

第1周实分析作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

2026 年 3 月 9 日

问题 1. 设 A_n 是如下一列点集:

$$A_{2m+1} = \left[0, 2 - \frac{1}{2m+1}\right], \quad m \in \mathbb{N},$$

$$A_{2m} = \left[0, 1 + \frac{1}{2m}\right], \quad m \in \mathbb{N}.$$

求 $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ 和 $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$.

解答. n 为奇数时, A_n 递增到 $[0, 2)$; n 为偶数时, A_n 递减到 $[0, 1]$.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \mid \text{存在无穷多 } n, x \in A_n\} = [0, 2)$$

因为任意 $x \in [0, 2)$, 都会存在无穷多个 m , 使得 $x \in A_{2m+1}$.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \mid n \text{ 充分大后均有 } x \in A_n\} = [0, 1]$$

当 n 充分大后, $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 2) \cap [0, 1] = [0, 1]$.

问题 2. 设 $\{A_n\}$ 是一列集合, 作 $B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right), n = 2, 3, \dots$, 证明 $\{B_n\}$ 是一列互不相交的集合, 而且 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n B_i, n \in \mathbb{N}$.

解答. 使用数学归纳法. $B_2 = A_2 \setminus A_1$ 与 $B_1 = A_1$ 没有交集。

假设 $n = k$ 时, $B_1, \dots, B_k$ 互不相交。当 $n = k + 1$,

$$B_{k+1} = A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \{x \mid x \in A_{k+1} \text{ 且 } x \notin A_i, i = 1, 2, \dots, k\}$$

因为 $B_i \subset A_i$, B_{k+1} 中所有的元素都不属于任何一个 A_i , 故 B_{k+1} 与 $B_1, \dots, B_k$ 均无交集。

由数学归纳法可得, $\{B_n\}$ 是一列互不相交的集合。

第二个仍然用数学归纳法。我想要证明:

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n \left[A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) \right] = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

$n = 1$ 显然成立。

假设 $n = k$ 时, 等式成立。当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{k+1} \left[A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) \right] &= \bigcup_{i=1}^k \left[A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) \right] \cup \left[A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right) \right] \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) \cup \left[A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right) \right] \\ &= \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \end{aligned}$$

由数学归纳法, 对任意的 n , 有 $\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n \left[A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right) \right] = \bigcup_{i=1}^n A_i$ 。

问题 3. 给定一个集族 $F_1, \dots, F_n$, 构造另一个集族 $F_1^*, \dots, F_N^*$, 其中 $N = 2^n - 1$, 使得 $\bigcup_{k=1}^n F_k =$

$\bigcup_{j=1}^N F_j^*$, 且 $\{F_j^*\}$ 互不相交, 且对每个 k , $F_k = \bigcup_{F_j^* \subset F_k} F_j^*$ 。

提示: 考察 2^n 个集合 $F'_1 \cap F'_2 \cap \dots \cap F'_n$, 其中每个 F'_k 为 F_k 或 F_k^c 。

解答. $F_1^*, \dots, F_N^*$ 从集合 $\{F'_1 \cap F'_2 \cap \dots \cap F'_n\} - \{F_1^c \cap F_2^c \cap \dots \cap F_n^c\}$ 中选择, 其中每个 F'_k 为 F_k 或 F_k^c 。

下面挨着验证这三个:

1. 互不相交。对任意不同的 i, j , F_i^*, F_j^* 至少一个含有 F_k , 一个含有 F_k^c 。所以必然不相交。

2. $F_k = \bigcup_{F_j^* \subset F_k} F_j^*$ 。用数学归纳法, 假设 $n - 1$ 的时候成立, 那么

$$\bigcup_{F_j^* \subset F_k} F_j^* = \bigcup_{F_j^* \subset F_k} \left[F_k \cap \left(\bigcap_{i \neq k} F'_i \right) \right] = F_k \cap \bigcup_{i \neq k} \bigcap_{i \neq k} F'_i = F_k$$

因此 n 的时候也成立。所以 $F_k = \bigcup_{F_j^* \subset F_k} F_j^*$ 。

3. $\bigcup_{k=1}^n F_k = \bigcup_{j=1}^N F_j^*$ 。由2可以直接得到。

问题 4. 证明:

- (i) $E \Delta \emptyset = E, E \Delta E = \emptyset, E \Delta E^c = X, E \Delta X = E^c$, 其中 X 为全集.
- (ii) 交换律: $E \Delta F = F \Delta E$.
- (iii) 结合律: $(E \Delta F) \Delta G = E \Delta (F \Delta G)$.
- (iv) 交与对称差满足分配律: $E \cap (F \Delta G) = (E \cap F) \Delta (E \cap G)$.
- (v) $E^c \Delta F^c = E \Delta F$; $E = E \Delta F$ 当且仅当 $F = \emptyset$.
- (vi) 对任意的集合 E 与 F , 存在唯一的集合 G , 使得 $E \Delta G = F$ (实际上 $G = E \Delta F$).

解答. (i)

$$E \Delta \emptyset = (E \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus E) = E \cup \emptyset = E, \quad E \Delta E = (E \setminus E) \cup (E \setminus E) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

$$E \Delta E^c = (E \setminus E^c) \cup (E^c \setminus E) = E \cup E^c = X, \quad E \Delta X = (E \setminus X) \cup (X \setminus E) = E^c \cup E^c = E^c$$

(ii)

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) = (F \setminus E) \cup (E \setminus F) = F \Delta E$$

(iii)

$$\begin{aligned} (E \Delta F) \Delta G &= [(E \setminus F) \cup (F \setminus E)] \Delta G \\ &= [(E \setminus F) \cup (F \setminus E)] \setminus G \cup (G \setminus [(E \setminus F) \cup (F \setminus E)]) \\ &= [E \setminus (F \cup G)] \cup [F \setminus (E \cup G)] \cup [G \setminus (E \cup F)] \cup [E \cap F \cap G] \\ &= (E \setminus [(F \setminus G) \cup (G \setminus F)]) \cup [(F \setminus G) \cup (G \setminus F)] \setminus E \\ &= E \Delta [(F \setminus G) \cup (G \setminus F)] \\ &= E \Delta (F \Delta G) \end{aligned}$$

(iv) 左边:

$$\begin{aligned} E \cap (F \Delta G) &= E \cap [(F \setminus G) \cup (G \setminus F)] = [E \cap (F \setminus G)] \cup [E \cap (G \setminus F)] \\ &= (E \cap F \cap G^c) \cup (E \cap G \cap F^c) \end{aligned}$$

右边 $(E \cap F) \Delta (E \cap G) = [(E \cap F) \setminus (E \cap G)] \cup [(E \cap G) \setminus (E \cap F)]$, 其中

$$(E \cap F) \setminus (E \cap G) = \{x \in E \cap F \mid x \notin E \cap G\}$$

由于 $x \in E$, 所以 $x \notin E \cap G$ 等价于 $x \notin G$. 即

$$(E \cap F) \setminus (E \cap G) = E \cap F \cap G^c$$

同理

$$(E \cap G) \setminus (E \cap F) = E \cap G \cap F^c$$

所以, 左边等于右边, 于是 $E \cap (F \triangle G) = (E \cap F) \triangle (E \cap G)$.

(v) 先证明 $E^c \triangle F^c = E \triangle F$. $E^c \triangle F^c = E \triangle F \Leftrightarrow (E^c \cap F) \cup (F^c \cap E) = (E \cap F^c) \cup (F \cap E^c)$, 仅仅是顺序的交换, 成立。

再证明 $E = E \triangle F$ 当且仅当 $F = \emptyset$.

“ $\Rightarrow$ ”: 两边同时对 E 做对称差, $E = E \triangle F \Rightarrow E \triangle E = E \triangle (E \triangle F) \Rightarrow \emptyset = F$

“ $\Leftarrow$ ”: 由(i)成立。

(vi) 首先验证 $E \triangle (E \triangle F) = F$. 由结合律,

$$E \triangle (E \triangle F) = (E \triangle E) \triangle F = \emptyset \triangle F = F$$

再证明 G 是唯一的。假如存在 $G' \neq G$, 且 $E \triangle G' = F$. 于是

$$E \triangle G = E \triangle G'$$

两边同时对 E 做对称差, 有

$$E \triangle (E \triangle G) = E \triangle (E \triangle G') \Rightarrow G = G'$$

于是矛盾, 可知 G 是唯一的。

问题 5. 设有集合列 $\{A_n\}, \{B_n\}$, 试证明

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) &= \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cup \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n \right); \\ \text{(ii)} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) &= \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cap \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n \right). \end{aligned}$$

解答. (i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = \{x \mid \text{存在无穷多 } n, x \in A_n \cup B_n\} = \{x \mid \text{存在无穷多 } n, x \in A_n \text{ 或 } x \in B_n\}$,

于是 x 要么属于无穷多个 A_n , 要么属于无穷多个 B_n , 或者都属于, 所以 $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) \subset \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cup \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n \right)$.

反过来, 如果 x 要么属于无穷多个 A_n , 要么属于无穷多个 B_n , 那么自然就属于无穷多个 $A_n \cup B_n$, 所以 $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) \supset \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cup \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n \right)$.

综上, $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cup \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n \right)$.

(ii) $x \in \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n)$, 意味着当 n 充分大后, $x \in A_n$ 且 $x \in B_n$, 于是 $x \in \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cap \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n \right)$, 所以 “ $\subset$ ” 成立。

$x \in \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cap \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n \right)$, 就意味着当 n 充分大之后, $x \in A_n$ 并且 $x \in B_n$, 于是 $x \in A_n \cap B_n$, 于是 “ $\supset$ ” 成立。

综上, $\liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) = \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cap \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n \right)$.

问题 6. 证明 $[a, b]$ 上的全体连续函数组成的集合 $C([a, b])$ 的势为 $\aleph$.

解答. 由于 $\text{card}(\mathbb{R}) = \aleph$, 先证明 $\text{card}(C([a, b])) \geq \text{card}(\mathbb{R})$. 由于 $\{f(x) = ax\}, a \in \mathbb{R}$ 是 $C([a, b])$ 的真子集, 且与 $\mathbb{R}$ 一一对应, $a \mapsto f(x) = ax$, 故 $\text{card}(C([a, b])) \geq \text{card}(\mathbb{R})$.

再证明 $\text{card}(C([a, b])) \leq \text{card}(\mathbb{R})$. 定义映射: $\alpha: C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q} \cap [a, b]}, f \mapsto f|_{\mathbb{Q} \cap [a, b]}$. 如果连续函数不同, 那他们在有理数点的取值不会完全相同, 所以 α 是单射. 所以 $\text{card}(C([a, b])) \leq \text{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{Q} \cap [a, b]}) = \aleph$.

综上, $\text{card}(C([a, b])) = \aleph$.

问题 7. 从良序原理证明 Zorn 引理.

解答. 设 $(X, \leq)$ 是一个非空半序集, 且 X 的每个非空全序子集都有上界. 由良序原理, 存在一个序 $\leq$, 使得 X 是一个全序集.

先任意选取一个 $a \in X$, 定义 $C = \{a\}$. 然后定义 $C_x := \{y \in C \mid y \leq x\}$, 这样, x 就是 C 的一个上界, 并将 x 加入到 C 中, 然后重复此操作. 这样, C 是一个非空全序集且是极大的. 因为假设 $z \notin C$ 且 z 大于 C 中所有元素, 那么 $z \in C$, 矛盾.

有假设, C 有上界 m . 假设 m 不是 X 的极大元, 那么就存在 $m \leq n$, 但是 n 应该属于 C 但不属于 C , 矛盾! 所以 m 就是极大元.