j} \rightarrow f$ a.e.

“ $\impliedby$ ”:

$$\begin{aligned} f_{k_j} \xrightarrow{m} f &\iff \lim_{k \rightarrow \infty} m(\{x \in E : |f_k - f| > \varepsilon\}) = 0, \forall \varepsilon > 0 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \text{ 使得 } m(\{x \in E : |f_k - f| > \varepsilon\}) < \eta \end{aligned}$$

下面采用反证法。但是注意题目里需要加一个 $\{f_k\}, f$ 都几乎处处有限。反例是 $f_k \equiv k$ 。

然后就是 $f_{k_j} \rightarrow f$ 几乎处处。由勒贝格, f_{k_j} 依测度收敛于 f , 矛盾。反证的假设不成立。

题目 5.7. 设在有限可测集 E 上 $f_k \xrightarrow{m} f, g_k \xrightarrow{m} g$, 证明: $f_k \cdot g_k \xrightarrow{m} f \cdot g$.

解答. 由于

$$|f_k g_k - f g| = |(f_k - f) g_k - f(g - g_k)| \leq |f_k - f| |g_k| + |f| |g - g_k|$$

所以

$$\begin{aligned} m(\{x : |f_k g_k - fg|(x) > \varepsilon\}) &\leq m(\{x : |f_k - f||g_k|(x) + |f||g - g_k|(x) > \varepsilon\}) \\ &\leq m\left(\left\{x : |f_k - f||g_k|(x) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + m\left(\left\{x : |f||g - g_k|(x) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \end{aligned}$$

由于 g_k 依测度收敛到 g , 所以 $\forall \delta_1 > 0, \exists K_1, M_1$, 使得当 $k > K$ 时, $m(|g_k| > M_1) < \delta_1$ 。又由于 f_k 依测度收敛到 f , 所以 $\forall \delta_2 > 0, \exists K_2$, 当 $k > K_2$ 时, $m(|f_k - f| > \frac{\varepsilon}{2M_1}) < \delta_2$, 所以

$$m\left(|f_k - f||g_k|(x) > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq m\left(|f_k - f| > \frac{\varepsilon}{2M_1}\right) + m(|g_k| > M_1) < \delta_1 + \delta_2$$

第二项也类似, 取一个 M_2 截断 f , 使得

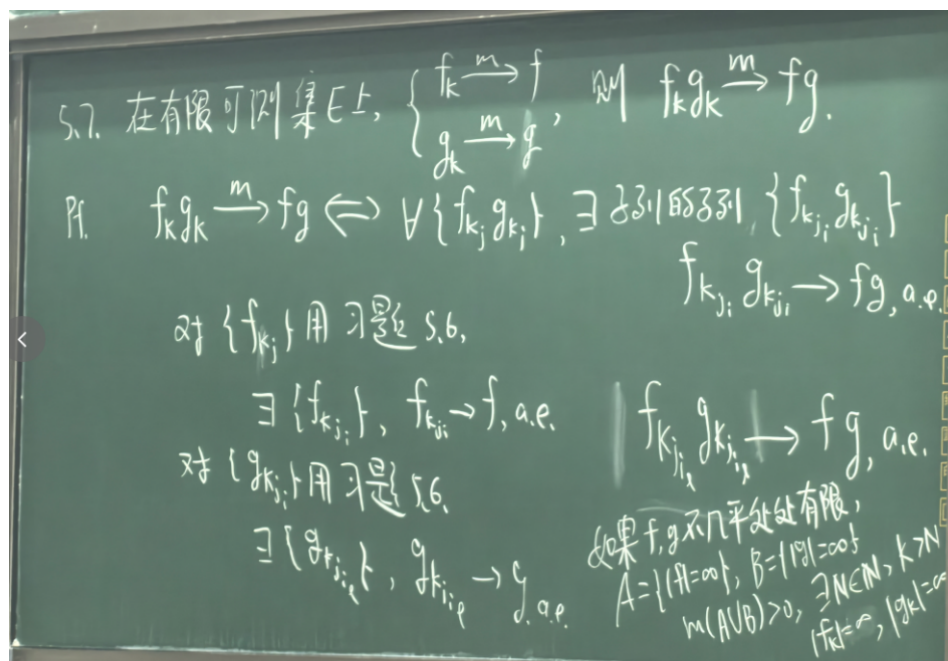
$$m\left(|f||g - g_k|(x) > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq m\left(|g - g_k|(x) > \frac{\varepsilon}{2M_2}\right) + m(|f| > M_2) < \delta_3 + \delta_4$$

进而, $\forall \delta > 0$, 可以取 $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 < \delta$, 就有

$$m(\{x : |f_k g_k - fg|(x) > \varepsilon\}) < \delta$$

所以这是个零测集。所以 $f_k \cdot g_k \xrightarrow{m} f \cdot g$ 。

解答. 没记, 拍的照。



接下来一个小时, 他找了 4 个习题, 大家现场做一做, 每隔 6 分钟他会讲一道。因为他之前老提前下课, 被教务处谈话了。

题目 5.8. $\{f_k\}$ 在 $E \subset \mathbb{R}$ 上可测, $m(E) < \infty$, 则

$$f_k \rightarrow 0 \text{ a.e. } E \iff \forall \varepsilon > 0, \lim_{j \rightarrow \infty} m \left(\left\{ x \in E : \sup_{k \geq j} |f_k(x)| \geq \varepsilon \right\} \right) = 0.$$

解答. $\{x \in E : \sup_{k \geq j} |f_k(x)| \geq \varepsilon\} = \bigcup_{k \geq j} \{x \in E : |f_k(x)| \geq \varepsilon\}$. 右边, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \text{右边} &\iff \lim_{j \rightarrow \infty} m \left(\left\{ x \in E : \sup_{k \geq j} |f_k(x)| \geq \frac{1}{n} \right\} \right) = 0 \\ &\iff \lim_{j \rightarrow \infty} m \left(\bigcup_{k \geq j} \left\{ x \in E : \sup_{k \geq j} |f_k(x)| \geq \frac{1}{n} \right\} \right) = 0 \\ &\iff m \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \bigcup_{k \geq j} \left\{ x \in E : \sup_{k \geq j} |f_k(x)| \geq \frac{1}{n} \right\} \right) = 0 \\ &\iff m \left(\liminf_{j \rightarrow \infty} \bigcup_{k \geq j} \left\{ x \in E : \sup_{k \geq j} |f_k(x)| \geq \frac{1}{n} \right\} \right) = 0 \\ &\iff m \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq j} \left\{ x \in E : \sup_{k \geq j} |f_k(x)| \geq \frac{1}{n} \right\} \right) = 0 \end{aligned}$$

Claim. $f_k \rightarrow 0$, a.e. $\iff m \left(E \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq j} \left\{ x \in E : \sup_{k \geq j} |f_k(x)| < \frac{1}{n} \right\} \right) \right) = 0$.

也就是说 $x \in \{f_k \rightarrow 0\} \iff x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq j} \{x \in E : \sup_{k \geq j} |f_k(x)| < \frac{1}{n}\}$.

$$\begin{aligned} f_k \rightarrow 0 &\iff \forall \frac{1}{n} > 0, \exists N \in \mathbb{N}, k > N, \text{ s.t. } |f_k(x)| < \frac{1}{n} \\ &\iff \forall \frac{1}{n} > 0, x \in P(n) \\ &\iff x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} P(n) \end{aligned}$$

这里 $P(n) = \{x \in E : \exists N \in \mathbb{N}, k > N, \text{ s.t. } |f_k(x)| < \frac{1}{n}\}$, 记 $Q(N) = \{x \in E : k > N, |f_k(x)| < \frac{1}{n}\}$.

$$\begin{aligned} x \in P(n) &\iff \exists N \in \mathbb{N}, x \in Q(N) \\ &\iff x \in \bigcup_{N=1}^{\infty} Q(N) \cap \bigcap_{k=N+1}^{\infty} \left\{ x \in E : |f_k(x)| < \frac{1}{n} \right\} \\ x \in E : f_k(x) \rightarrow 0 &\iff x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq j} \left\{ x \in E : \sup_{k \geq j} |f_k(x)| < \frac{1}{n} \right\} \end{aligned}$$

解答. 还有一个做法: 第一步: 构造辅助函数列并说明其性质

对每个正整数 j , 定义函数 $g_j: E \rightarrow [0, +\infty]$ 为

$$g_j(x) = \sup_{k \geq j} |f_k(x)|.$$

- **可测性:** 每个 $|f_k|$ 可测, 一列可测函数的上确界仍可测, 故每个 g_j 在 E 上可测。
- **单调性:** 由于对任意 x , 集合 $\{|f_k(x)| : k \geq j+1\} \subset \{|f_k(x)| : k \geq j\}$, 其上确界满足 $g_{j+1}(x) \leq g_j(x)$ 。因此 $\{g_j\}$ 是 E 上的单调递减非负可测函数列。

第二步: 将原条件用 g_j 表示

题目右端的测度条件即为

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{j \rightarrow \infty} m(\{x \in E : g_j(x) \geq \varepsilon\}) = 0. \quad (1)$$

这正是函数列 $\{g_j\}$ 依测度收敛于 0 的定义 (因为 $g_j \geq 0$)。

第三步: 建立 f_k 与 g_j 收敛性的等价关系

Lemma. $f_k \rightarrow 0$ a.e. 于 E 当且仅当 $g_j \rightarrow 0$ a.e. 于 E 。

Proof. ($\Rightarrow$) 设存在零测集 N 使得对每个 $x \in E \setminus N$ 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$ 。由数列极限的性质, 这等价于 $\limsup_{k \rightarrow \infty} |f_k(x)| = 0$ 。而由定义,

$$g_j(x) = \sup_{k \geq j} |f_k(x)|,$$

其极限恰为上极限:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x) = \inf_{j \geq 1} \sup_{k \geq j} |f_k(x)| = \limsup_{k \rightarrow \infty} |f_k(x)|.$$

因此对 $x \in E \setminus N$, 有 $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x) = 0$, 即 $g_j \rightarrow 0$ a.e.。

($\Leftarrow$) 设 $g_j \rightarrow 0$ a.e.。由于 $0 \leq |f_j(x)| \leq \sup_{k \geq j} |f_k(x)| = g_j(x)$, 由夹逼准则即得 $|f_j(x)| \rightarrow 0$ a.e., 故 $f_k \rightarrow 0$ a.e.。

第四步: 证明等价性

由于 $m(E) < \infty$ 且 $\{g_j\}$ 单调递减趋于 0 (至少在几乎处处意义下考察), 我们有以下熟知定理:

Theorem. 设 E 测度有限, $\{g_j\}$ 为 E 上单调递减的非负可测函数列, 则

$$g_j \rightarrow 0 \text{ a.e.} \iff g_j \xrightarrow{m} 0.$$

Proof.

($\Rightarrow$) 若 $g_j \rightarrow 0$ a.e., 因为 $m(E) < \infty$, 由叶戈罗夫定理的推论 (或直接由几乎处处收敛在有限测度下蕴含依测度收敛) 可知 g_j 依测度收敛于 0。

($\Leftarrow$) 因 $\{g_j\}$ 单调递减, 极限函数 $g(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x)$ 几乎处处存在 (可能取 $+\infty$, 但依测度收敛迫使 $g = 0$ a.e.). 具体地, 由依测度收敛, 存在子列 $\{g_{j_i}\}$ 几乎处处收敛于 0. 由于整个列单调递减, 若子列几乎处处趋于 0, 则母列也几乎处处趋于 0 (否则与单调性矛盾). 故 $g_j \rightarrow 0$ a.e.。

第五步: 完成原命题证明

将上述链条结合:

$$\begin{aligned}
 f_k \rightarrow 0 \text{ a.e.} & \xleftrightarrow{\text{引理}} g_j \rightarrow 0 \text{ a.e.} \\
 & \xleftrightarrow{\text{[有限测度]单调列定理}} g_j \xrightarrow{m} 0 \\
 & \xleftrightarrow{\text{定义}} \forall \varepsilon > 0, \lim_{j \rightarrow \infty} m(\{g_j \geq \varepsilon\}) = 0 \\
 & \xleftrightarrow{\text{展开}} \forall \varepsilon > 0, \lim_{j \rightarrow \infty} m\left(\left\{x \in E : \sup_{k \geq j} |f_k(x)| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0.
 \end{aligned}$$

因此原命题成立。

题目 5.9. 设 $\{f_n\}$ 是 $[a, b]$ 上的可测函数, f 是实值函数, 若 $\forall \varepsilon > 0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} m^*(\{x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$, 那么 f 是否可测?

解答. $\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N,$

$$m^*(\{x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \eta$$

取 $\varepsilon = \eta = 2^{-k}$, 存在 $\{\eta_k\} \subset \mathbb{N}$,

$$m^*(\{x \in [a, b] : |f_{\eta_k}(x) - f(x)| > 2^{-k}\}) < 2^{-k}$$

$$m(\limsup E_k) = m^*\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq j} E_k\right) \leq m^*\left(\bigcup_{k \geq j} E_k\right) \leq \sum_{k \geq j} m^*(E_k) \leq 2^{1-j}$$

$$m^*\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq j} E_k\right) = 0$$

$$\implies x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq j} E_k^c, \text{ a.e. } E$$

$$\implies \exists j_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq j, x \in E_k^c$$

$$\iff x \in \{x \in [a, b] : |f_k(x) - f(x)| < 2^{-k}\} \text{ a.e. } E$$

所以 $\lim_{j \rightarrow \infty} f_{\eta_j}(x) = f(x)$ a.e. E .

题目 5.10. $\{f_k\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 上正值可测函数列, 若 $f_k \xrightarrow{m} f$, 证 $\forall p > 0, f_k^p \xrightarrow{m} f^p$.

解答.

3. $\{f_k\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 上正值可测函数列. 若 $f_k \xrightarrow{m} f$, 证: $\forall p > 0, f_k^p \xrightarrow{m} f^p$.

Pf: $p=1$ 显然. $p=2$. $f_k^2 \rightarrow f^2$

$$f_k^2 - f^2 = (f_k - f)(f_k + f) \xrightarrow{m} 0 \rightarrow 2f.$$

$p > 1$: $|f_k^p - f^p| \leq p \max(|f_k|^{p-1}, |f|^{p-1}) |f_k - f|$.

$g(x) = x^p, |a^p - b^p| \leq |g'(ξ)| \cdot |a - b|, \xi \in [a, b]$

$\frac{1}{p} f_k^{p-1} \xrightarrow{m} \frac{1}{p} f^{p-1}$, 则 $f_k^p \xrightarrow{m} f^p$.

$p < 1$: $(\frac{a+b}{2})^p \leq \frac{a^p + b^p}{2}, a, b > 0, p \in (0, 1)$.

$|f_k^p - f^p| \leq |f_k - f|^p \rightarrow 0$

第六章 第 6 周实分析作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

备注 6.1. 第一个题有一个方向不会证明。然后就是在做的过程中感觉勒贝格可测的精髓没有把握到，甚至就是连他和黎曼积分的可积型区分都不好区分。

题目 6.1. (Fréchet 定理) 设 f 是可测集

E 上 a.e. 有限的函数，证明 f 在 E 上可测当且仅当存在 E 上的连续函数列在 E 上 a.e. 收敛于 f 。

解答. “ $\Leftarrow$ ”：若存在 E 上的连续函数列 $\{g_k\}$ 几乎处处收敛于 f ，由于每个 g_k 连续所以可测，所以 f 作为几乎处处的极限仍然可测。

“ $\Rightarrow$ ”（必要性不会，问的 AI）：因为 f 在 E 上可测，几乎处处有限，不妨设 f 在 E 上处处有限，因为修改零测集上的值不影响结论。下面构造所需的连续函数列。

取 $A_m = \{x \in \mathbb{R}^n : m-1 \leq |x| < m\}$ ($m = 1, 2, \dots$)，并令 $E_m = E \cap A_m$ ，则 $\{E_m\}$ 互不相交，且每个 E_m 为有限测度的可测集，且 $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ 。

对每个固定的 $k \in \mathbb{N}$ 及每个 $m \in \mathbb{N}$ ，由 Lusin 定理，存在紧集 $K_{m,k} \subset E_m$ ，满足

$$m(E_m \setminus K_{m,k}) < \frac{1}{2^{k+m}},$$

且 f 在 $K_{m,k}$ 上连续。令 $F_k = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{m,k}$ ， F_k 是闭集，同时

$$m(E \setminus F_k) \leq \sum_{m=1}^{\infty} m(E_m \setminus K_{m,k}) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+m}} = \frac{1}{2^k}$$

又因为每个 $K_{m,k}$ 互不相交且为闭集， f 在每个 $K_{m,k}$ 上连续蕴含 f 在 F_k 上连续。

由于 f 在 F_k 上可能无界，考虑有界连续函数

$$h_k(x) = \arctan f(x), \quad x \in F_k$$

F_k 为闭集, $\mathbb{R}^n$ 为正规空间, 由 Tietze 扩张定理, 存在连续函数 $\tilde{h}_k: \mathbb{R}^n \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 使得 $\tilde{h}_k|_{F_k} = h_k$. 令

$$g_k(x) = \tan \tilde{h}_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

由于 $\tan$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内连续, g_k 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数, 且对任意 $x \in F_k$, 有 $g_k(x) = \tan(\arctan f(x)) = f(x)$.

考虑集合

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} (E \setminus F_k)$$

由测度估计 $m(E \setminus F) < 2^{-k}$ 和 Borel-Cantelli 引理, $m(A) = 0$, 对任意 $x \in E \setminus A$, 存在 N 使得当 $k \geq N$ 时, $x \notin E \setminus F_k$, 即 $x \in F_k$. 于是当 $k \geq N$ 时, $g_k(x) = f(x)$, 因此 $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = f(x)$ 对所有 $x \in E \setminus A$ 都成立, 即 $\{g_k\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f .

题目 6.2. 设 $\chi_{[0,1]}$ 为 $[0,1]$ 的特征函数, 证明: 不存在 $\mathbb{R}$ 上的处处连续函数 f , 使得 $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$, a.e.

解答. 假设存在这样的函数 f , 使得 $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$, a.e. 由假设, 就会存在一个零测集 $N \subset [0,1]$, 使得 $f(x) = 1, x \in [0,1] \setminus N$.

若 0 或 1 不属于 N , 那么

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0 \neq 1$$

所以不连续。

若 0 或 1 属于 N , 不妨只看 $0 \in N$, 由于 N 是零测的, 所以必然存在 0 的 δ 邻域 $B(0, \delta)$, 使得 $\omega(f, B(0, \delta)) = 1$, 这又与连续性矛盾。

所以不存在这样的函数 f 。

题目 6.3. 设 f 是零测集 E 上的有界函数, 证明: f 可测且 $\int_E f = 0$.

解答. 由于 E 是零测集, 所以 E 的每一个子集都是零测集, 所以任意的 a , 集合 $\{x: f(x) \leq a\}$ 都是 E 的子集, 因此是零测集, 因此是可测集。所以 f 是可测函数。

又因 f 有界, 存在常数 $M > 0$ 使得 $|f(x)| \leq M$ 对所有 $x \in E$ 成立。根据积分的单调性和绝对值的性质,

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| \leq \int_E M = M \cdot m(E) = 0,$$

故 $\int_E f = 0$ 。

题目 6.4. 设 f 是有限可测集 E 上的有界可测函数, g 有界且在 E 上 $f = g$ a.e. 证明: $\int_E f = \int_E g$.

解答. 定义 $h = f - g$, 仅在一个零测集 E 上不为 0, 且 h 有界. 由上一题, 可得 $\int_E h = 0$, 所以 $\int_E f = \int_E g$.

题目 6.5. 设 $m(E) < \infty$, 若去掉有界收敛定理中 “ $|f_k|$ 在 E 上一致有界” 的假设, 结论是否成立?

解答. 不成立. 假如不一致有界, 在证明过程中

$$\begin{aligned} \int |f_n(x) - f(x)| dx &\leq \int_{A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| dx + \int_{E-A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \varepsilon m(E) + 2Mm(E - A_\varepsilon) \end{aligned}$$

这一步并不一定小于某个常数.

题目 6.6. (依测度收敛的 Fatou 引理) 设 $\{f_n\}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的非负可测函数列, 且 f_n 依测度收敛于 f , 证明

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx.$$

解答. 设 $L = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx$, 由下极限的定义, 存在子列 $\{f_{n_j}\}$ 使得

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int f_{n_j} = L$$

然后因为 f_n 依测度收敛于 f , 所以由 Riesz 定理, 存在 $\{f_{n_j}\}$ 的子列 $\{f_{n_{j_k}}\}$ 几乎处处收敛于 f . 对 $f_{n_{j_k}}$ 应用 Fatou 引理, 得

$$\int f \leq \liminf_k \int f_{n_{j_k}} = \liminf_n \int f_n(x)$$

题目 6.7. (i) 证明: 存在 $\mathbb{R}$ 上的正连续函数 f , 使得 f 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 但 $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

(ii) 证明: 若假设 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续且可积, 则 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

提示: 对于 (i), 构造一个连续函数使其在 $[n, n + \frac{1}{n^3})$ 上等于 $n, n \in \mathbb{N}$.

解答. (i) 令 $f_n(x)$ 为一个三角形尖峰, 具体定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2n^4(x-n), & n \leq x < n + \frac{1}{2n^3} \\ -2n^4(x-n) + 2n, & n + \frac{1}{2n^3} \leq x < n + \frac{1}{n^3} \end{cases}$$

令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 由于每个 $f_n(x)$ 是连续非负的, 所以 $f(x)$ 也是连续非负的, 且显然 $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. 因为

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3} \cdot n = \frac{\pi^2}{12}$$

是收敛的, 所以可积。

(ii) 仅需要看 $x \rightarrow +\infty$ 这一部分就可以。假设 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = M \neq 0$ 。取一列趋于无穷的点 $\{x_n\}$, 使得 $|f(x_n)| \geq M \forall n$, 由一致连续性, 任意的 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta$, 使得在区间 $J_n = (x_n - \delta, x_n + \delta)$ 上, $|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon$, 于是

$$|f(x)| \geq |f(x_n)| - |f(x) - f(x_n)| \geq M - \varepsilon$$

然后从 $\{x_n\}$ 中取子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $J_{n_k} = (x_{n_k} - \delta, x_{n_k} + \delta)$ 两两不相交, 从而积分满足

$$\int_{\mathbb{R}} |f| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{J_{n_k}} |f| \cdot 2\delta \geq \sum_{n=1}^{\infty} (M - \varepsilon) \cdot 2\delta = \infty$$

这与 f 可积矛盾。因此必然有 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 。

题目 6.8. 考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{若 } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

对有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一个固定枚举 $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 令

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x - r_n).$$

证明 F 可积, 从而定义 F 的级数在 $\mathbb{R}$ 上 a.e. 收敛。然而, 试观察该级数在每个区间上是无界的, 事实上, 任何与 F a.e. 相等的函数 $\tilde{F}$ 在任何区间内均无界。

解答. 我想证明级数 a.e. 收敛, 只需要证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \int 2^{-n} f(x - r_n)$ 有限就可以。

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \int_{\mathbb{R}} f(x - r_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot 2 = 2 < \infty$$

所以收敛, 所以 F 可积。

设 $I = (a, b)$ 是任一开区间, 由于有理数稠密, 所以存在某个 $r_k \in I$, 且 $(r_k, r_k + \delta) \subset I$, 对任意 $x \in (r_k, r_k + \delta)$,

$$f(x - r_k) = \frac{1}{\sqrt{x - r_k}} > \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

所以

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x - r_n) > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{\delta}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{\delta}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

当 $\delta \rightarrow 0$ 时, $F(x) \rightarrow \infty$, 是无界的。

任意的 $M > 0$, 任意的 $k \in \mathbb{N}$, 存在 δ , 使得 $F(x)$ 在某一个 $(r_k, r_k + \delta)$ 上是大于 M 的。假如 $\tilde{F}$ 与 F 几乎处处相等, 且在某个区间 I 上小于 M , 设 $(r_k, r_k + \delta) \subset I$, 则 F 与 $\tilde{F}$ 在一个长度为 δ 的非零测集上不相等, 也就不是几乎处处相等的, 矛盾。因此不存在这样的 $\tilde{F}$ 。

第七章 第 7 周实分析作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 7.1. 设 $\{f_k\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数列，且 $f_k \xrightarrow{m} f$ 。若存在可积函数 $g(x)$ ，使得

$$|f_k(x)| \leq g(x), \forall k \in \mathbb{N}, \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n,$$

则 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可积，且有

$$\int |f_k - f| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

因此，

$$\int f_k \rightarrow \int f, k \rightarrow \infty.$$

解答. 用反证法，假设 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int |f_k - f| = \varepsilon > 0$. 那么会存在一个子列 $\{f_{k_m}\}$ ，使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int |f_{k_m} - f| = \varepsilon > 0$ ，由于 $\{f_{k_m}\}$ 是原序列的子列，所以仍然依测度收敛于 f ，所以由 Riesz 定理，存在子列的子列 $\{f_{k_{m_j}}\}$ 几乎处处收敛于 f ，由 LDCT，可知

$$\int |f_{k_{m_j}} - f| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

这与之前假设的 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int |f_{k_m} - f| = \varepsilon > 0$ 矛盾，因此假设不成立，所以必然有

$$\int |f_k - f| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

于是因此

$$\int f_k \rightarrow \int f, k \rightarrow \infty.$$

题目 7.2. 设 $\{f_k\}, \{g_k\}$ 为 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的两个实值可测函数列, 对任意 $x \in E$, 任意 $k \in \mathbb{N}$, 有 $|f_k(x)| \leq g_k(x)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = g(x)$ 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx = \int_E g(x) dx < \infty$$

证明: $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx$.

解答. 因为 $\forall k$, $g_k - f_k \geq g_k - |f_k| \geq 0$, 所以 $\{g_k - f_k\}$ 是一个非负可测函数列, 且逐点收敛到 $g - f$, 由 Fatou 引理可得

$$\int_E (g - f) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E (g_k - f_k) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\int_E g_k - \int_E f_k \right).$$

由于 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx = \int_E g(x) dx = M < \infty$, 所以

$$\int_E f \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k.$$

类似地, 考虑函数列 $\{g_k + f_k\}$, 由 Fatou 引理可得

$$\int_E (g + f) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E (g_k + f_k) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\int_E g_k + \int_E f_k \right)$$

化简后有

$$\int_E f \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k.$$

所以就有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k = \int_E f.$$

题目 7.3. 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实值可积函数, 且对任何可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, $\int_E f(x) dx \geq 0$, 证明: $f(x) \geq 0$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$. 此外, 若对任何可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, $\int_E f(x) dx = 0$, 证明: $f(x) = 0$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

解答. (1) 使用反证法. 假设存在一个可测集 $N \subset \mathbb{R}^n$, $m(N) > \varepsilon > 0$, 且 $f(x) < 0, \forall x \in N$. 令

$$N_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) < -\frac{1}{k} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

于是 $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$. 由测度的次可加性,

$$0 < \varepsilon < m(N) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(N_k)$$

所以必然存在某个 k_0 , $m(N_{k_0}) > \varepsilon_0 > 0$, 于是取 $E = N_{k_0}$,

$$\int_E f = \int_{N_{k_0}} f = -\frac{1}{k_0} m(N_{k_0}) = -\frac{\varepsilon_0}{k_0} < 0$$

与题设矛盾! 因此 $f(x) \geq 0$ a.e.

(2) 由于 $\int_E f(x)dx = 0$, 所以 $\int_E -f(x)dx = 0$, 所以可以得到 $f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$ a.e. 所以 $f(x) = 0$ a.e.

题目 7.4. 证明: 若可积函数族 $\{f_k\}$ 在 L^1 范数下收敛 f , 则 $\{f_k\}$ 依测度收敛于 f 。

解答. 因为 $\{f_k\}$ 在 L^1 范数下收敛 f , 所以

$$\int |f_k - f| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

记 $E_k = \{x \in X : |f_k - f| > \frac{1}{k}\}$, 假设 $\{f_k\}$ 不依测度收敛于 f , 即 $m(E_k) > \varepsilon_k > 0$, 那么必然存在一个 k_0 , $m(E_{k_0}) > \varepsilon_{k_0} > 0$, 于是

$$\int |f_k - f| \geq \int_{E_{k_0}} |f_k - f| > \frac{1}{k_0} m(E_{k_0}) > \frac{\varepsilon_{k_0}}{k_0}$$

与 $\int |f_k - f| \rightarrow 0$ 矛盾。所以 $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = 0$, 即 $\{f_k\}$ 依测度收敛于 f 。

题目 7.5. 证明: 存在 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 和可积函数列 $\{f_k\}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{L^1} = 0$, 但不存在 x 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ 。

提示: 在 $\mathbb{R}$ 中, 令 $f_k = \chi_{I_k}$, 其中 $\{I_k\}$ 是一适当选取的区间列且 $m(I_k) \rightarrow 0$ 。

解答. 设有理数集 $\mathbb{Q} = \{q_1, \dots, q_n, \dots\}$, 令 $I_k = (q_k - \frac{1}{k}, q_k + \frac{1}{k})^n$, $m(I_k) = (\frac{2}{k})^n \rightarrow 0$, $f_k = \chi_{I_k}$, $f = 0$, 所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{L^1} = 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int |f_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} m(I_k) = 0$$

但是由于有理数是稠密的, 所以每一个 x 必然会属于某一个 I_k 无数多次, 所以 $f_k(x)$ 会随 k 增大在 0 和 1 两个值振荡, 不存在 x 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ 。

题目 7.6. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 。若 $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ 是 n -元非零实数组, 且

$$f^\delta(x) = f(\delta x) = f(\delta_1 x_1, \dots, \delta_n x_n),$$

证明: $f^\delta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\delta(x) dx = |\delta_1|^{-1} \cdots |\delta_n|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

题目 7.7. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\delta > 0$. 证明: $\lim_{\delta \rightarrow 1} \|f(\delta x) - f(x)\|_{L^1} = 0$.

解答. 先对 $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 证明, 存在 M , 使得 $\text{supp } g \subset \overline{B(0, M)}$, 证明 $\lim_{\delta \rightarrow 1} \|g(\delta x) - g(x)\|_{L^1} = 0$.

由于 g 连续, 所以 g 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续. 于是对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$, 使得当 $|x - y| < \eta$ 时, $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. 当 δ 充分接近于 1 时, 例如取 $\delta < \frac{\eta}{M}$, 这样

$$|\delta x - x| = (\delta - 1)|x| < \eta$$

所以 $|g(\delta x) - g(x)| < \varepsilon$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 1} \|g(\delta x) - g(x)\|_{L^1} &= \lim_{\delta \rightarrow 1} \int |g(\delta x) - g(x)| \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 1} \varepsilon m(\overline{B(0, M)}) = 0 \end{aligned}$$

然后再用具有紧支集的函数逼近 f . 对任意 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 和任意 $\varepsilon > 0$, 存在函数 $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned} \|f(\delta x) - f(x)\|_{L^1} &\leq \|f(\delta x) - g(\delta x)\| + \|g(\delta x) - g(x)\| + \|g(x) - f(x)\| \\ &= (\delta^{-n} + 2)\varepsilon \end{aligned}$$

由于 δ 很接近 1, 所以 $\delta^{-n} + 2$ 是有限的, 于是由 ε 的任意性可得

$$\lim_{\delta \rightarrow 1} \|f(\delta x) - f(x)\|_{L^1} = 0.$$

题目 7.8. (Riemann-Lebesgue 引理)

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 其 Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx,$$

证明 $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

提示: 写为 $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [f(x) - f(x - \xi')] e^{-2\pi i x \xi} dx$, 其中 $\xi' = \frac{1}{2} \frac{\xi}{|\xi|^2}$, 并应用平均连续性.

解答. 令 $y = x - \xi'$, 于是

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(y+\xi')\xi} dy = e^{-\pi i} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i y \xi} dy = -$$

所以

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [f(x) - f(x - \xi')] e^{-2\pi i x \xi} dx$$

于是

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - \xi')| = \frac{1}{2} \|f(x) - f(x - \xi')\|_{L^1}$$

当 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时, $|\xi'| \rightarrow 0$, 所以 $|\hat{f}(\xi)| \rightarrow 0$, 所以 $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

第八章 第 8 周实分析作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

备注 8.1. 题目 9.3 的 (iii) 没想到可以这么做，问的 AI，然后题目 9.8 也是问的 AI.

题目 8.1. 计算 Lebesgue 积分 $I = \int_0^\infty \left(\frac{\arctan z}{z}\right)^2 dz$ 。

解答. 注意到

$$\int_0^1 \frac{1}{1+z^2y^2} dy = \frac{\arctan z}{z}$$

所以

$$\left(\frac{\arctan z}{z}\right)^2 = \left(\int_0^1 \frac{dy}{1+z^2y^2}\right) \left(\int_0^1 \frac{dy}{1+z^2y^2}\right) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dydw}{(1+z^2y^2)(1+z^2w^2)}$$

所以原积分就是

$$I = \int_0^\infty \int_0^1 \int_0^1 \frac{dydw}{(1+z^2y^2)(1+z^2w^2)} dz$$

由 Tonelli 定理，交换积分顺序，

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{dz}{(1+z^2y^2)(1+z^2w^2)} \right) dydw$$

内层积分

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z^2y^2)(1+z^2w^2)} \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{y^2-w^2} \left(\frac{y^2}{1+z^2y^2} - \frac{w^2}{1+z^2w^2} \right) dz \\
 &= \frac{1}{y^2-w^2} \left(y \arctan \frac{z}{y} - w \arctan \frac{z}{w} \right) \Big|_0^\infty \\
 &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{y+w}
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{y+w} dy dw = \frac{\pi}{2} \int_0^1 [\ln(1+w) - \ln w] dw \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \ln 2 = \pi \ln 2
 \end{aligned}$$

题目 8.2. 设 $f \in L^1([0, b])$,

$$g(x) = \int_x^b \frac{f(t)}{t} dt, \quad 0 < x \leq b.$$

证明: $g \in L^1([0, b])$ 且

$$\int_0^b g(x) dx = \int_0^b f(t) dt.$$

解答. $f \in L^1([0, b])$ 满足 Fubini 条件, 可以交换积分顺序, 积分区间为 $0 \leq x \leq b, x \leq t \leq b$, 所以交换积分顺序后

$$\int_0^b g(x) dx = \int_0^b \int_x^b \frac{f(t)}{t} dt dx = \int_0^b \int_0^t \frac{f(t)}{t} dx dt = \int_0^b f(t) dt$$

因此 $g \in L^1([0, b])$, 且 $\int_0^b g(x) dx = \int_0^b f(t) dt$.

题目 8.3. 设 F 为 $\mathbb{R}$ 中的一个闭集且 $m(F^c) < \infty$, 令 $\delta(x) = d(x, F) = \inf\{|x-y| : y \in F\}$ 。考察

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2} dy.$$

- (i) 证明 δ 满足 Lipschitz 条件 $|\delta(x) - \delta(y)| \leq |x - y|$ 。
- (ii) 证明 $\forall x \notin F, I(x) = \infty$ 。
- (iii) 证明 $\forall a.e. x \in F, I(x) < \infty$ 。

解答. (i) 对任意的 $z \in F$,

$$\delta(x) = d(x, F) \leq |x - y| + |y - z|$$

对右边取下确界, 有

$$\delta(x) \leq |x - y| + \delta(y) \implies |\delta(x) - \delta(y)| \leq |x - y|.$$

(ii) 在 F^c 中, 因为 F 是闭集, 所以 F^c 是开集, 所以任意的 $y \in F^c$, 总会存在一个开球 $B(y, r)$, 使得 $B(y, r) \subset F^c$, 所以 $\delta(y) > r$. 令 $|x - y| = \frac{r}{2}$, 则

$$I(x) \geq \int_{F^c} \frac{\delta(y)}{|x - y|^2} dy \geq \int_{-r/2}^{r/2} \frac{r}{\Delta^2} d\Delta = \infty$$

(iii) (这个没想到, 问的 AI) 因为所有被积函数非负, 所以由 Tonelli 定理,

$$\int_F I(x) dx = \int_F \left(\int_{F^c} \frac{\delta(y)}{|x - y|^2} dy \right) dx = \int_{F^c} \delta(y) \left(\int_F \frac{1}{|x - y|^2} dx \right) dy$$

对固定的 $y \in F^c$, 由于 $(y - \delta(y), y + \delta(y))$ 与 F 无交, 因此 $F \subset (-\infty, y - \delta(y)] \cup [y + \delta(y), +\infty)$, 从而对任意 $x \in F$, 有 $|x - y| \geq \delta(y)$, 于是

$$\int_F \frac{1}{|x - y|^2} dx \leq \int_{|x - y| \geq \delta(y)} \frac{1}{|x - y|^2} dx = \frac{2}{\delta(y)}$$

代回得

$$\int_F I(x) dx \leq \int_{F^c} \delta(y) \frac{2}{\delta(y)} dy = 2m(F^c) < \infty$$

因为 $I(x) \geq 0$ 且它在 F 上的积分为有限数, 必有 $I(x) < \infty$ 对几乎处处的 $x \in F$ 成立。
(妙啊 ~)

题目 8.4. 设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$, f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测。证明 Γ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的可测子集且 $m(\Gamma) = 0$ 。

解答. 设 $F(x, y) = f(x) - y$, 由于 y 连续, 所以 y 可测, 所以 $F(x, y)$ 可测, 所以 $\Gamma = F^{-1}(\{0\})$ 作为可测函数的逆像是可测的。

然后定义 x 的截面, $\Gamma_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \Gamma\} = \{f(x)\}$ 是一个单点集, 所以 $m(\Gamma_x) = 0$, 所以

$$m(\Gamma) = \int_{\mathbb{R}^n} m(\Gamma_x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} 0 dx = 0$$

题目 8.5. 举例说明: 存在两个可测集 A 和 B 使 $A+B$ 不可测。

【提示】: 在 $\mathbb{R}^2$ 中取 $A = \{0\} \times [0, 1]$ 和 $B = \mathcal{N} \times \{0\}$ 。

解答. $A = \{(0, y) : y \in [0, 1]\}$, $B = \{(x, 0) : x \in \mathcal{N}\}$, $A+B = \{(x, y) : x \in \mathcal{N}, y \in [0, 1]\}$ 。
假设 $A+B$ 可测, 则其 x 截面

$$(A+B)_x = \begin{cases} [0, 1], & x \in \mathcal{N} \\ \emptyset, & x \notin \mathcal{N} \end{cases}$$

对几乎所有的 x 是一维可测集, 且函数 $x \mapsto m_1((A+B)_x) = \mathbf{1}_{\mathcal{N}}$ 应当是可测的, 这与 $\mathcal{N}$ 不可测矛盾。因此 $A+B$ 是不可测集。

题目 8.6. 设 f 是 $[0, 1]$ 上的有限值可测函数, 且 $|f(x) - f(y)| \in L^1([0, 1] \times [0, 1])$ 。证明: $f \in L^1([0, 1])$ 。

解答. 因为 f 是有限值可测函数, 取 $x_0 \in [0, 1]$, $f(x_0)$ 有限, 因为 $|f(x) - f(y)| \in L^1([0, 1] \times [0, 1])$, 所以由 Tonelli 定理, f^y 可积, 所以

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} |f(x)| dx &\leq \int_{[0,1]} |f(y) - f(x_0)| + |f(x_0)| dy \\ &= \int_{[0,1]} |f(y) - f(x_0)| dy + |f(x_0)| < \infty \end{aligned}$$

所以 $f \in L^1([0, 1])$ 。

题目 8.7. 设 f 和 g 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数。

(i) 证明 $f(x-y)g(y)$ 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上可测。

(ii) 证明: 若 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 。

(iii) 证明若 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 卷积 $f * g$ 是 a.e. 良定的 (即 $\forall$ a.e. $x, f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$)。

(iv) 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 证明 $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, 且当 $f, g \geq 0$ 时等式成立。

(v) 证明 Fourier 变换 $\hat{f}$ 有界且连续, 对每个 ξ 有

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).$$

解答. (i) 令 $\varphi : (x, y) \mapsto x - y$, $\psi : (x, y) \mapsto y$, φ, ψ 都是连续函数, 将 f, g 看做

$\mathbb{R}^{2n}$ 上可测函数 (没有的变量用 0 补), 可测函数与连续函数的复合也是连续函数, 所以 $f(x-y) = f(\varphi(x, y))$ 是可测函数, $g(y)$ 是可测函数, 可测函数的乘积也是可测函数.

(ii) 因为 f, g 分别可积, 所以 $\|f\|, \|g\|$ 有限. 因为 $|f(x-y)g(y)|$ 非负可测, 所以由 Tonelli 定理,

$$\int |f(x-y)g(y)| dx dy = \int \left(\int |f(x-y)g(y)| dx \right) dy = \left(\int |g(y)| dy \right) \left(\int |f(x)| dx \right) < \infty$$

所以 $f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$.

(iii) 由 (ii), 积分为有限数, 因为 $|f(x-y)g(y)|$ 非负, 所以几乎处处 $x, \int |f(x-y)g(y)| dy < \infty$, 这就说明卷积良定.

(iv)

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int |f * g| dx \leq \int \int |f(x-y)g(y)| dy dx \leq \left(\int |g(y)| dy \right) \left(\int |f(x)| dx \right) = \|f\| \|g\|.$$

(v)

$$|\hat{f}| = \left| \int f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right| \leq \int |f(x)| dx$$

所以 $\hat{f}$ 有界. 由于对任意的 $x, f(x) e^{-2\pi i x \xi} \rightarrow f(x) e^{-2\pi i x \xi_0}$ 当 $\xi \rightarrow \xi_0$. 所以由控制收敛定理得到 $\hat{f}(\xi) \rightarrow \hat{f}(\xi_0)$ 当 $\xi \rightarrow \xi_0$.

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int f * g(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int \left(\int f(x-y)g(y) dy \right) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \left[\int f(x-y) e^{-2\pi i (x-y)\xi} d(x-y) \right] \left[\int g(y) e^{-2\pi i y \xi} dy \right] \\ &= \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

题目 8.8. 证明: 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $f \neq 0$, 则对某个 $c > 0$ 和所有 $|x| \geq 1$, 有

$$f^*(x) \geq \frac{c}{|x|^n}.$$

由此得出 $f^* \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. 然后, 当 $\int |f| = 1$ 时, 证明弱型估计

$$m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{c}{\alpha}, \quad \forall \alpha > 0$$

在以下意义下是最好的: 若 f 支撑在单位球上且 $\int |f| = 1$, 则对某个 $c' > 0$ 及所有充分小的 $\alpha > 0$ 有

$$m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \geq \frac{c'}{\alpha}.$$

【提示】：对第一部分，利用对某个球 B 有 $\int_B |f| > 0$ 这一事实。

解答. 因为 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \neq 0$, 所以

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy > 0.$$

把 $\mathbb{R}^n$ 写成 $\bigcup_{R=1}^{\infty} B(0, R)$, 由单调收敛定理可知, 存在某个 $R > 0$, 使得

$$A := \int_{B(0, R)} |f(y)| dy > 0$$

现在任意取 $|x| \geq 1$, 我们考虑以 x 为中心、半径为 $|x| + R$ 的球 $B(x, |x| + R)$, 若 $y \in B(0, R)$, 则

$$|y - x| \leq |x| + |y| < R + |x|$$

因此

$$B(0, R) \subset B(x, |x| + R)$$

于是由极大函数定义,

$$f^*(x) \geq \frac{1}{|B(x, |x| + R)|} \int_{B(x, |x| + R)} |f(y)| dy \geq \frac{1}{|B(x, |x| + R)|} \int_{B(0, R)} |f(y)| dy$$

又因为

$$|B(x, |x| + R)| = |B(0, 1)| (|x| + R)^n$$

因此

$$f^*(x) \geq \frac{A}{|B(0, 1)| (|x| + R)^n} \geq \frac{A}{|B(0, 1)| (1 + R)^n} \frac{1}{|x|^n} =: \frac{c}{|x|^n}$$

由这个结论,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^*(x) dx \geq \int_{|x| \geq 1} f^*(x) dx \geq c \int_{|x| \geq 1} \frac{dx}{|x|^n}$$

用极坐标变换, 令 $\omega = |B(0, 1)|$, 则

$$\int_{|x| \geq 1} \frac{dx}{|x|^n} = \int_1^{\infty} \frac{1}{r^n} n\omega r^{n-1} dr = n\omega \int_1^{\infty} \frac{dr}{r} = \infty$$

因此 $f^* \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

然后证明弱型估计在阶数上是最好的。

假设 $\text{supp } f \subset B(0, 1)$, $\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy = 1$ 。由之前的分析可知,

$$f^*(x) \geq \frac{1}{\omega_n (|x| + 1)^n}$$

当 $|x| \geq 1$ 时, $|x| + 1 \leq 2|x|$, 于是

$$f^*(x) \geq \frac{1}{\omega_n 2^n |x|^n} =: \frac{a}{\omega_n 2^n}$$

因此, 如果 $1 \leq |x| < \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{1/n}$, 那么 $\frac{a}{|x|^n} > \alpha$, 从而 $f^*(x) > \alpha$. 所以

$$m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \geq m\left(\left\{x : 1 \leq |x| \leq \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{1/n}\right\}\right) = \omega_n \left(\frac{a}{\alpha} - 1\right)$$

当 $\alpha \leq \frac{a}{2}$ 时, 有 $\frac{a}{\alpha} - 1 \geq \frac{a}{2\alpha}$, 所以 $m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \geq \omega_n \frac{a}{2\alpha}$. 令 $c' := \frac{\omega_n a}{2}$, 于是得到

$$m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \geq \frac{c'}{\alpha}$$

对所有充分小的 $\alpha > 0$ 成立, 这说明弱型估计中的 α^{-1} 的阶数不能改进。

题目 8.9. 考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|(\ln 1/|x|)^2}, & \text{当 } |x| \leq 1/2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(i) 证明: $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(ii) 建立不等式: 对某个 $c > 0$ 和所有 $|x| \leq \frac{1}{2}$,

$$f^*(x) \geq \frac{c}{|x|(\ln 1/|x|)},$$

以此证明极大函数 f^* 不是局部可积的.

解答. (i) 函数 $f(x)$ 是偶函数, 所以

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = 2 \int_0^{1/2} \frac{dx}{x (\ln \frac{1}{x})^2}.$$

令 $u = \ln \frac{1}{x}$, 则 $du = -\frac{1}{x} dx$, $x = e^{-u}$, 代入得

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = 2 \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{2}{\ln 2} < \infty$$

所以 $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(ii) 由于是偶函数, 所以可以只研究 $x > 0$ 的情形。

$$f^*(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y)| dy = \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} \frac{1}{|y|(\ln 1/|y|)^2} dy$$

因为要得到下界, 所以只需要随便取一个 r , 不妨设 $r = x$, 那么

$$f^*(x) \geq \frac{1}{2x} \int_0^{2x} \frac{1}{y(\ln \frac{1}{y})^2} dy$$

令 $v = \ln \frac{1}{y}$, 则

$$f^*(x) \geq -\frac{1}{2x} \int_{\infty}^{-\ln(2x)} \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{2x \ln(\frac{1}{2x})}.$$

接下来只要找到一个 c , 使得

$$\frac{1}{2x \ln(\frac{1}{2x})} \geq \frac{c}{x(\ln \frac{1}{x})} \iff \ln x \leq 2c \ln 2x \iff c \leq \frac{\ln x}{2 \ln 2x}$$

令 $g(x) = \frac{\ln x}{2 \ln 2x}$, $g'(x) = \frac{\ln(2x) - \ln(x)}{2x \ln^2(2x)} > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 处单调递增。由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{2 \ln 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x \cdot \frac{1}{2x}} = 1$$

所以可以取 $c = \frac{1}{2}$, 这样,

$$f^*(x) \geq \frac{c}{|x|(\ln 1/|x|)},$$

从而

$$\int |f^*| \geq 2 \int_0^{1/2} \frac{dx}{2|x|(\ln 1/|x|)} = 2 \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u} = \infty$$

所以极大函数 f^* 不是局部可积的.

第九章 第 9 周实分析作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

题目 9.1. 圆盘上的 Poisson 核

$$\frac{1}{2\pi}P_r(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2}, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi, \end{cases}$$

其中 $0 < r < 1$, 取 $\delta = 1 - r$, 证明 $\{K_\delta := \frac{1}{2\pi}P_{1-\delta}\}_{0 < \delta < 1}$ 是恒等逼近.

解答. 先验证归一化条件。

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} K_\delta(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} dx \\ &= \frac{1-r^2}{2\pi r} \int_0^\pi \frac{1}{\frac{1+r^2}{2r} - \cos x} dx \end{aligned}$$

现在计算

$$\int_0^\pi \frac{1}{a - \cos x} dx = \int_0^\pi \frac{1}{a - \frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}} dx$$

令 $t = \tan \frac{x}{2}$, 于是 $dt = \frac{1+t^2}{2} dx$, 代入

$$= \int_0^\infty \frac{1+t^2}{a+at^2-1+t^2} \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^\infty \frac{2}{a-1+(a+1)t^2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

所以原积分为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} K_{\delta}(x) dx &= \frac{1-r^2}{2\pi r} \int_0^{\pi} \frac{1}{\frac{1+r^2}{2r} - \cos x} dx \\ &= \frac{1-r^2}{2\pi r} \frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{1+r^2}{2r}\right)^2 - 1}} \\ &= 1\end{aligned}$$

然后验证 $|K_{\delta}(x)| \leq \frac{A}{\delta}$.

当 $|x| \leq \pi$ 时, 因为 $K_{\delta}(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$, 所以

$$|K_{\delta}(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{(1-r)^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{1+r}{\delta} < \frac{1}{\pi} \frac{1}{\delta}$$

当 $|x| > \pi$ 时, $K_{\delta}(x) = 0$, 所以也成立。

最后验证衰减估计 $|K_{\delta}(x)| \leq \frac{A\delta}{|x|^2}$.

当 $|x| > \pi$ 时, $K_{\delta}(x) = 0$, 所以成立。

当 $|x| \leq \pi$ 时, 使用估计 $1 - \cos x \geq \frac{2}{\pi^2} x^2$, 于是

$$1 - 2r\cos x + r^2 \geq 2r(1 - \cos x) \geq \frac{4r}{\pi^2} x^2$$

于是

$$|K_{\delta}(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{(1+r)\delta}{\frac{4r}{\pi^2} x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1+r}{4r} \frac{\delta}{x^2}$$

当 $r > \frac{1}{2} > 0$ 时, $\frac{\pi}{2} \frac{1+r}{4r}$ 有界, 满足上述估计。

当 $\frac{1}{2} > r > 0$ 时, 也就是 $\frac{1}{2} < \delta < 1$ 由第二步, 得到

$$|K_{\delta}(x)| \leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{\delta} < \frac{2}{\pi} < A \frac{1}{2\pi^2} < \frac{A\delta}{|x|^2}$$

所以衰减估计也成立。因此是一个恒等逼近。

题目 9.2. $\mathbb{R}$ 上的 Fejér 核为

$$\frac{1}{2\pi} F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi, \end{cases}$$

其中 $N \in \mathbb{N}$. 令 $\delta = \frac{1}{N}$, 证明: $\{K_{\delta} := \frac{1}{2\pi} F_{1/\delta}\}$ 是恒等逼近。

解答. 验证归一化条件 $\int_{\mathbb{R}} K_{\delta} dx = 1$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} K_{\delta} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi N} \frac{1 - \cos Nx}{1 - \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx + 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx \\ &= 1\end{aligned}$$

验证高度估计 $|K_{\delta}(x)| \leq \frac{A}{\delta}$:

当 $|x| > \pi$ 时, $K_{\delta}(x) = 0$, 所以成立。

当 $|x| \leq \pi$ 时,

$$|K_{\delta}(x)| = \frac{\delta}{2\pi} \left| \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2\delta}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right| \leq \frac{\delta}{2\pi} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2\delta}\right)^2}{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} \leq \frac{\pi}{8\delta}$$

验证衰减估计: $|K_{\delta}(x)| \leq \frac{A\delta}{x^2}$:

当 $|x| > \pi$ 时, $K_{\delta}(x) = 0$, 所以成立。

当 $|x| \leq \pi$ 时,

$$|K_{\delta}(x)| = \frac{\delta}{2\pi} \left| \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2\delta}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \right| \leq \frac{\delta}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} \leq \frac{\delta\pi}{2x^2}$$

综上, 三个条件都成立, 因此 $\{K_{\delta} := \frac{1}{2\pi} F_{1/\delta}\}$ 是恒等逼近。

题目 9.3. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\{K_{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ 为恒等逼近, 证明: 存在 $c > 0$, 使得

$$\sup_{\varepsilon>0} |(f * K_{\varepsilon})(x)| \leq cf^*(x).$$

解答.

$$|(f * K_{\varepsilon})(x)| = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |K_{\varepsilon}(y)| dy$$

把积分区域分割,

$$\mathbb{R}^n = \{|y| < \varepsilon\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \{2^k \varepsilon < |y| < 2^{k+1} \varepsilon\}$$

记 $\omega_n = m(B(0, 1))$, 于是 $m(B(0, r)) = \omega_n r^n$.

先估计 $\{|y| < \varepsilon\}$ 上的部分。由于 $|K_\varepsilon(y)| \leq A\varepsilon^{-n}$, 所以

$$\begin{aligned} \int_{|y|<\varepsilon} |f(x-y)| |K_\varepsilon(y)| dy &\leq \frac{A}{\varepsilon^n} \int_{|y|<\varepsilon} |f(x-y)| dy \\ &= \frac{A}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} |f(z)| dz \\ &\leq A\omega_n f^*(x). \end{aligned}$$

再估计第 k 个环带 $E_k = \{y : 2^k\varepsilon \leq |y| \leq 2^{k+1}\varepsilon\}$, 当 $y \in E_k$ 时, $|y| \geq 2^k\varepsilon$. 由恒等逼近的远处衰减估计,

$$|K_\varepsilon(y)| \leq A \frac{\varepsilon}{|y|^{n+1}} \leq A \frac{\varepsilon}{(2^k\varepsilon)^{n+1}}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{E_k} |f(x-y)| |K_\varepsilon(y)| dy &\leq A \frac{\varepsilon}{(2^k\varepsilon)^{n+1}} \int_{E_k} |f(x-y)| dy \\ &\leq A \frac{\varepsilon}{(2^k\varepsilon)^{n+1}} \int_{B(0,2^{k+1}\varepsilon)} |f(x-y)| dy \\ &\leq A \frac{\varepsilon}{(2^k\varepsilon)^{n+1}} \omega_n (2^{k+1}\varepsilon)^n f^*(x) \\ &= A\omega_n 2^{n-k} f^*(x) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} |(f * K_\varepsilon)(x)| &= \int_{|y|<\varepsilon} |f(x-y)| |K_\varepsilon(y)| dy + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x-y)| |K_\varepsilon(y)| dy \\ &\leq A\omega_n f^*(x) + A\omega_n f^*(x) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{n-k} \\ &= (1 + 2^{n+1}) A\omega_n f^*(x) \end{aligned}$$

所以只要取 $c = (1 + 2^{n+1}) A\omega_n$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 都有

$$|(f * K_\varepsilon)(x)| \leq c f^*(x).$$

于是取上确界, 得到

$$\sup_{\varepsilon>0} |(f * K_\varepsilon)(x)| \leq c f^*(x).$$

第十章 第 10 周实分析作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

题目 10.1. 设 $F \subset \mathbb{R}$ 为闭集, $\delta(x) = d(x, F) = \inf\{|x - y| : y \in F\}$. 显然当 $x \in F$ 时有 $\delta(x + y) \leq |y|$. 证明更精确的估计:

$$\delta(x + y) = o(|y|), \quad \forall \text{ a.e. } x \in F,$$

即对 a.e. $x \in F$, $\lim_{|y| \rightarrow 0} \delta(x + y)/|y| \rightarrow 0$.

解答. 根据 Lebesgue 密度定理, 几乎每个点 $x \in F$ 都是 F 的密集点, 也就是

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m((x - r, x + r) \cap F)}{2r} = 1$$

下面证明对所有的密集点, 结论成立。

令 $A_\varepsilon = \left\{x : \frac{\delta(x+y)}{|y|} > \varepsilon\right\}$, 任取 $x \in A_\varepsilon$, 存在 $y_n \rightarrow 0$ 使得 $\delta(x + y_n) \geq \varepsilon |y_n|$ 。因为 $x \in F$, 所以区间

$$I_n = (x + y_n - \varepsilon y_n, x + y_n + \varepsilon y_n)$$

不含 F 的点。因为 $\varepsilon < 1$, 所以 $I_n \subset (x, x + (1 + \varepsilon)y_n)$, 由 Lebesgue 密度定理,

$$\lim_{y_n \rightarrow 0} \frac{m((x, x + (1 + \varepsilon)y_n) \cap F)}{(1 + \varepsilon)y_n} < \frac{(1 - \varepsilon)y_n}{(1 + \varepsilon)y_n} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} < 1$$

这表明任意的 $x \in A_\varepsilon$, x 不是密集点。所以 $m(A_\varepsilon)$ 是零测集, 也就是对几乎处处的 $x \in F$, $\lim_{|y| \rightarrow 0} \delta(x + y)/|y| \rightarrow 0$.

题目 10.2. 设 $a, b > 0$. 令

$$F(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x^b}\right), & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

(i) 证明: $F \in \text{BV}([0, 1]) \iff a > b$.

(ii) 取 $a = b$, 对每个 $\alpha \in (0, 1)$, 构造一个函数 f 满足条件 $|f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\alpha$, 但 $f \notin \text{BV}([0, 1])$.

提示: 对 (ii), 若 $h > 0$, 则 $|f(x+h) - f(x)|$ 被 $C(x+h)^\alpha$ 或者由中值定理被 $C'h/x$ 控制. 然后, 考虑两种情形: $x^{a+1} \geq h$ 或 $x^{a+1} < h$, 找出 α 与 a 的联系.

解答. (i) “ $\implies$ ”: 假设 $a \leq b$, 取分割 $\mathcal{P}: 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$, 定义为

$$t_k = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + (N-k)\pi} \right)^{1/b}$$

F 在这个分割 $\mathcal{P}$ 下定义的变差为

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{P}}(F) &= \sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^N \left| \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + (N-k)\pi} \right)^{a/b} \sin \left(\frac{\pi}{2} + (N-k)\pi \right) - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + (N-k+1)\pi} \right)^{a/b} \sin \left(\frac{\pi}{2} + (N-k+1)\pi \right) \right| \\ &= \sum_{k=1}^N \left| \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + (N-k)\pi} \right)^{a/b} + \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + (N-k+1)\pi} \right)^{a/b} \right| \end{aligned}$$

所以 $a \leq b \implies$ 级数不收敛 $\implies F \notin \text{BV}([0, 1])$, 矛盾!

“ $\impliedby$ ”: 当 $a > b$ 时,

$$|F'(x)| = |ax^{a-1} \sin(x^{-b}) - bx^{a-b-1} \cos(x^{-b})| \leq ax^{a-1} + bx^{a-b-1}.$$

从而

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{P}}(F) &= \sum_{k=1}^N |F(t_k) - F(t_{k-1})| \\ &\leq \sum_{k=1}^N |F'(x)| |t_k - t_{k-1}| \\ &\leq N |F'(x)| < \infty \end{aligned}$$

所以 $F \in \text{BV}([0, 1])$.

(ii) $a = b$, $F \notin \text{BV}([0, 1])$, $F(x) = x^a \sin(x^{-a})$,

$$\begin{aligned} |F'(x)| &= |ax^{a-1} \sin(x^{-a}) - ax^{-1} \cos(x^{-a})| \\ &= a \frac{1}{x} \left| x^a \sin\left(\frac{1}{x^a}\right) - \cos\left(\frac{1}{x^a}\right) \right| \\ &\leq a \frac{1}{x} \sqrt{1 + x^{2a}} \\ &\leq \frac{a}{x} \end{aligned}$$

当 $x^{a+1} \geq h$ 时,

$$|F(x+h) - F(x)| = F'(\theta)h \leq Ch^{a/(a+1)}$$

当 $x^{a+1} < h$ 时,

$$|F(x+h) - F(x)| \leq |F(x+h)| + |F(x)| \leq (x+h)^a + x^a < Ch^{a/(a+1)}$$

因此, 取 $a = \frac{\alpha}{1-\alpha}$, 函数 $F(x) = x^a \sin(x^{-a})$ 就满足

$$|F(x) - F(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

同时他也不属于 $\text{BV}([0, 1])$.

题目 10.3. 考察函数

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x^{-2}), & 0 < |x| \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

证明: 对每个 $x \in [-1, 1]$, $F'(x)$ 存在, 但 $F' \notin L^1([-1, 1])$.

解答. 当 $x = 0$ 时

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h^2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h^2} = 0$$

当 $x \neq 0$ 时, 求导可得

$$F'(x) = x \sin(x^{-2}) - ax^{-1} \cos(x^{-2})$$

没有没有定义的点。所以每个 $x \in [-1, 1]$, $F'(x)$ 存在。

看积分 $\int_0^1 \left| \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| dx$, 令 $y = \frac{1}{x}$, 则 $dy = -y^2 dx$, 所以

$$= \int_\infty^1 \left| y \cos y^2 \frac{1}{-y^2} \right| dy = \int_1^\infty \left| \frac{1}{y} \cos y^2 \right| dy = \frac{1}{2} \int_1^\infty \left| \frac{\cos u}{u} \right| du$$

对每个足够大的整数 k , 在区间 $[2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}]$ 上有 $|\cos u| \geq \frac{1}{2}$, 所以

$$\frac{1}{2} \int_1^\infty \left| \frac{\cos u}{u} \right| du \geq \sum_{k \geq k_0} \int_{I_k} \frac{1}{2} \frac{1}{Ck} du = C \sum_{k \geq k_0} \frac{1}{k} = \infty$$

所以 $F' \notin L^1([-1, 1])$ 。

题目 10.4. 若 F 在 $\mathbb{R}$ 的任何有限子区间 $[a, b]$ 上是有界变差的, 且 $\sup_{a,b} T_F(a, b) < \infty$, 则称 F 在 $\mathbb{R}$ 上是有界变差的. 证明这样的函数具有下列性质:

(i) 存在某个常数 $A > 0$, 使得对所有 $h \in \mathbb{R}$ 成立:

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)| dx \leq A|h|.$$

(ii) 对所有 $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$ 且 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \leq 1$, 成立:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} F(x) \varphi'(x) dx \right| \leq A.$$

提示: 对 (i), $F = F_1 - F_2$, 其中 F_j 单调有界. 对 (ii), 使用 (i).

解答. (i) 利用 Jordan 分解, 将 F 分解为 $F_1 - F_2$, 其中 F_1, F_2 都是单调递增且有界的. 所以

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}} |(F_1(x+h) - F_1(x)) - (F_2(x+h) - F_2(x))| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} F_1(x+h) - F_1(x) dx + \int_{\mathbb{R}} F_2(x+h) - F_2(x) dx \end{aligned}$$

只看 F_1 就行, F_2 一样, 将 $\mathbb{R}$ 分解为 $\bigcup_{n=1}^\infty (-n, n)$, 而

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{-n}^n F_1(x+h) - F_1(x) dx &= \int_{-n}^n F_1(x+h) dx - \int_{-n}^n F_1(x) dx \\ &= \int_{-n+h}^{n+h} F_1(x) dx - \int_{-n}^n F_1(x) dx \\ &= \frac{1}{h} \int_n^{n+h} F_1(x) dx - \frac{1}{h} \int_{-n}^{-n+h} F_1(x) dx \\ &= F_1(n) - F_1(-n) \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 可知

$$\frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} |F_1(x+h) - F_1(x)| dx = F_1(\infty) - F_1(-\infty) := B_1$$

是有界的。从而存在某个常数 $A = B_1 + B_2$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)| dx \leq A|h|.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} F(x) \varphi'(x) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} F(x) \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} F(y-h) \frac{\varphi(y)}{h} dy - \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} F(x) \frac{\varphi(x)}{h} dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{h} (F(x-h) - F(x)) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} F(x) \varphi'(x) dx \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{h} (F(x-h) - F(x)) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|h|} |F(x-h) - F(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{|h|} \cdot A|h| = A \end{aligned}$$

题目 10.5. 设 F 为 $[a, b]$ 上的实值递增连续函数, 证明函数 $D_-F(x)$ 可测.

解答.

$$D_-(F)(x) = \liminf_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

首先说明 $D_-F(x)$ 存在。

因为 F 在闭区间上连续, 所以一致连续并且有界。固定 $\gamma > 0$, 令

$$E_\gamma = \{x : D_-(F)(x) > \gamma\}$$

有 F 的可测性可知 E_γ 是可测的。令 $G(x) = F(x) - \gamma x$, 这样, 如果 $x \in E_\gamma$, 那么

$$F(x+h) - F(x) > \gamma h \implies G(x+h) > G(x)$$

由旭日引理, E_γ 会被某些开区间 (a_k, b_k) 覆盖, 且

$$F(b_k) - F(a_k) \geq \gamma(b_k - a_k)$$

于是

$$m(E_\gamma) \leq \sum_k (b_k - a_k) \leq \frac{1}{\gamma} \sum_k [F(b_k) - F(a_k)] \leq \frac{F(b) - F(a)}{\gamma}$$

因此, 当 $\gamma \rightarrow \infty$ 时, $m(E_\gamma) \rightarrow 0$, 这样就得到了 $D_-F(x) < \infty$ 几乎处处成立。

然后说明可测。令 $h = -\frac{1}{n}$, 于是

$$D_-(F)(x) = \liminf_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[F(x) - F\left(x - \frac{1}{n}\right) \right]$$

所以 $D_-F(x)$ 是可测函数列的极限, 所以也可测。

题目 10.6. 设 $F \in C([a, b])$, 对每个 $x \in [a, b]$ 有 $(D^+F)(x) \geq 0$. 证明: F 在 $[a, b]$ 上递增.

解答. (这个不会, 问的 AI, 我本来想分开 $>0, =0$ 讨论, AI 说不对, 最标准的做法得用最大值反证法) 任取 $\varepsilon > 0$, 定义 $G_\varepsilon(x) = F(x) + \varepsilon x$, 这样,

$$D^+G_\varepsilon(x) = D^+F(x) + \varepsilon \geq \varepsilon > 0$$

下面证明 G_ε 在 $[a, b]$ 上递增。假设不这样, 就会存在 $s < t$, 使得 $G_\varepsilon(s) > G_\varepsilon(t)$, 由于 G_ε 连续, 所以在闭区间 $[s, t]$ 上能取到极大值 M , 取

$$c = \max \{u \in [s, t] : G_\varepsilon(u) = M\}.$$

则 $c < t$. 并且对所有足够小的 $h > 0$, 有 $c + h \in [c, t]$ 。因此, 在 c 点,

$$D^+G_\varepsilon(c) \leq 0$$

矛盾! 所以 G_ε 必须递增。令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 就可以得到 $F(s) \leq F(t)$, 从而 F 在 $[a, b]$ 上递增。

第十一章 第 11 周实分析作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

题目 11.1. 设 F_n 为 Cantor-Lebesgue 函数定义中的函数列，证明： $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛，且极限函数 $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$ 属于 $C([0, 1])$ 。

解答. 由 F_n 定义可知，

$$\sup_{x \in [0, 1]} |F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq 2^{-n}$$

对于任意的 m, n ，由三角不等式可得

$$|F_m(x) - F_n(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |F_{k+1} - F_k| = \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k} \leq 2^{-n}$$

对 $x \in [0, 1]$ 取上确界，有

$$\sup_{x \in [0, 1]} |F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq 2^{-n} \rightarrow 0$$

所以 $\{F_n\}$ 一致收敛。由于每个 F_n 都是连续的，所以极限函数也是连续的。

题目 11.2. 设 F 为 Cantor-Lebesgue 函数。考察由 $x(t) = t, y(t) = F(t), 0 \leq t \leq 1$ 参数化的曲线。证明：对应 $0 \leq t \leq \bar{x}$ 的曲线段的长度为 $L(\bar{x}) = \bar{x} + F(\bar{x})$ ，曲线的全长为 2。

解答. 曲线段长度定义为

$$L(\bar{x}) = \sup_P \sum_{j=1}^m |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

其中 $P: 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \bar{x}$ 取遍所有分割。

因为 F 递增, 所以

$$|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = \sqrt{(t_j - t_{j-1})^2 + (F(t_j) - F(t_{j-1}))^2} \leq (t_j - t_{j-1}) + (F_j - F_{j-1})$$

所以

$$\sum_{j=1}^m |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \leq \bar{x} + F(\bar{x}) \implies L(\bar{x}) \leq \bar{x} + F(\bar{x}).$$

然后证明反向不等式. 取 P 的各个端点为 $C_n \cap [0, \bar{x}]$ 的各个端点. $[0, \bar{x}] \setminus C_n$ 的部分, 这部分贡献为

$$m([0, \bar{x}] \setminus C_n) \geq \bar{x} - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

对于 $[0, \bar{x}] \cap C_n$ 的部分, 这部分斜线上升, 纵向增量要大于 $F(\bar{x})$, 所以该分割对应的曲线长度至少为 $\bar{x} - \left(\frac{2}{3}\right)^n + F(\bar{x})$, 因此令 $n \rightarrow \infty$, 就可以得到

$$L(\bar{x}) \geq \bar{x} + F(\bar{x})$$

从而 $L(\bar{x}) = \bar{x} + F(\bar{x})$.

再令 $\bar{x} = 1$, 就可以得到曲线全长为

$$L(1) = 1 + F(1) = 2.$$

题目 11.3. 直接用定义证明 Cantor-Lebesgue 函数不是绝对连续的。

解答. 考虑第 n 个 C-L 函数 F_n , 取长度为 $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 的小区间, 这样的小区间一共有 3^n 个, F_n 在这些区间上是单调递增的. 由于这些小区间的长度的和是 1, 所以可以从尾项中选取有限个区间, 小于 δ , 但是 F 在这些的增量并不会任意小.

具体来说, 存在 M, N , 使得 $(N - M) \cdot 3^{-n}$ 小于 δ , 但是

$$\sum_{k=M}^N |F(b_k) - F(a_k)| > \frac{N - M}{2^{-n}}$$

题目 11.4. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. 若对任意的有限区间 $[a, b]$, 总有 $f\chi_{[a,b]}$ 绝对连续, 则称 f 绝对连续. 证明:

- (i) f 映零测集到零测集.
- (ii) f 映可测集到可测集.

解答. (i) 设 E 是零测集, 定义 $E_n = E \cap [-n, n]$, 然后只需要验证 $f(E_n)$ 是零测集就

可以。因为 $f \in AC(E_n)$, 所以 $f' \in L^1(E_n)$, 所以

$$m^*(f(E_n)) = \int_{E_n} |f'(x)| dx.$$

因为 E_n 是零测集, 所以存在开集 $G \subset I$, 使得 $E_n \subset G, m(G) < \delta$. 所以

$$m^*(f(E_n)) = \int_{E_n} |f'(x)| dx \leq \int_G |f'(x)| dx < \varepsilon$$

由于 ε 任意, 得到

$$m^*(f(E_n)) = 0 \implies m^*(f(E)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(f(E_n)) = 0$$

所以 $f(E)$ 也是零测集, 所以 f 把零测集映到零测集。

(ii) 设 $E \subset \mathbb{R}$ 可测, 令 $E_n = E \cap [-n, n]$. 因为 E_n 是有限测度的可测集, 所以存在 Borel 集 $F_n \subset E_n$, 使得 $m(E_n \setminus F_n) = 0$. 令 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 则 $m(E \setminus F) = 0$, 由绝对连续函数把零测集映到零测集, 所以 $f(E \setminus F)$ 是零测集。

另一方面。由于 F 是 Borel 集, f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 所以 $f(F)$ 是可测集。于是

$$f(E) = f(F) \cup f(E \setminus F)$$

是可测集。

题目 11.5. 设 $F \in C([a, b])$, 对每个 $x \in (a, b)$, $F'(x)$ 存在且 $|F'(x)| \leq M$. 证明: $|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$ 且 $F \in AC([a, b])$ 。

解答. 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (x, y)$,

$$F(y) - F(x) = F'(\xi)(y - x)$$

于是

$$|F(y) - F(x)| = |F'(\xi)||y - x| \leq M|y - x|.$$

然后对任意有限个两两不交的区间 $(\alpha_k, \beta_k) \subset [a, b]$, 若

$$\sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) < \delta,$$

则

$$\sum_{k=1}^n |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| \leq M \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) < M\delta = \varepsilon.$$

所以 $F \in AC([a, b])$.

题目 11.6. 设 $F \in BV([a, b])$, 证明:

$$(i) \int_a^b |F'(x)| dx \leq T_F(a, b).$$

$$(ii) \int_a^b |F'(x)| dx = T_F(a, b) \text{ 当且仅当 } F \in AC([a, b]).$$

解答. (i) 取分割 $P: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = b$,

$$\begin{aligned} \int_a^b |F'(x)| dx &= \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |F'(\xi_k)| (t_{k+1} - t_k) \\ &= \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |F(t_{k+1}) - F(t_k)| \\ &\leq T_F(a, b) \end{aligned}$$

(ii) “ $\implies$ ”: 因为 $T_F(a, b)$ 有界, 所以 $F'(x)$ 可积, 所以存在 $F \in AC([a, b])$ 。

“ $\impliedby$ ”: 因为

$$\int_a^b |F'(x)| dx \leq \sum_{k=1}^n |F'(\xi_k)| (t_{k+1} - t_k) = \sum_{k=1}^n |F(t_{k+1}) - F(t_k)|$$

取上确界, 可得

$$T_F(a, b) \leq \int_a^b |F'(x)| dx$$

结合 (i) 中的反向不等式, 于是

$$\int_a^b |F'(x)| dx = T_F(a, b).$$

题目 11.7. 设 F 是 $[a, b]$ 上的单调连续函数。证明: $F \in AC([a, b])$ 当且仅当 $\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$ 。

解答. “ $\implies$ ”: 由 Lebesgue 积分的微积分基本定理, $F \in AC([a, b])$ 则

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

“ $\impliedby$ ”: 假设积分成立。定义

$$G(x) = F(x) - \int_a^x F'(t) dt$$

任取 $a \leq s < t \leq b$ 有

$$\begin{aligned} G(t) - G(s) &= F(t) - F(s) - \int_s^t F'(x) dx \\ &\geq F(t) - F(s) - (F(t) - F(s)) = 0 \end{aligned}$$

所以 G 单调递增。又因为 $G(a) = F(a)$,

$$G(b) = F(b) - \int_a^b F'(t) dt = F(a)$$

所以 $G(x) \equiv a$. 也就是说,

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt$$

由于 $F' \in L^1([a, b])$, 所以 $F(x)$ 是绝对连续函数。

题目 11.8. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. 证明: f 对某个 M 及所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 满足 Lipschitz 条件

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

当且仅当 f 绝对连续且 $|f'(x)| \leq M$ a.e.

解答. “ $\implies$ ”: 任意的开区间族 (a_k, b_k) 满足 $\sum_{k=1}^n (a_k, b_k) < \delta$, 那么

$$\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| \leq M \sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < M\delta < \varepsilon$$

所以 f 绝对连续。从而导数几乎处处存在。

由拉格朗日中值定理可得 $|f'(x)| \leq M$ a.e.

“ $\impliedby$ ”: 因为 f 绝对连续, 所以 f' 几乎处处存在, 由拉格朗日中值定理可得

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |y - x| \leq M|x - y|$$

题目 11.9. 设 $F \in AC([a, b])$ 递增。令 $A = F(a), B = F(b)$. 证明:

(i) 存在这样的函数 F 且是严格递增的, 但在一个正测度集上 $F'(x) = 0$.

(ii) 能够选取到 (i) 中的 F , 使得: 存在零测集 $E \subset [A, B]$, 使 $F^{-1}(E)$ 不可测。

(iii) 对任意递增绝对连续函数 F 和可测子集 $E \subset [A, B]$, $F^{-1}(E) \cap \{F'(x) > 0\}$ 可测。

提示: 令 $F(x) = \int_a^x \chi_K(t) dt$, 其中 K 为正测度类 Cantor 集 C 的补集。参见习题 4.9。

解答. (i) 令 $F(x) = \int_a^x \chi_K(t) dt$, 其中 K 为 $[a, b]$ 上按相同的定义定义康托尔集 C . 递增是显然的. 但是 $F'(x) = \chi_K(x)$, 在 $[a, b] \setminus C$ 这个正测度集上, $F'(x) = \chi_K(x) = 0$.

(ii) 由于 $[a, b] \setminus C$ 是开集, 可以写成至多可数个互不相交开集的并

$$K := [a, b] \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n)$$

由于 F 是单调递增的, 所以

$$m(F(K)) = \sum_{n=1}^{\infty} F(\beta_n) - F(\alpha_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n - \alpha_n = m(K)$$

另一方面,

$$B - A = F(b) - F(a) = \int_a^b \chi_K(t) dt = m(K)$$

所以

$$m(F(C)) = B - A - m(F(K)) = 0.$$

但是因为 $m(C) > 0$, 所以 C 中存在不可测子集, 记为 V . 则 $F(V) \subset F(K)$ 是零测集从而可测. 所以可以定义 $E = F(V)$,

$$F^{-1}(E) = F^{-1}(F(V)) = V$$

所以 $F^{-1}(E)$ 是不可测集。

(iii) 设 $E \subset [A, B]$ 可测, 存在 Borel 集 $H \subset [A, B]$, 使得 $E \subset H, m(H \setminus E) = 0$, 因此

$$F^{-1}(E) \cap \{F' > 0\} = (F^{-1}(H) \cap \{F' > 0\}) \setminus (F^{-1}(H \setminus E) \cap \{F' > 0\})$$

第一部分 $F^{-1}(H) \cap \{F' > 0\}$ 是可测的. 然后证明第二部分是零测的。

对每个 $r \in \mathbb{N}$, 定义

$$E_r = F^{-1}(H \setminus E) \cap \left\{ F' > \frac{1}{r} \right\}$$

只需要证明每个 E_r 都是零测集. 由于 N 是零测集, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $O \supset H \setminus E$, 使得 $m(O) < \varepsilon$, 于是

$$\frac{1}{r} m(E_r) \leq \int_{E_r} F'(x) dx \leq \int_{F^{-1}(O)} F'(x) dx \leq m(O) < \varepsilon.$$

所以 $m(E_r) < r\varepsilon \rightarrow 0$, 从而 $m(F^{-1}(H \setminus E) \cap \{F' > \frac{1}{r}\}) = 0$.

综上, 可测集并上零测集仍然可测。

题目 11.10. 设 $F \in AC([a, b])$ 递增, $A = F(a), B = F(b)$. 设 f 是 $[A, B]$ 上的任意可测函数。

(i) 证明 $f(F(x))F'(x)$ 在 $[a, b]$ 上可测。

注意: 由习题 11.9 (ii) 知, $f(F(x))$ 不一定可测。

(ii) 证明换元公式: 若 $f \in L^1([A, B])$, 则 $f(F(x))F'(x) \in L^1([a, b])$, 且

$$\int_A^B f(y) dy = \int_a^b f(F(x))F'(x) dx.$$

解答. (i) 令 $P = \{x \in [a, b] : F'(x) > 0\}$, 由上一个题 (iii) 可知, 对任意可测集 $E \subset [A, B]$, 都有 $F^{-1}(E) \cap P$ 可测。因为 f 是可测函数, 所以对任意 $U \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ 可测。因此

$$\{x \in P : f(F(x)) \in U\} = F^{-1}(f^{-1}(U)) \cap P$$

可测。这说明 $f(F(x))$ 在集合 $P = \{F' > 0\}$ 上是可测函数。

当 $F'(x) = 0$ 时, $f(F(x))F'(x) = 0$ 所以也是可测的。

因此, $f(F(x))F'(x)$ 在 $[a, b]$ 上可测。

(ii) 过于困难, 无能为力。

题目 11.11. 设 $F, G \in AC([a, b])$ 。证明 $FG \in AC([a, b])$, 且

$$\int_a^b F'(x)G(x) dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)G'(x) dx.$$

解答. 先证明 $FG \in AC([a, b])$ 。

因为 $F, G \in AC([a, b])$, 所以 F, G 都连续, 所以在紧区间上有界。设

$$A = \sup_{x \in [a, b]} |F(x)|, \quad B = \sup_{x \in [a, b]} |G(x)|.$$

任取互不相交的开区间族 (a_k, b_k) , 他们的长度之和小于 δ , 且

$$\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| \leq \varepsilon, \quad \sum_{k=1}^n |G(b_k) - G(a_k)| < \varepsilon$$

所以

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n |F(b_k)G(b_k) - F(a_k)G(a_k)| \\
 &= \sum_{k=1}^n |F(b_k)G(b_k) - F(b_k)G(a_k) + F(b_k)G(a_k) - F(a_k)G(a_k)| \\
 &\leq A \sum_{k=1}^n |G(b_k) - G(a_k)| + B \sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| \\
 &\leq (A+B)\varepsilon
 \end{aligned}$$

从而, $FG \in AC([a, b])$.

由于 $F, G \in AC([a, b])$, 所以 F', G' 几乎处处存在, 且 $F', G' \in L^1([a, b])$. 因为 F, G 有界, 所以 $FG', F'G \in L^1([a, b])$, 由于

$$(FG)' = F'G + FG'$$

两边同时积分, 就有

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b F'(x)G(x)dx + \int_a^b F(x)G'(x)dx$$

即

$$\int_a^b F'(x)G(x)dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)G'(x)dx.$$

题目 11.12. 设 F 为 $[a, b]$ 上的有界递增函数, $J(x)$ 为 F 的跳跃函数。证明: $\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{J(x+h) - J(x)}{h}$ 可测。

提示: 对任意 $k > m$, 令

$$F_{k,m}^N(x) = \sup_{1/k \leq |h| \leq 1/m} \left| \frac{J_N(x+h) - J_N(x)}{h} \right|,$$

其中 $J_N(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n j_n(x)$. 注意每个 $F_{k,m}^N$ 是可测的, 然后令 $N \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, 最后取 $m \rightarrow \infty$ 。

解答. 因为 $J_N(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n j_n(x)$, 所以

$$|J(x) - J_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \rightarrow 0$$

这就说明 $J_N \Rightarrow J$.

对任意 $k > m$, 定义

$$F_{k,m}^N(x) = \sup_{1/k \leq |h| \leq 1/m} \left| \frac{J_N(x+h) - J_N(x)}{h} \right|,$$

当 x 固定时, $\left| \frac{J_N(x+h) - J_N(x)}{h} \right|$ 只会在集合 $\frac{1}{k} \leq |h| \leq \frac{1}{m}$ 中有限多个点发生变化, 因此他的上确界只需要在有限多个可测表达式中取最大值。于是 $F_{k,m}^N$ 是可测函数。

令 $N \rightarrow \infty$, 由于

$$\left| \frac{J_N(x+h) - J_N(x)}{h} - \frac{J(x+h) - J(x)}{h} \right| \leq \frac{|J_N(x+h) - J(x+h)|}{h} + \frac{|J_N(x) - J(x)|}{h} < \varepsilon$$

所以 $F_{k,m}^N(x) \rightarrow F_{k,m}(x)$ 。因此, $F_{k,m}(x)$ 可测。

然后再令 $k \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$, 就可以得到

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{J(x+h) - J(x)}{h} = \inf_{m \geq 1} \sup_{0 \leq |h| \leq 1/m} \frac{J(x+h) - J(x)}{h}$$

是可测的。

第十二章 第 12 周实分析作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

题目 12.1. 设 F 为 $[a, b]$ 上的递增函数，证明：

(i) 存在分解

$$F = F_A + F_C + F_J,$$

其中 F_A, F_C 和 F_J 均递增且

(a) $F_A \in AC([a, b])$.

(b) $F_C \in C([a, b])$, 且 $F'_C(x) = 0$ a.e.

(c) F_J 是跳跃函数.

(ii) 在相差一个常数的意义下，上述分解是唯一的.

解答. (i) 设 F 是 $[a, b]$ 上的递增函数。由于递增函数有界，所以他的不连续点至多可列。记这些点为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，跃度为

$$\alpha_n = F(x_n+) - F(x_n-) > 0.$$

定义跳跃函数

$$F_J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(x),$$

其中

$$j_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_n, \\ \theta_n, & x = x_n, \\ 1, & x > x_n. \end{cases}$$

这里的 θ_n 由 $F(x_n) = F(x_n-) + \theta_n \alpha_n$ 决定, 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq F(b) - F(a) < \infty$$

所以 F_J 是递增跳跃函数。由跳跃函数的构造, 定义 $F_0 := F - F_J$, 没有跳跃不连续性, 且 $F - F_J$ 仍然递增且连续。

接下来只需把连续递增函数 F_0 分解成绝对连续部分和奇异连续部分。

令 $g(x) = F'_0(x)$, 在 F_0 的可导的点处成立, 在不可导点处定义为 0, 由递增函数的可微性定理, $g \geq 0$ a.e. 且 $g \in L^1([a, b])$ 。定义

$$F_A(x) = \int_a^x g(t) dt.$$

那么 F_A 递增且绝对连续, 并且 $F'_A(x) = g(x) = F'_0(x)$ a.e.。再定义

$$F_C(x) = F_0(x) - F_A(x)$$

因为 F_0 连续, F_A 绝对连续, 所以 F_C 连续。

任取 $s < t$, 由上面的事实,

$$F_A(t) - F_A(s) = \int_s^t F'_0(x) dx \leq F_0(t) - F_0(s).$$

所以

$$F_C(t) - F_C(s) = (F_0(t) - F_0(s)) - (F_A(t) - F_A(s)) \geq 0.$$

因此 F_C 递增。

最后由于 $F_C = F_0 - F_A$, 所以在 F_0 和 F_A 都可导的几乎处处点上,

$$F'_C(x) = F'_0(x) - F'_A(x) = g(x) - g(x) = 0.$$

于是

$$F = F_A + F_C + F_J$$

其中 F_A 绝对连续, F_C 连续且 $F'_C = 0$ a.e., F_J 是跳跃函数。

(ii) 假设还有一个分解 $F = \tilde{F}_A + \tilde{F}_C + \tilde{F}_J$. 首先, 跳跃部分都是再差一个常数意义下唯一的, 去掉跳跃部分后, 可以得到

$$F_A - \tilde{F}_A = \tilde{F}_C - F_C$$

左边是绝对连续函数, 右边是导数几乎处处为 0 的函数, 所以他是常数。所以分解在相差常数的意义下唯一。

题目 12.2. 若 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是一个测度空间, $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{M}$, 证明:

$$\mu(\liminf E_i) \leq \liminf \mu(E_i);$$

若

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) < \infty,$$

则

$$\mu(\limsup E_i) \geq \limsup \mu(E_i).$$

解答.

$$\liminf E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} E_j, \quad \limsup E_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} E_j$$

由测度的下连续性,

$$\mu(\liminf E_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} E_j\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{j=i}^{\infty} E_j\right) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \inf_{j \geq i} \mu(E_j) = \liminf_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$$

所以就有

$$\mu(\liminf E_i) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$$

由测度的上连续性,

$$\mu(\limsup E_i) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} E_j\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} E_j\right) \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{j \geq i} \mu(E_j) = \limsup_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$$

所以就有

$$\mu(\limsup E_i) \geq \limsup \mu(E_i).$$

题目 12.3. 给定测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 和 $E \in \mathcal{M}$, 对 $A \in \mathcal{M}$, 定义 $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$. 证明: μ_E 是一个测度.

解答. 验证 μ_E 是测度, 只需要验证空集测度为 0, 以及可列可加性.

$$(1) \mu_E(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap E) = \mu(\emptyset) = 0.$$

(2) 设 $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{M}$ 两两不交. 则

$$\mu_E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap E)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_E(A_i).$$

因此 μ_E 满足测度的定义, 所以 μ_E 是一个测度。

题目 12.4. 证明: 有限可加测度 μ 是测度当且仅当 μ 是下连续的. 若 $\mu(X) < \infty$, 证明: μ 是测度当且仅当 μ 是上连续的.

解答. “ $\Rightarrow$ ”: 设 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, 定义 $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, 这样 B_n 就是两两不交的, 且并集与 A 相同. 由可列可加性,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

另一方面, 由于 $A_N = \bigcup_{n=1}^N B_n$, 所以由有限可加性,

$$\mu(A_N) = \sum_{n=1}^N \mu(B_n).$$

令 $N \rightarrow \infty$, 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

这就是下连续性。

“ $\Leftarrow$ ”: 设 $C_1 \subset C_2 \subset \cdots$ 两两不交, 令 $A_N = \bigcup_{n=1}^N C_n$, 所以 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, 因为下连续性, 所以

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n)$$

所以 μ 可列可加, 所以是测度。

“ $\Rightarrow$ ”: 设 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, 令 $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 考虑补集, A_n^c 递增, 由下连续性可得

$$\mu(X) - \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N^c) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = \mu(X) - \mu(A)$$

于是由于 $\mu(X) < \infty$, 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N) = \mu(A) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

“ $\Leftarrow$ ”: 由上连续证明下连续进而证明 μ 是测度. 设 $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$, 取补集, $B_1^c \supset B_2^c \supset \cdots$, 由上连续性可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(B_N^c) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^c\right) \Rightarrow \mu(X) - \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(B_N) = \mu(X) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$$

即下连续性

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(B_N) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

这说明 μ 下连续, 进而由第一部分说明 μ 是测度。

题目 12.5. 若 μ 是半有限测度且 $\mu(E) = \infty$, 证明: 对任何 $C > 0$, 存在 $F \subset E$, 使得 $C < \mu(F) < \infty$.

解答. (这个一点不会) 考虑所有包含于 E 的有限测度可测子集的测度, 令

$$\alpha = \sup \{ \mu(A) : A \subset E, A \in \mathcal{M}, \mu(A) < \infty \}$$

我们先证明 $\alpha = \infty$.

假设 $\alpha < \infty$. 由上确界的定义, 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $A_n \subset E$, 满足 $\mu(A_n) < \infty$, 且 $\mu(A_n) > \alpha - \frac{1}{n}$. 令 $B_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, 则 $B_n \subset E$, 并且 B_n 是有限测度集, 所以 $\mu(B_n) \leq \alpha$. 另一方面, 由于 $A_n \subset B_n$, 所以

$$\mu(B_n) \geq \mu(A_n) > \alpha - \frac{1}{n}$$

令 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, 因为 B_n 单调递增, 所以由测度的下连续性,

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \alpha$$

于是 $\mu(B) < \infty$, 所以 $\mu(E \setminus B) = \infty$. 由半有限性, 存在 $D \subset E \setminus B$, 使得 $0 < \mu(D) < \infty$, 于是 $B \cup D \subset E$, 并且由于 $B \cap D = \emptyset$, 有

$$\mu(B \cup D) = \mu(B) + \mu(D) = \alpha + \mu(D) > \alpha$$

同时 $B \cup D$ 仍然是有限测度集, 因为 $\mu(B \cup D) < \infty$. 这就与 α 是所有有限测度自己测度的上确界矛盾. 因此只能有 $\alpha = \infty$.

于是对任意 $C > 0$, 存在 $F \subset E$, 使得 $C < \mu(F) < \infty$.

题目 12.6. 给定可测空间 $(X, \mathcal{M})$ 上的测度 μ , 在 $\mathcal{M}$ 上定义

$$\mu_0(E) = \sup \{ \mu(F) : F \subset E \text{ 且 } \mu(F) < \infty \}.$$

证明:

(i) μ_0 是半有限测度. 它称为 μ 的半有限部分.

(ii) 若 μ 是半有限测度, 则 $\mu = \mu_0$. (用习题 12.5)

(iii) 存在 $\mathcal{M}$ 上的测度 ν 一般不唯一仅取值 0 和 ∞ , 使得 $\mu = \mu_0 + \nu$.

解答. (i) 难。

(ii) 因为 $\mu_0(E) \leq \mu(E)$, 所以只需要证明反向不等式。

若 $\mu(E) < \infty$, 则结论显然。

若 $\mu(E) = \infty$, 则由 12.5, 可以存在 $F \subset E$, 使得对任意的 C ,

$$C < \mu(F) < \infty$$

因此 $\mu_0(E) \geq C$, 由于 C 是任意的, 所以 $\mu_0(E) = \infty = \mu(E)$.

所以 $\mu = \mu_0$.

(iii) 难。

题目 12.7. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 证明 E 是 Carathéodory 可测的充分必要条件是 E 是 Lebesgue 可测的.

解答. “ $\Leftarrow$ ”: 设 E 是 Lebesgue 可测的, 任取 $A \subset \mathbb{R}^n$, 由外测度的次可加性, 我们有

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

只需证明反向不等式成立。

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $O \supset E$, 使得 $m^*(O \setminus E) < \varepsilon$ 。因为开集是 Carathéodory 可测的, 所以对 O 来说,

$$m^*(A) = m^*(A \cap O) + m^*(A \cap O^c)$$

因为 $m^*(A \cap O) > m^*(A \cap E)$, 同时

$$\begin{aligned} m^*(A \cap E^c) &= m^*((A \cap O^c) \cup (A \cap O \setminus E)) \\ &\leq m^*(A \cap O^c) + m^*(A \cap O \setminus E) \\ &< m^*(A \cap O^c) + \varepsilon \end{aligned}$$

所以

$$m^*(A) > m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) - \varepsilon$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 可得反向不等式成立, 从而

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

所以 E 是 Carathéodory 可测的。

“ $\implies$ ”：由 Lebesgue 可测定义，对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在可数个开方体 $\{Q_k\}$ 覆盖 E ，使得

$$\sum_k |Q_k| < m^*(E) + \varepsilon$$

令 $O = \bigcup_k Q_k$ ，则 $O \supset E$ ， $m^*(O) < m^*(E) + \varepsilon$ 。由于 O 是开集，所以是 Carathéodory 可测的，所以

$$\begin{aligned} m^*(O) &= m^*(E \cap O) + m^*(E^c \cap O) \\ &= m^*(E) + m^*(O \setminus E) \end{aligned}$$

在这里就按照 $m^*(E)$ 是否等于 ∞ 分类讨论。

假如 $m^*(E) < \infty$ ，直接移项可得 $m^*(O \setminus E) < \varepsilon$ 。

假如 $m^*(E) = \infty$ ，取 $B_k = B(0, k)$ ，对 $E_k = E \cap B_k$ 进行操作， $m^*(O_k \setminus E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ ，然后令 $k \rightarrow \infty$ 求和，同样得到结果。

题目 12.8. 设 μ_* 是 X 上的外测度， E_1, E_2 是 X 上两个 Carathéodory 可测子集。证明： $E_1 \cap E_2$ 是 X 上 Carathéodory 可测集。

解答. 要证明 $E_1 \cap E_2$ 是 X 上 Carathéodory 可测集，则需要证明对任意 $A \subset X$ ，有

$$m^*(A) = m^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) + m^*(A \cap (E_1 \cap E_2)^c)$$

因为

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (E_1 \cap E_2)^c) &= m^*((A \cap E_1^c) \cup (A \cap E_1 \cap E_2^c)) \\ &\leq m^*(A \cap E_1^c) + m^*(A \cap E_1 \cap E_2^c) \\ &= m^*(A \cap E_1^c) + m^*(A \cap E_1) - m^*(A \cap E_1 \cap E_2) \end{aligned}$$

所以

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E_1^c) + m^*(A \cap E_1)$$

但由于 E_1 是 Carathéodory 可测子集，所以等号应该成立，也就是说

$$m^*(A \cap (E_1 \cap E_2)^c) = m^*(A \cap E_1^c) + m^*(A \cap E_1 \cap E_2^c)$$

所以, 最后计算

$$\begin{aligned}
 & m^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) + m^*(A \cap (E_1 \cap E_2)^c) \\
 &= m^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) + m^*(A \cap E_1^c) + m^*(A \cap E_1 \cap E_2^c) \\
 &= m^*(A \cap (E_1 \cap E_2)) + m^*(A) - m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1) - m^*(A \cap E_1 \cap E_2) \\
 &= m^*(A)
 \end{aligned}$$

这就验证了 $E_1 \cap E_2$ 的 Carathéodory 可测性。

题目 12.9. 设 $\mathcal{E}$ 为 X 的子集族和 $\rho: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ 满足 $\emptyset \in \mathcal{E}$, 和 $\rho(\emptyset) = 0$. 对任意 $A \subset X$, 定义

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_1^\infty \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ 且 } A \subset \bigcup_1^\infty E_j \right\},$$

则 μ^* 为外测度。

解答. 验证 μ^* 为外测度, 需要检查

1. 空集测度为零。将 E_j 都取为空集, 有

$$\mu^*(\emptyset) = \inf \left\{ \sum_1^\infty \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ 且 } \emptyset \subset \bigcup_1^\infty E_j \right\} = 0$$

2. 单调性。任意 $A \subset B \subset X$, 若 $B \subset \bigcup_{j=1}^\infty E_j$, 则 $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty E_j$, 所以

$$\left\{ \sum_1^\infty \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ 且 } A \subset \bigcup_1^\infty E_j \right\} \subset \left\{ \sum_1^\infty \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ 且 } B \subset \bigcup_1^\infty E_j \right\}$$

所以 $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

3. 可数次可加性。对任意一列子集 $A_1, A_2, \dots \subset X$, 有

$$\begin{aligned}
 \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) &= \inf \left\{ \sum_1^\infty \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ 且 } \bigcup_{n=1}^\infty A_n \subset \bigcup_1^\infty E_j \right\} \\
 &\leq \inf \left\{ \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \rho(E_j^n) : E_j \in \mathcal{E} \text{ 且 } A_n \subset \bigcup_1^\infty E_j^n \right\} \\
 &\leq \sum_{n=1}^\infty \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \rho(E_j^n) : E_j \in \mathcal{E} \text{ 且 } A_n \subset \bigcup_1^\infty E_j^n \right\} \\
 &= \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n).
 \end{aligned}$$

第十三章 第 13 周实分析作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 13.1. 设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 为测度空间。令 $\overline{\mathcal{M}}$ 为全体 $E \cup Z$ 的集合，其中 $E \in \mathcal{M}$, $Z \subset F$, $F \in \mathcal{M}$ 且 $\mu(F) = 0$ 。令 $\bar{\mu}(E \cup Z) = \mu(E)$ ，证明：

- (a) $\overline{\mathcal{M}}$ 为包含 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}$ 中所有零测集的子集的最小 σ -代数。
- (b) $\bar{\mu}$ 为 $\overline{\mathcal{M}}$ 上的完备测度。

解答. (a) 记 $\mathcal{N} = \{F \in \mathcal{M} : \mu(F) = 0\}$ ，定义

$$\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup Z : E \in \mathcal{M}, Z \subset F, F \in \mathcal{N}\}$$

先证明 $\overline{\mathcal{M}}$ 是 σ -代数。

1. 对可列并封闭。设 $A_n \in \overline{\mathcal{M}}$ ，则存在 $E_n \in \mathcal{M}$, $Z_n \subset F_n \in \mathcal{M}$ ，使得 $A_n = E_n \cup Z_n$ 。于是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \right)$$

由次可加性，

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \right) \leq \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = 0$$

所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ 也是零测集。又因为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$ ，所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \overline{\mathcal{M}}$ 。

2. 对补集封闭。设 $A \in \overline{\mathcal{M}}$ ，则 $A = E \cup Z$ ，我们要证明 A^c 仍然属于 $\overline{\mathcal{M}}$ 。因为

$$A^c = (E \cup Z)^c = (E \cup (Z \setminus E))^c = (E \cup F)^c \cup (F \setminus Z)$$

这里，前面属于 $\mathcal{M}$ ，后面是零测集，所以 $A^c \in \overline{\mathcal{M}}$ 。

从而 $\overline{\mathcal{M}}$ 是 σ -代数。

3. 最小性。假设 $\mathcal{M}'$ 是另一个包含 $\mathcal{M}$ 且包含所有 $\mathcal{M}$ -零测集子集的 σ -代数。对任意 $A \in \overline{\mathcal{M}}$, 有 $A = E \cup Z$, 其中 $E \in \mathcal{M}$, Z 是某个 $\mathcal{M}$ -零测集的子集。于是 $E \in \mathcal{M}'$, $Z \in \mathcal{M}'$, 从而 $A \in \mathcal{M}'$, 从而 $\overline{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}'$ 。这就说明 $\overline{\mathcal{M}}$ 是满足要求的最小的 σ -代数。

(b) 先证明 $\bar{\mu}$ 是测度。

1. 空集测度是 0. $\bar{\mu}(\emptyset \cup Z) = \mu(\emptyset) = 0$.

2. 可列可加性。设 $A_n \in \overline{\mathcal{M}}$ 两两不交, 则存在 $E_n \in \mathcal{M}$, $Z_n \subset F_n \in \mathcal{M}$, 使得 $A_n = E_n \cup Z_n$ 。

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bar{\mu}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n)$$

所以 $\bar{\mu}$ 的可列可加性由 μ 的可列可加性得到。

再证明 $\bar{\mu}$ 的完备性。

设 $A \in \overline{\mathcal{M}}$, 且 $\bar{\mu}(A) = 0$ 。由 $\bar{\mu}(A) = \mu(E) = 0$, 所以 E 也是 $\mathcal{M}$ -零测集。于是 $\mu(E \cup F) = 0$ 。若 $B \subset A$, 则 $B \subset E \cup F$, 所以 $B = \emptyset \cup B \in \overline{\mathcal{M}}$, 所以 $\bar{\mu}(B) = \mu(\emptyset) = 0$ 。所以 $\bar{\mu}$ 是完备测度。

题目 13.2. 设 $\{f_n\} \subset L^1(X, \mu)$ 且 f_n 一致收敛于 f 。证明:

- (i) 若 $\mu(X) < \infty$, 则 $f \in L^1(X, \mu)$ 且 $\int f_n \rightarrow \int f$ 。
- (ii) 若 $\mu(X) = \infty$, 举例说明 (i) 中的结论不成立。

解答. (i) 由于 $f_n \rightarrow f$ 一致收敛。所以存在 N , 当 $n \geq N$ 时, $\|f_n - f\|_{\infty} \leq 1$ 。于是

$$|f(x)| \leq |f_N(x)| + |f(x) - f_N(x)| \leq |f_N(x)| + 1$$

所以

$$\int_X |f(x)| dx \leq \int_X |f_N(x)| dx + \mu(X) < \infty.$$

因为 $f_N \in L^1(X, \mu)$, 所以 $f \in L^1(X, \mu)$ 。

$$\left| \int_X f_N - \int_X f \right| \leq \int_X |f_N - f| \leq \mu(X) \|f_N - f\|_{\infty}$$

由一致收敛性, 可知上式 $< \infty$ 。所以积分也是收敛的。

(ii) 取 $X = \mathbb{N}$ 。

$$f_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

这样 $f_n \rightarrow f = 0$ 一致收敛。且 $\int_{\mathbb{N}} f_n = 1$, 但是 $\int_{\mathbb{N}} f = 0$ 。所以不成立。

第十四章 第 14 周实分析作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 14.1. 设 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 被表示成 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1}$ ，其中 $\mathbb{R}_+ = \{0 < r < \infty\}$ 。证明： $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 中的每个开集能被写作这个乘积中开长方体的可列并。

提示： 考察如下形式长方体的可列族

$$\{r_j < r < r'_k\} \times \{\gamma \in \mathbb{S}^{n-1} : |\gamma - \gamma_\ell| < 1/m\}.$$

这里 r_j 和 r'_k 取遍所有的正有理数， $\{\gamma_\ell\}$ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的一个可列稠密集。

解答. 任取一个开集 U ，点 $(r, \gamma) \in U$ ，因为 U 是开集，所以存在点的邻域 $(a, b) \times V$ ，使得 $(r, \gamma) \in (a, b) \times V \subset U$ 。然后就需要证明会存在某一个长方体 $\{r_j < r < r'_k\} \times \{\gamma \in \mathbb{S}^{n-1} : |\gamma - \gamma_\ell| < 1/m\}$ 覆盖 (r, γ) 且完全被包含在 U 中。

首先在 (a, b) 中，由于有理数是稠密的，所以必然存在 $r_j \in (a, r)$, $r'_k \in (r, b)$ ，这样 $r \in (r_j, r'_k) \subset (a, b)$ 。

然后在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 中。由于 $\{\gamma_\ell\}$ 是稠密的，所以在 γ 的一个小球面邻域

$$V_{\gamma, m} := \{\eta \in \mathbb{S}^{n-1} : |\gamma - \eta| < 1/m\} \subset V_{\gamma, 2m} \subset V$$

中，必然存在一个 $\gamma_s \in V_{\gamma, m}$ ，这样， γ 就属于 $\{\eta \in \mathbb{S}^{n-1} : |\eta - \gamma_s| < 1/m\} \subset V_{\gamma, 2m} \subset V$ ，于是

$$(r, \gamma) \in (r_j, r'_k) \times \{\eta \in \mathbb{S}^{n-1} : |\eta - \gamma_s| < 1/m\} \subset (a, b) \times V \subset U$$

于是每个点 $(r, \gamma) \in U$ 都落在这个提示的某个长方体里，而且这个长方体还是完全包含于 U ，所以每个开集能被写作这个乘积中开长方体的可列并。

题目 14.2. 设 $(X_j, \mathcal{M}_j, \mu_j)$, $1 \leq j \leq k$, 是有限个测度空间。证明: 能够在 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ 上构造一个乘积测度 $\mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_k$ 。

提示: 对任何 $E \subset X$ 具有形式 $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$, 其中对所有 j 有 $E_j \in \mathcal{M}_j$, 定义 $\mu_0(E) = \prod_{j=1}^k \mu_j(E_j)$ 。验证 μ_0 可延拓成这类集合的有限互不相交并所构成的代数 $\mathcal{A}$ 上的一个准测度, 然后应用 Carathéodory-Hahn 延拓定理。

解答. 当 $k = 2$ 时, 我们已知二元乘积测度的构造。假设已经能构造 $k - 1$ 个测度空间的乘积测度, 即

$$\lambda = \mu_1 \times \cdots \times \mu_{k-1}$$

是 $X_1 \times \cdots \times X_{k-1}$ 上关于 $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_{k-1}$ 的测度。把 $(X_1 \times \cdots \times X_{k-1}, \mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_{k-1}, \lambda)$ 看成一个测度空间, 再与 $(X_k, \mathcal{M}_k, \mu_k)$ 作二元乘积, 由二元乘积测度的存在性, 可知存在测度 $\lambda \times \mu_k$, 定义在 $\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_k$ 上, 且满足

$$\begin{aligned} (\mu_1 \times \cdots \times \mu_k)(E_1 \times \cdots \times E_k) &= ((\mu_1 \times \cdots \times \mu_{k-1}) \times \mu_k)((E_1 \times \cdots \times E_{k-1}) \times E_k) \\ &= (\mu_1 \times \cdots \times \mu_{k-1})(E_1 \times \cdots \times E_{k-1}) \mu_k(E_k) \\ &= \prod_{j=1}^{k-1} \mu_j(E_j) \cdot \mu_k(E_k) \\ &= \prod_{j=1}^k \mu_j(E_j). \end{aligned}$$

因此归纳完成。

题目 14.3. 令 $X = Y = [0, 1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, $\mu =$ Lebesgue 测度, $\nu =$ 记数测度。证明: 若 $D = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ 是 $X \times Y$ 中的对角线, 则 $\iint \chi_D d\mu d\nu$, $\iint \chi_D d\nu d\mu$ 和 $\int \chi_D d(\mu \times \nu)$ 均不相等。

解答.

$$\iint \chi_D d\mu d\nu = \int \mu(\{y\}) d\nu(y) = 0.$$

$$\iint \chi_D d\nu d\mu = \int \nu(\{x\}) d\mu(x) = \int 1 d\mu(x) = 1.$$

$$\iint \chi_D d(\mu \times \nu) = (\mu \times \nu)(D).$$

对长方体 $A \times B$, 有 $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$, 假设有一列矩形乘积 $\{A_j \times B_j\}$ 覆

盖 D , 那么就会得到

$$[0, 1] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap B_j)$$

假设 $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j) < \infty$,

如果 $\nu(B_j) < \infty$, 那么 $A_j \cap B_j$ 就是有限集, 于是 $\mu(A_j \cap B_j) = 0$;

如果 $\nu(B_j) = \infty$, 那么为了使得 $\mu(A_j)\nu(B_j)$ 不是 ∞ , 只能有 $\mu(A_j) = 0$, 于是 $\mu(A_j \cap B_j) = 0$.

从而由于 $\mu([0, 1]) = 1$, 所以得到了矛盾。

所以 $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j) = \infty$, 也就是说 $(\mu \times \nu)(D) = \infty$.

题目 14.4. 令 $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu = \nu =$ 记数测度。定义

$$f(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{若 } m = n, \\ -1, & \text{若 } m = n + 1, \\ 0, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

证明: $\int |f|d(\mu \times \nu) = \infty$, 且 $\iint f d\mu d\nu$ 和 $\iint f d\nu d\mu$ 存在但不相等。

解答. 记 $D = \{(m, m), (m + 1, m) \mid m \in \mathbb{N}\}$, 则

$$\begin{aligned} \int |f|d(\mu \times \nu) &= (\mu \times \nu)(D) \\ &= \#\{(m, m) \mid m \in \mathbb{N}\} + \#\{(m + 1, m) \mid m \in \mathbb{N}\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

$$\iint f d\mu d\nu = \int 0 d\nu = 0$$

$$\iint f d\nu d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n) d\mu(m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n) = \sum_{m=1}^{\infty} f(1, m) = 1$$

题目 14.5. 对哪些 $a, b \in \mathbb{R}$, $|x|^a |\ln |x||^b$ 在 $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1/2\}$ 上 Lebesgue 可积? 在 $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 2\}$ 上呢?

解答. 考虑极坐标变换, 令 $r = |x|$, 极坐标公式给出

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^a |\ln |x||^b dx = \int_{\mathbb{R}} r^{a+n-1} (\ln r)^b dr$$

在 $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1/2\}$ 上, 只需要判断 $\int_0^{1/2} r^{a+n-1} (\ln r)^b dr$ 是否收敛。

令 $t = -\ln r > 0$, 于是

$$\int_0^{1/2} r^{a+n-1} (\ln r)^b dr = \int_{\ln 2}^{\infty} e^{-(a+n)t} t^b dt$$

当 $a > -n$ 时, 指数衰减, 从而收敛。

当 $a = -n$, $b < -1$ 时, 也收敛。

其余情况不收敛。

在 $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 2\}$ 上, 只需要判断 $\int_2^{\infty} r^{a+n-1} (\ln r)^b dr$ 是否收敛。

令 $t = \ln r > 0$, 于是

$$\int_2^{\infty} r^{a+n-1} (\ln r)^b dr = \int_{\ln 2}^{\infty} e^{(a+n)t} t^b dt$$

当 $a < -n$ 时, 指数衰减, 从而收敛。

当 $a = -n$, $b < -1$ 时, 也收敛。

其余情况不收敛。

第十五章 第 15 周实分析作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 15.1. 设 F 递增且右连续， μ_F 为相应的测度。证明： $\mu_F(\{a\}) = F(a) - F(a^-)$ ， $\mu_F([a, b)) = F(b^-) - F(a^-)$ ， $\mu_F([a, b]) = F(b) - F(a^-)$ ，和 $\mu_F((a, b)) = F(b^-) - F(a)$ 。

解答. (1) 将 $\{a\}$ 看做一系列集合的交集，

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, a]$$

于是用测度的上连续性：

$$\mu_F(\{a\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_F\left((a - \frac{1}{n}, a]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(F(a) - F\left(a - \frac{1}{n}\right)\right) = F(a) - F(a^-)$$

(2) $(a, b] = (a, b) \cup \{b\}$ ，所以

$$\mu_F((a, b) \cup \{b\}) = \mu_F((a, b)) + \mu_F(\{b\}) = F(b) - F(a)$$

于是

$$\mu_F((a, b)) = [F(b) - F(a)] - [F(b) - F(b^-)] = F(b^-) - F(a).$$

(3) $[a, b] = (a, b] \cup \{a\}$ ，所以

$$\mu_F([a, b]) = \mu_F((a, b]) + \mu_F(\{a\}) = F(b) - F(a^-)$$

(4) $[a, b) = (a, b) \cup \{a\}$ ，所以

$$\mu_F([a, b)) = \mu_F((a, b)) + \mu_F(\{a\}) = F(b^-) - F(a^-)$$

题目 15.2. 设 ν 是可测空间 $(X, \mathcal{M})$ 上的带号测度, 证明:

- (i) $E \in \mathcal{M}$ 是 ν -零集当且仅当 $|\nu|(E) = 0$;
- (ii) $\nu \perp \mu$ 当且仅当 $|\nu| \perp \mu$ 当且仅当 $\nu^+ \perp \mu$ 且 $\nu^- \perp \mu$ 。

解答. (i) “ $\implies$ ” : 假如 $E \in \mathcal{M}$ 是 ν -零集, 那么对 E 用 Hahn 分解 $X = P \cup N$, P 是 ν -正集, N 是 ν -负集。因为 $E \cap P \subset E, E \cap N \subset E$, 所以

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = 0, \nu^-(E) = \nu(E \cap N) = 0$$

于是

$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = 0$$

“ $\impliedby$ ” : 假如 $|\nu|(E) = 0$, 则对于任何 $A \subset E$, 都有 $|\nu|(A) \leq |\nu|(E) = 0$, 所以 $\nu(A) = 0$, 从而 E 是 ν -零集。

(ii) 首先说明 $\nu \perp \mu \iff |\nu| \perp \mu$. 这是因为 ν -零集等价于 $|\nu|$ -零集, 所以两者是等价的。

然后说明 $|\nu| \perp \mu \iff \nu^+ \perp \mu$ 且 $\nu^- \perp \mu$.

“ $\implies$ ” : 因为 ν^+ 和 ν^- 是正测度, 所以假如一个集合是 $|\nu|$ -零集, 那么他一定是 ν^+ -零集和 ν^- -零集, 所以 $\nu^+ \perp \mu$ 且 $\nu^- \perp \mu$.

“ $\impliedby$ ” : 设 $X = E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$, 且 $\nu^+(E_1) = \mu(F_1) = \nu^-(E_2) = \mu(F_2) = 0$, 那么 X 可以分解成

$$X = (E_1 \cap E_2) \cup (F_1 \cup F_2)$$

且

$$\begin{aligned} \mu(F_1 \cup F_2) &\leq \mu(F_1) + \mu(F_2) = 0 \\ |\nu|(E_1 \cap E_2) &= \nu^+(E_1 \cap E_2) + \nu^-(E_1 \cap E_2) \\ &\leq \nu^+(E_1) + \nu^-(E_2) = 0 \end{aligned}$$

所以 $|\nu| \perp \mu$.

题目 15.3. 设 ν 是可测空间 $(X, \mathcal{M})$ 上的带号测度, 证明:

- (i) $L^1(X, \nu) = L^1(X, |\nu|)$;
- (ii) 若 $f \in L^1(X, \nu)$, 则 $|\int f d\nu| \leq \int |f| d|\nu|$;
- (iii) 若 $E \in \mathcal{M}$, 则 $|\nu|(E) = \sup \{ |\int_E f d\nu| : \|f\| \leq 1 \}$ 。

解答. (i) 假设 $f \in L^1(X, \nu)$, 那么按定义有

$$\int |f| d\nu^+ < \infty, \int |f| d\nu^- < \infty$$

又因为 $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$, 所以

$$\int |f| d|\nu| = \int |f| d\nu^+ + \int |f| d\nu^- < \infty$$

所以 $f \in L^1(X, |\nu|)$, 于是 $L^1(X, \nu) \subset L^1(X, |\nu|)$.

反过来, 假设 $f \in L^1(X, |\nu|)$,

$$\int |f| d|\nu| = \int |f| d\nu^+ + \int |f| d\nu^- < \infty$$

就说明两个积分都有限, 所以 $f \in L^1(X, \nu)$, $L^1(X, |\nu|) \subset L^1(X, \nu)$, 所以二者结合, $L^1(X, \nu) = L^1(X, |\nu|)$.

(ii) 若 $f \in L^1(X, \nu)$

$$\begin{aligned} \left| \int f d\nu \right| &= \left| \int f d\nu^+ - \int f d\nu^- \right| \leq \left| \int f d\nu^+ \right| + \left| \int f d\nu^- \right| \\ &\leq \int |f| d\nu^+ + \int |f| d\nu^- \\ &= \int |f| d|\nu| \end{aligned}$$

(iii) 先证明任意的 f , 若 $\|f\| \leq 1$, 则 $|\nu|(E) \geq \left| \int_E f d\nu \right|$.

$$|\nu|(E) = \int_E 1 \cdot d|\nu| \geq \int_E |f| d|\nu| \geq \left| \int_E f d\nu \right|$$

然后取 $f = 1$, 则恰好

$$|\nu|(E) = \left| \int_E 1 \cdot d|\nu| \right|$$

所以 $|\nu|(E) = \sup \left\{ \left| \int_E f d\nu \right| : \|f\| \leq 1 \right\}$.

(但非常悲痛的是这样不对, 应该取 Hahn 分解) 设 $X = P \sqcup N$, 取 $f = \chi_P - \chi_N$, 则 $\|f\| \leq 1$, 且

$$\int_E f d\nu = \int_E f d\nu^+ - \int_E f d\nu^-$$

由于 ν^+ 集中在 P 上, ν^- 集中在 N 上, 所以

$$\int_E f d\nu = \nu^+(E) - \nu^-(E) = |\nu|(E)$$

因此

$$\sup_{\|f\| \leq 1} \left| \int_E f d\nu \right| \geq |\nu|(E).$$

从而才能得到

$$|\nu|(E) = \sup \left\{ \left| \int_E f d\nu \right| : \|f\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

题目 15.4. 设 ν 是可测空间 $(X, \mathcal{M})$ 上的带号测度, $E \in \mathcal{M}$ 。证明:

- (i) $\nu^+(E) = \sup\{\nu(F) : F \subset E, F \in \mathcal{M}\}$ 和 $\nu^-(E) = -\inf\{\nu(F) : F \subset E, F \in \mathcal{M}\}$;
(ii) $|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N}, E_1, \dots, E_n \text{ 互不相交且 } \bigcup_{j=1}^n E_j = E \right\}$ 。

解答. (i) 对 X 做 Hahn 分解: $X = P \cup N$ 。令 $F = (F \cap P) \sqcup (F \cap N)$, 这样

$$\nu(F \cap P) \geq 0, \nu(F \cap N) \leq 0$$

因此

$$\nu(F) = \nu(F \cap P) + \nu(F \cap N) \leq \nu(F \cap P) \leq \nu(E \cap P) = \nu^+(E)$$

令 $F = E \cap P$, 恰好取到 $\nu^+(E) = \nu(F)$, 所以 $\nu^+(E) = \sup\{\nu(F) : F \subset E, F \in \mathcal{M}\}$ 。

另一方面,

$$\nu(F) = \nu(F \cap P) + \nu(F \cap N) \geq \nu(F \cap N) \geq \nu(E \cap N) = -\nu^-(E)$$

令 $F = E \cap N$, 恰好取到 $\nu^-(E) = -\nu(F)$, 所以 $\nu^-(E) = -\inf\{\nu(F) : F \subset E, F \in \mathcal{M}\}$ 。

(ii) 任取 E 的不相交有限划分 $E = \bigsqcup_{j=1}^n E_j$ 。因为 $|\nu(A)| \leq \nu^+(A)$, 所以

$$\sum_{j=1}^n |\nu(E_j)| \leq \sum_{j=1}^n \nu^+(E_j) = \nu^+(E)$$

然后证明反向。对 X 取 Hahn 分解, 于是 E 就对应有一个分解

$$E = (E \cap P) \sqcup (E \cap N)$$

此时

$$|\nu(E \cap P)| + |\nu(E \cap N)| = \nu(E \cap P) - \nu(E \cap N) = \nu^+(E) + \nu^-(E) = |\nu|(E)$$

所以

$$|\nu|(E) \leq |\nu(E \cap P)| + |\nu(E \cap N)|$$

两边合起来就是

$$|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N}, E_1, \dots, E_n \text{ 互不相交且 } \bigcup_{j=1}^n E_j = E \right\}.$$

题目 15.5. 设 F 是 $\mathbb{R}$ 上的递增规范化函数, 设 $F = F_A + F_C + F_J$ 为 F 的 Lebesgue 分解, 其中 F_A 绝对连续, F_C 连续且 $F'_C = 0$ a.e., F_J 为纯跳跃函数。设 $\mu = \mu_A + \mu_C + \mu_J$, 其中 μ_A, μ_C, μ_J 分别为相应于 F_A, F_C, F_J 的 Borel 测度。证明:

(i) μ_A 关于 Lebesgue 测度绝对连续, 且对于每个 Lebesgue 可测集 E 有 $\mu_A(E) = \int_E F'(x)dx$;

(ii) 若 F 绝对连续, 则当 f 和 fF' 可积时, 有 $\int f d\mu = \int f dF = \int f(x)F'(x)dx$ 。

(iii) $\mu_C + \mu_J$ 与 Lebesgue 测度是相互奇异的。

解答. (i) 因为 F_A 绝对连续, 所以对任意 $a < b$, 由微积分基本定理有

$$F_A(b) - F_A(a) = \int_a^b F'_A(x) dx$$

另一方面, μ_A 为 F_A 对应的 Lebesgue-Stieltjes 测度, 所以

$$\mu_A((a, b]) = F_A(b) - F_A(a)$$

于是

$$\mu_A((a, b]) = \int_a^b F'_A(x) dx = \int_{(a, b]} F'_A(x) dx.$$

在 Borel 集上定义

$$\lambda(E) = \int_E F'_A(x) dx$$

刚才已经证明, 对于任意 $a < b$,

$$\lambda((a, b]) = \int_{(a, b]} F'_A(x) dx = \mu_A((a, b]).$$

也就是说, λ 和 μ_A 在所有半开半闭区间 $(a, b]$ 上相等。这些区间生成 $\mathbb{R}$ 上的 Borel σ -代数, 并且在每个有界区间上二者都是有限测度, 所以有测度唯一性定理可知:

$$\mu_A(E) = \lambda(E)$$

对所有 Borel 集 E 成立, 即

$$\mu_A(E) = \int_E F'_A(x) dx.$$

若 E 是 Borel 集且 $m(E) = 0$, 则

$$\mu_A(E) = \int_E F'_A(x) dx = 0.$$

因此 $\mu_A \ll m$.

最后, 由于

$$F' = F'_A + F'_C + F'_J = F'_A \text{ a.e.}$$

所以对于任意 Borel 集 E ,

$$\mu_A(E) = \int_E F'_A(x) dx = \int_E F'(x) dx$$

(ii) 若 F 绝对连续, 则它的奇异连续部分和纯跳跃部分对应的测度都为零, 即 $\mu = \mu_A$, 由 (i) 得, $d\mu = F'(x) dx$. 先对示性函数 $f = \chi_E$, 有

$$\int \chi_E d\mu = \mu(E) = \int_E F'(x) dx = \int \chi_E(x) F'(x) dx.$$

由线性性, 对非负简单函数成立; 再由单调收敛定理, 对非负可测函数成立; 最后对一般可积函数, 把 $f = f^+ - f^-$, 即可得到

$$\int f dF = \int f d\mu = \int f F' dx.$$

(iii) 先证明 $\mu_C \perp m$. 设 F_J 的跳跃点为 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 跳跃大小为

$$\alpha_n = F_J(x_n) - F_J(x_n^-) > 0$$

纯跳跃函数的跳跃点至多可数, 并且对应测度满足 $\mu_J(\{x_n\}) = \alpha_n$, 令 $J = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, 则 J 是可数集, 所以 $m(J) = 0$, 又因为 μ_J 全部集中在跳跃点上, 所以 $\mu_J(\mathbb{R} \setminus J) = 0$. 从而得到了 $\mu_J \perp m$.

再证明 $\mu_C \perp m$. 首先 μ_C 是正的 Borel 测度, 并且在有界区间上有限。因此 μ_C 是 σ -有限测度, Lebesgue 测度 m 也是 σ -有限测度。

由 Lebesgue-Radon-Nikodym 分解定理, μ_C 关于 m 可以唯一分解为

$$\mu_C = \rho + \sigma$$

其中 $\rho \ll m, \sigma \perp m$. 并且因为 $\rho \ll m$, 由 Radon-Nikodym 定理, 存在非负可测函数 g , 使得 $d\rho = g dm$, 现在就需要证明 $g = 0$ a.e.

因为 g 在每个有界区间上可积, 所以由 Lebesgue 微分定理, 对几乎处处的 x , 有

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t) dt = g(x)$$

又由题设, $F'_C(x) = 0$ a.e. 所以存在一个满测集, 在这个集合中的每个点 x , 同时满足

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t) dt = g(x), \quad \lim_{h \downarrow 0} \frac{F_C(x+h) - F_C(x)}{h} = 0.$$

固定这样的点 x 。

因为 $\mu_C = \rho + \sigma$, 且 ρ, σ 都是正测度, 所以对任意 Borel 集 E , $\rho(E) \leq \mu_C(E)$. 取 $E = (x, x+h]$, 有

$$\rho((x, x+h]) = \int_{(x, x+h]} g(t) dt = \int_x^{x+h} g(t) dt \leq \mu_C((x, x+h]) = F_C(x+h) - F_C(x).$$

因此

$$\int_x^{x+h} g(t) dt \leq F_C(x+h) - F_C(x).$$

两边同时除以 h , 得到

$$0 \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t) dt \leq \frac{F_C(x+h) - F_C(x)}{h}$$

令 $h \downarrow 0$, 得到 $0 \leq g(x) \leq 0$. 因此 $g(x) = 0$, 且由于这样的 x 构成满测集, 所以 $g = 0$ a.e. 于是 $\rho = 0$, 从而 $\mu_C = \sigma$. 又因为 $\sigma \perp m$, 所以 $\mu_C \perp m$.

现在已经得到了 $\mu_C \perp m, \mu_J \perp m$. 由 $\mu_C \perp m$, 存在 Borel 集 C , 使得

$$m(C) = 0, \quad \mu_C(\mathbb{R} \setminus C) = 0.$$

由 $\mu_J \perp m$, 存在 Borel 集 J , 使得

$$m(J) = 0, \quad \mu_J(\mathbb{R} \setminus J) = 0.$$

令 $N = C \cup J$, 则

$$m(N) = m(C \cup J) \leq m(C) + m(J) = 0.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} (\mu_C + \mu_J)(\mathbb{R} \setminus N) &= \mu_C(\mathbb{R} \setminus N) + \mu_J(\mathbb{R} \setminus N) \\ &\leq \mu_C(\mathbb{R} \setminus C) + \mu_J(\mathbb{R} \setminus J) = 0 \end{aligned}$$

从而就可以说明 $\mu_C + \mu_J \perp m$.

题目 15.6. 设 ν, ν_1, ν_2 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的带号测度, μ 是 $\mathcal{M}$ 上的正测度, 证明:

- (i) 若 $\nu_1 \perp \mu$ 且 $\nu_2 \perp \mu$, 则 $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$;
- (ii) 若 $\nu_1 \ll \mu$ 且 $\nu_2 \ll \mu$, 则 $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$;

- (iii) 若 $\nu_1 \perp \nu_2$, 则 $|\nu_1| \perp |\nu_2|$;
- (iv) $\nu \ll |\nu|$;
- (v) 若 $\nu \perp \mu$ 且 $\nu \ll \mu$, 则 $\nu = 0$ 。

解答. (i) 因为 $\nu_1 \perp \mu$ 且 $\nu_2 \perp \mu$, 所以存在 E_1, E_2 , $\mu(E_1) = \mu(E_2) = 0$, $X \setminus E_1, X \setminus E_2$ 分别是 ν_1 -零集, ν_2 -零集。所以取 $E = E_1 \cup E_2$, 则

$$\mu(E) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) = 0$$

$$(\nu_1 + \nu_2)(X \setminus E) \leq \nu_1(X \setminus E_1) + \nu_2(X \setminus E_2) = 0$$

所以 $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$ 。

(ii) 显然。

(iii) A 是 ν -零集 $\iff |\nu|(A) = 0$ 。所以假如 E 是 ν_1 -零集, $X \setminus E$ 是 ν_2 -零集, 那么

$$|\nu_1|(E) = 0, |\nu_2|(X \setminus E) = 0$$

因此 $|\nu_1| \perp |\nu_2|$ 。

(iv) 因为 $|\nu(E)| \leq |\nu|(E) = 0$, 所以显然成立。

(v) 若 $\nu \perp \mu$, 则存在 $E \in \mathcal{M}$, 使得

$$\mu(E) = 0, X \setminus E \text{ 是 } \nu\text{-零集}$$

又因为 $\nu \ll \mu$, 所以由 $\mu(E) = 0$ 得 E 是 ν -零集。现在任取 $A \in \mathcal{M}$, 则

$$\nu(A) = \nu((A \cap E) \cup (A \cap E^c)) = \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^c) = 0$$

所以 $\nu = 0$ 。

题目 15.7. 设 μ 为正测度, ν 为带号测度。证明: $\nu \ll \mu$ 当且仅当 $|\nu| \ll \mu$ 也当且仅当 $\nu^+ \ll \mu$ 且 $\nu^- \ll \mu$ 。

解答. 首先说明 $\nu \ll \mu \iff |\nu| \ll \mu$

“ $\implies$ ”: 若 $\nu \ll \mu$, 任取 $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = 0$, 则 $\nu(E) = 0$ 。任取 $A \subset E$, 则 $\mu(A) \leq \mu(E) = 0$, 从而 $\nu(A) = 0$, 所以 E 是 ν -零集, 由前面题目的结论可以得到 $|\nu| \ll \mu$ 。

“ $\impliedby$ ”: 若 $|\nu| \ll \mu$, 任取 $E \in \mathcal{M}$, 若 $\mu(E) = 0$, 则 $|\nu|(E) = 0$, 所以

$$|\nu(E)| \leq |\nu|(E) = 0$$

从而 $\nu(E) = 0$, 所以 $\nu \ll \mu$.

然后说明 $|\nu| \ll \mu$ 也当且仅当 $\nu^+ \ll \mu$ 且 $\nu^- \ll \mu$ 。

“ $\implies$ ”: 因为 $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$, 所以如果 $|\nu|(E) = 0$, 那么 $\nu^+(E) = \nu^-(E) = 0$, 也就是 $\nu^+ \ll \mu, \nu^- \ll \mu$.

“ $\impliedby$ ”: 显然。

题目 15.8. 设 μ 和 $\{\nu_j\}_{j=1}^\infty$ 均为正测度。证明:

- (i) 若对所有 j 有 $\nu_j \perp \mu$, 则 $\sum_{j=1}^\infty \nu_j \perp \mu$;
- (ii) 若对所有 j 有 $\nu_j \ll \mu$, 则 $\sum_{j=1}^\infty \nu_j \ll \mu$ 。

解答. (i) 每个 $\nu_j \perp \mu$, 都会存在可测集 $A_j \in \mathcal{M}$, 使得 $\mu(A_j) = 0$, 并且 $\nu_j(X \setminus A_j) = 0$. 取 $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. 由 μ 的可列可加性,

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j) = 0$$

然后计算 $\sum_{j=1}^\infty \nu_j$ 在 $X \setminus A$ 上的测度,

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \nu_j\right)(X \setminus A) = \sum_{j=1}^\infty \nu_j(X \setminus A) \leq \sum_{j=1}^\infty \nu_j(X \setminus A_j) = 0$$

从而说明 $\sum_{j=1}^\infty \nu_j \perp \mu$.

(ii) 每个 $\nu_j \ll \mu$, 存在 $\mu(E) = 0$, 那么 $\nu_j(E) = 0$, 令 $\nu = \sum_{j=1}^\infty \nu_j$, 于是

$$\nu(E) = \left(\sum_{j=1}^\infty \nu_j\right)(E) = \sum_{j=1}^\infty \nu_j(E) = \sum_{j=1}^\infty 0 = 0.$$

所以 $\sum_{j=1}^\infty \nu_j \ll \mu$.

题目 15.9. 对 $j = 1, 2$, 令 μ_j, ν_j 是 $(X_j, \mathcal{M}_j)$ 上的 σ -有限测度且 $\nu_j \ll \mu_j$ 。证明: $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ 且

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2), \quad (\mu_1 \times \mu_2)\text{-a.e.}$$

解答. 这是啥, 过于困难。

记

$$f_j = \frac{d\nu_j}{d\mu_j}, \quad j = 1, 2.$$

由于 $\nu_j \ll \mu_j$ 且测度均为 σ -有限, 由 Radon–Nikodym 定理知

$$d\nu_j = f_j d\mu_j, \quad j = 1, 2.$$

令

$$g(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2).$$

下面证明 g 是 $\nu_1 \times \nu_2$ 关于 $\mu_1 \times \mu_2$ 的 Radon–Nikodym 导数。

对任意可测矩形 $A \times B$, 其中 $A \in \mathcal{M}_1$, $B \in \mathcal{M}_2$, 由 Tonelli 定理,

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} g d(\mu_1 \times \mu_2) &= \int_{A \times B} f_1(x_1)f_2(x_2) d(\mu_1 \times \mu_2) \\ &= \left(\int_A f_1 d\mu_1 \right) \left(\int_B f_2 d\mu_2 \right) \\ &= \nu_1(A)\nu_2(B) \\ &= (\nu_1 \times \nu_2)(A \times B). \end{aligned}$$

因此, 测度

$$E \mapsto \int_E g d(\mu_1 \times \mu_2)$$

与 $\nu_1 \times \nu_2$ 在所有可测矩形上相等。由于可测矩形生成 $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, 且相关测度为 σ -有限, 由测度唯一性可知, 对任意 $E \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$,

$$(\nu_1 \times \nu_2)(E) = \int_E g d(\mu_1 \times \mu_2).$$

于是若 $(\mu_1 \times \mu_2)(E) = 0$, 则

$$(\nu_1 \times \nu_2)(E) = \int_E g d(\mu_1 \times \mu_2) = 0.$$

所以

$$\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2.$$

并且由 Radon–Nikodym 导数的定义,

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2),$$

其中等式在 $(\mu_1 \times \mu_2)$ -几乎处处意义下成立。

题目 15.10. 令 $X = [0, 1]$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, $m = \text{Lebesgue 测度}$, $\mu = \mathcal{M}$ 上的计数测度。证明:

(i) $m \ll \mu$, 但对任何 f 有 $dm \neq f d\mu$;

(ii) μ 关于 m 不存在 Lebesgue 分解。

解答. (i) 设 $E \in \mathcal{M}$, 假如 $\mu(E) = 0$, 则 E 是空集, 所以 $m(E) = 0$, 所以 $m \ll \mu$.

假设存在 f , $dm = f d\mu$, 则对任意 $E \in \mathcal{M}$, 有

$$m(E) = \int_E f d\mu$$

令 $E = \{x_0\}$, 则

$$0 = m(\{x_0\}) = \int_E f d\mu = f(x_0)$$

由于 $x_0 \in X$ 是任意的, 所以 $f = 0$. 但这样的话取 $E = X$, 就会得到

$$1 = m(E) = \int_E 0 d\mu = 0$$

矛盾! 所以不存在这样的 f .

(ii) 假设 μ 关于 m 有 Lebesgue 分解, 则存在正测度 ν, λ , 使得

$$\mu = \nu + \lambda$$

其中 $\nu \ll m, \lambda \perp m$. 由 $\lambda \perp m$, 存在 $A \in \mathcal{M}$, 使得 $m(A) = 0, \lambda(X \setminus A) = 0$, 由于 $m(X) = 1$, 所以 $m(X \setminus A) = 1$, 因此 $X \setminus A \neq \emptyset$. 取一点 $x_1 \in X \setminus A$, 则

$$\lambda(\{x_1\}) \leq 0 \implies \lambda(\{x_1\}) = 0$$

另一方面, 由于 $\nu \ll m$, 所以由于 $m(\{x_1\}) = 0$, 于是 $\nu(\{x_1\}) = 0$, 所以

$$1 = \mu(\{x_1\}) = (\nu + \lambda)(\{x_1\}) = 0$$

矛盾! 从而不存在关于 m 的 Lebesgue 分解。

题目 15.11. 设 μ, ν 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的 σ -有限测度且 $\nu \ll \mu$, 令 $\lambda = \mu + \nu$. 证明: 若 $f = d\nu/d\lambda$, 则 $0 \leq f < 1$ λ -a.e. 且 $d\nu/d\mu = f/(1-f)$.

解答. $f \geq 0$ 由测度非负决定. 所以只需要证明 $f < 1$ λ -a.e.. 令

$$A_n = \left\{ x : f(x) > 1 + \frac{1}{n} \right\}$$

则

$$\nu(A_n) = \int_{A_n} f d\lambda \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \lambda(A_n)$$

但因为 $\lambda = \mu + \nu$, 所以

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \lambda(A_n) \leq \nu(A_n) \leq \lambda(A_n)$$

所以 $\lambda(A_n) = 0$, 所以

$$\lambda(\{f(x) > 1\}) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 \implies f \leq 1 \text{ } \lambda\text{-a.e.}$$

然后假如 $f = 1$, 令 $A = \{x : f(x) = 1\}$,

$$\nu(A) = \int_A f d\lambda = \lambda(A) \implies \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$$

所以几乎处处不等于 1。综合来说, $0 \leq f < 1$ λ -a.e.

然后因为

$$d\mu = d\lambda - d\nu = (1 - f) d\lambda$$

所以对任意 $E \in \mathcal{M}$, 有

$$\int_E \frac{f}{1-f} d\mu = \int_E f d\lambda = \int_E d\nu = \nu(E)$$

所以

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{f}{1-f}.$$