

实分析 (2025-2026 春季学期)

作业 1

习题 1.1. 设 A_n 是如下一列点集:

$$A_{2m+1} = \left[0, 2 - \frac{1}{2m+1}\right], \quad m \in \mathbb{N},$$
$$A_{2m} = \left[0, 1 + \frac{1}{2m}\right], \quad m \in \mathbb{N}.$$

求 $\limsup A_n$ 和 $\liminf A_n$.

习题 1.2. 设 $\{A_n\}$ 是一列集合, 作 $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i), n = 2, 3, \dots$, 证明 $\{B_n\}$ 是一列互不相交的集合, 而且 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n B_i, n \in \mathbb{N}$.

习题 1.3. 给定一个集簇 $F_1, \dots, F_n$, 构造另一个集簇 $F_1^*, \dots, F_N^*$, 其中 $N = 2^n - 1$, 使得 $\bigcup_{k=1}^n F_k = \bigcup_{j=1}^N F_j^*$, 且 $\{F_j^*\}$ 互不相交, 且对每个 $k, F_k = \bigcup_{F_j^* \subset F_k} F_j^*$.

提示 考察 2^n 个集合 $F'_1 \cap F'_2 \cap \dots \cap F'_n$, 其中每个 F'_k 为 F_k 或 F_k^c .

习题 1.4. 证明:

- (i) $E \triangle \emptyset = E, E \triangle E = \emptyset, E \triangle E^c = X, E \triangle X = E^c$, 其中 X 为全集.
- (ii) 交换律: $E \triangle F = F \triangle E$.
- (iii) 结合律: $(E \triangle F) \triangle G = E \triangle (F \triangle G)$.
- (iv) 交与对称差满足分配律: $E \cap (F \triangle G) = (E \cap F) \triangle (E \cap G)$.
- (v) $E^c \triangle F^c = E \triangle F; E = E \triangle F$ 当且仅当 $F = \emptyset$.
- (vi) 对任意的集合 E 与 F , 存在唯一的集合 G , 使得 $E \triangle G = F$ (实际上 $G = E \triangle F$).

习题 1.5. 设有集合列 $\{A_n\}, \{B_n\}$, 试证明

- (i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \cup \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n\right);$
- (ii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) = \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \cap \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n\right).$

习题 1.6. 证明 $[a, b]$ 上的全体连续函数组成的集合 $C([a, b])$ 的势为 $\aleph$.

习题 1.7. 从良序原理证明 Zorn 引理.