

可数公理

LJL

	子空间	积空间	连续像
C_1	✓	可数积	✗ 连续开映射可以
C_2	✓	可数积	✗ 连续开映射可以
Lindelöf	✗ [Munkres, 30节, 例5] 闭子空间可以	✗ [Munkres, 30节, 例4] $X: \text{Lindelöf}, Y \text{ 紧 } \Rightarrow X \times Y \text{ Lindelöf}$	✓
可分性	✗ (闭子空间也有反例) 开子空间可以	可数积	✓

$X: C_1$: 每点~~附近~~^(开)有可数邻域基 即 $\forall x \in X, \exists \{O_n\}, O_n \text{ 开 } (x \in O_n); \forall U \text{ 开 } (x \in U), \exists n, x \in O_n \subseteq U$

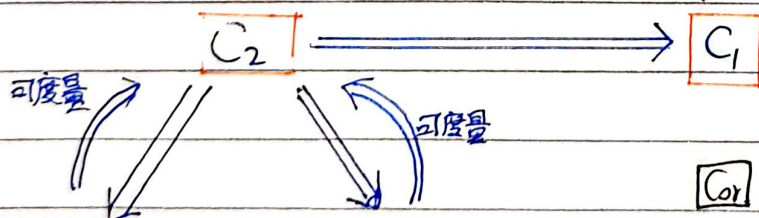
$X: C_2$: 有个拓扑基可数.

~~$\forall U \text{ 开 }, \exists n, x \in O_n \subseteq U$~~

$X: \text{Lindelöf}$: 每个开覆盖存在可数子覆盖.

X 可分 : 存在可数稠密子集

• f 在 x 处连续 $\Rightarrow \forall x_n \rightarrow x$, 则 $f(x_n) \rightarrow f(x)$
 $\xrightarrow{\text{在 } x \text{ 处 } C_1}$
 • $\exists x_n \in A, x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in A$
 $\xrightarrow{\text{在 } x \text{ 处 } C_1}$



[Cor] 对度量空间, $C_2 / \text{Lindelöf} / \text{可分}$

紧 $\Rightarrow$ Lindelöf

可分

子空间, 可数积空间, 连续像...
 要求也是可度量

注①“有限”在上述所有“可数”范围内, 如: X, Y 均 $C_2 \Rightarrow X \times Y: C_2$

X 存在有限基, 也是 C_2 的

②“连续像”: X 可分, $f: X \rightarrow Y$ 连续 $\Rightarrow f(X)$ 可分 (子空间拓扑) [不妨设 $Y = f(X)$]

③“✗”代表存在反例, 并不表示“一定不成立”; “✓”表示一定成立。

“可数积”: 可数多个积空间的...; 不表示“其他情况一定不成立”。

Date

No.

相关证明

1. 一点处 G 的性质

(1) $f: X \rightarrow Y, x \in X$ ① f 在 x 处连续 $\Rightarrow \forall x_n \rightarrow x, f(x_n) \rightarrow f(x)$

② x 在 x 处 G 时, 反之也成立

(2) $A \subseteq X, x \in X$ ① $\exists x_n \in A, x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in \bar{A}$

② x 在 x 处 G 时, 反之也成立.

$\exists V(x), x \in V \subseteq f^{-1}(U)$

$x_n \in V \Rightarrow f(x_n) \in U$

pf. (1) ① $\forall V(f(x))$

$\Rightarrow \exists N, \forall n \geq N, x_n \in V$

② [Lem] x 在 x 处 G, 则 $\exists \{O_n\}_{n=1}^{\infty}, O_n$ 开, $O_n \supseteq O_{n+1}, \forall n$

$\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 x 处邻域基

pf. 取可数邻域基 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$, 取 $O_n := U_1 \cap \dots \cap U_n$ 即可.

Back.

假设 f 在 x 处不连续: $\exists V(f(x)), \forall V(x), V - f^{-1}(U) \neq \emptyset$

$\therefore \forall n, \exists x_n \in O_n - f^{-1}(U)$

断言: $x_n \rightarrow x: \forall W(x), \exists n_0, O_{n_0} \subseteq W$

$\therefore \forall n \geq n_0, x_n \in O_n \subseteq O_{n_0} \subseteq W$

由条件得: $f(x_n) \rightarrow f(x)$ 但 $f(x_n) \notin U, \forall n$ 矛盾.

(2) ① $\forall V(x), \exists N, \forall n \geq N, x_n \in U$ 即 $U \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$

② 取可数邻域基 $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}, O_n \supseteq O_{n+1}, \forall n$

$\forall n, O_n \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_n \in O_n \cap A$. 易证 $x_n \rightarrow x$ (上述同样方法)

2. 等价公理的关系

0. $C_2 \Rightarrow C_1$

(2) $C_2 \Rightarrow$ Lindelöf

(3) $C_2 \Rightarrow$ 可分

(4) X 是度量空间时, ① Lindelöf $\Rightarrow C_2$

② 可分 $\Rightarrow C_2$

pf. (1) 对于可数基 β , 令 $\beta_x := \{B \in \beta \mid x \in B\}$ ($\forall x$)

则 β_x 是 x 处可数邻域基.

②

1100 设可数基为 $\{B_n\}$ (无论可数无限, 还是有限).

(2) $\forall$ 开覆盖 $\mathcal{A}$,

$\forall n$, 若 $\exists A \in \mathcal{A}$, $B_n \subseteq A$ 就取出 A , 记作 A_n

得到开族 $\tilde{\mathcal{A}}$

断言: $\tilde{\mathcal{A}}$ 是 X 的开覆盖

按 x 为指标取, 太多
就按 B_n 取

$\forall x \in X, \exists A \in \tilde{\mathcal{A}}$; 对于 $x \in A, \exists n, x \in B_n \subseteq A$. (主要)

对于 $B_n, \exists A_n \in \tilde{\mathcal{A}}$ 且 $x \in A_n$.

显然 $\tilde{\mathcal{A}}$ 可数.

(3) $\forall n, \text{取 } x_n \in B_n \text{ 得到可数集 } A \subseteq X$

断言: $A = X$

$\forall x \in X, \forall U(x), \exists n, x \in B_n \subseteq U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$ (取 x_n)

$\therefore x \in \bar{A}$

(4) $\forall n$, 对于开覆盖 $\{B(x, \frac{1}{n})\}_{x \in X}$, 存在可数子覆盖 β_n

定义 $\beta := \{B \in \beta_n | n \in \mathbb{N}_+\}$ 则 β 可数

断言: β 是拓扑基

$\forall x \in X, \forall U(x)$ 开, 且 $x \in U$

$\exists r > 0$, 取 $B(x, r) \subseteq U$.

设 n 满足: $\frac{1}{n} < r$

由于 β_n 是开覆盖, $\exists x' \in X, x \in B(x', \frac{1}{n})$

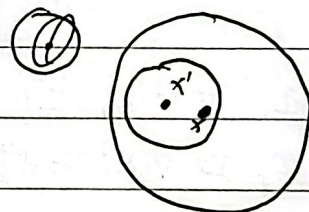
断言: $B(x', \frac{1}{n}) \subseteq B(x, r)$

$\forall y \in B(x', \frac{1}{n})$ 则 $d(y, x) \leq d(y, x') + d(x', x)$

$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < r$

$\therefore y \in B(x, r)$

$\therefore \exists B(x', \frac{1}{n}) \in \beta, B(x', \frac{1}{n}) \subseteq U$.



②. 取可数稠密子集 $A \subseteq X, \beta := \{B(a, p) | a \in A, p > 0, p \in \mathbb{Q}\}$ 则 β 可数.

断言: β 是拓扑基.

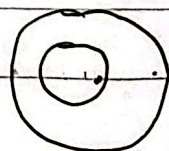
$\forall x \in X, \forall U(x)$ 开, 则 $\exists r \in \mathbb{Q}_+, B(x, r) \subseteq U$.

对于 $B(x, r), \exists a \in A, a \in B(x, r)$

断言: $B(a, r) \subseteq U$.

$\forall y \in B(a, r), d(y, x) \leq d(y, a) + d(a, x) < r + r = 2r$

$\therefore B(a, r) \subseteq B(x, 2r) \subseteq U$.



/ /

Date

No.

$$\therefore B \in \beta, x \in B \subseteq U$$

$\therefore \beta$ 是可数拓扑基.

3. C_1 与 C_2

(1) ① $A \subseteq X, a \in A, X$ 在 a 处 $C_1 \Rightarrow A$ 在 a 处 C_1

② X_i 在 x_i 处 $C_1 \Rightarrow \prod_i X_i$ 在 (x_i) 处 C_1

(2) ① C_2 空间子空间 C_2 ② C_2 空间的积空间 C_2

(3) $f: X \rightarrow Y$ 连续

① 举例说明 ① $X: C_1$ 但 $f(X)$ 不 C_1

② $X: C_2$, 但 $f(X)$ 不 C_2

(4) $f: X \rightarrow Y$ 连续开映射.

① $X: C_1 \Rightarrow f(X) C_1$ (更准确 X 在 x 处 $C_1 \Rightarrow Y$ 在 $f(x)$ 处 C_1)

② $X: C_2 \Rightarrow f(X) C_2$

证. (1) ① X 在 a 处有可数拓扑基 β , 则 $\{B \cap A \mid B \in \beta\}$ 是 A 在 a 处可数拓扑基.

② X_i 在 x_i 处有 $\sim \beta_i$;

$$A_n = \{A \cap A_k \mid \text{当 } 1 \leq k \leq n, A_k \in \beta_k \text{ or } A_k = X_k \\ \text{当 } k > n, A_k = X_k\}$$

则 $A = \bigcup A_n$ 可数

断言: A 是 $\prod X_i$ 在 (x_i) 处拓扑基 (不用证, 这是积空间拓扑基的结论)

$\forall U$ 为 (x_i) 开邻域, 则 $\exists N, U_i \subseteq X_i$ 开 $\forall i \leq N$ 且 $i > N$ 时 $U_i = X_i$

$$\text{s.t. } (x_i)_i \in \prod U_i \subseteq U$$

$\forall 1 \leq i \leq N$, 由于 β_i 是 X_i 处拓扑基, $\exists B_{ni} \in \beta_i, x_i \in B_{ni} \subseteq U_i$

$$\text{令 } B_i = X_i \text{ (} i > N \text{) 则 } \prod B_i \in \mathcal{B} \\ (x_i)_i \in \prod B_i \subseteq \prod U_i \subseteq U$$

(2) ① X 有可数基 $\{B_n\}_1^\infty \Rightarrow A$ 有可数基 $\{A \cap B_n\}_1^\infty$.

② 与前面类似.

设 X_i 有可数基 B_n

or $A_i = X_i$

$$A_n := \{ \bigcap_{i=1}^n A_i \in \pi X_i \mid 1 \leq i \leq n \text{ 时, } A_i \in \beta_i; i > n \text{ 时, } A_i = X_i \}$$

7) $A_n := \bigcap_{i=1}^n A_i$ 可数.

断言: A 是拓扑基. (不用证, 这是拓扑空间的结论, 拓扑基标准形式论)

$$\forall (x_i)_i \in \pi X_i, \forall U(x_i)_i \subseteq \pi X_i \text{ 开}$$

$$\exists N, (x_i)_i \in \bigcap_{i=1}^N U_i \subseteq U \text{ 开}, U_i = X_i \ (i > N)$$

对于

对 $1 \leq i \leq N$, 由于 β_i 是拓扑基, $\exists B_i \in \beta_i, x_i \in B_i \subseteq U_i$

$$\text{令 } B_i = X_i \ (i > N)$$

$$\Rightarrow (x_i)_i \in \bigcap_{i=1}^N B_i \subseteq \bigcap_{i=1}^N U_i \subseteq U$$

$$\bigcap_{i=1}^N B_i \in A_N \subseteq A$$

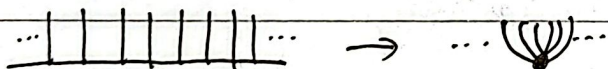
$\therefore A$ 是拓扑基.

(3) ~~只需~~ 只需找一个连续满射, $f: X \rightarrow Y, X: \mathbb{Q}$, 但 $Y \neq \mathbb{C}$,

(ps: 前面性质好; 后面性质很差, 可找商映射.)

pf: ~~$f: \mathbb{Z} \times [0,1] \rightarrow Y$~~

$$X := \mathbb{Z} \times [0,1] \quad Y := X/\sim, (n,0) \sim (m,0), \text{ 设 } y_0 = [0,0]$$



显然 $X: \mathbb{Q}$

断言: 0 是 y_0 的邻域 $\Rightarrow \exists a_n \in (0,1), n \in \mathbb{Z}$ s.t.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{n\} \times [0, a_n] \subseteq p^{-1}(0)$$

$$\text{pf: } \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, (n,0) \in p^{-1}(0)$$

$$\therefore \exists a_n \in (0,1), (n,0) \in \{n\} \times [0, a_n] \subseteq p^{-1}(0)$$

$$\therefore \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{n\} \times [0, a_n] \subseteq p^{-1}(0)$$

~~拓扑基~~



断言: Y 在 y_0 处不是 $\mathbb{Q}$ 的.

反证: 假设 Y 在 y_0 处是 $\mathbb{Q}$ 的, 取可数邻域基 $\{O_n\}$ (该邻域没有可数极限)

$$\therefore \forall n, \exists a_n, k \text{ s.t. } \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\} \times [0, a_n, k] \subseteq O_n$$

取 $V := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{k\} \times [0, \frac{1}{2} a_{k,k})$ 则 $p^{-1}p(V) = V$, $\therefore p(V)$ 是 V_0 开邻域.

$\therefore \exists N, y_0 \in Q_N \subseteq p(V)$

$\therefore p^{-1}(Q_N) \subseteq V$

$\therefore \forall k, p(\{k\} \times [0, a_{N,k})) \subseteq \{k\} \times [0, \frac{a_{k,k}}{2})$

$\therefore a_{N,N} < \frac{1}{2} a_{N,N}$ 矛盾

~~4. Lindelöf.~~

4. (1) $A \subseteq X$ 闭, $X: \text{Lindelöf} \Rightarrow A$ 也 Lindelöf

(2) $X: \text{Lindelöf}, Y \text{ 紧} \Rightarrow X \times Y \text{ Lindelöf.}$

(3) $f: X \rightarrow Y$ 连续, $X: \text{Lindelöf} \Rightarrow f(X) \text{ Lindelöf.}$

(4) 证明来自于后理

Lem. $f: X \rightarrow Y$ 连续开映射, 则 f 保持邻域基, ~~保持~~

$Y = f(X)$ 时 f 保持拓扑基.

pf. 设 X 在 x_0 处有邻域基 $\mathcal{A}$, 要证 $f(\mathcal{A})$ 是 $f(x_0)$ 处邻域基.

$\forall U$ 开, $f^{-1}(U)$ 是 x_0 开邻域

$\therefore \exists A \in \mathcal{A}, x_0 \in A \subseteq f^{-1}(U) \Rightarrow f(x_0) \in f(A) \subseteq U$

设 X 有拓扑基 β , 要证 $f(\beta)$ 是 $f(X) = Y$ 的拓扑基.

$\forall U$ 开, 取 $x_0 \in f^{-1}(U)$

对于 $f^{-1}(U)$ 有, $\exists B \in \beta, x_0 \in B \subseteq f^{-1}(U)$

$\therefore f(B) \subseteq f(f^{-1}(U)) \subseteq U$

4. Lindelöf

(1) $A \subseteq X$ 闭, $X: \text{Lindelöf} \Rightarrow A$ 也 Lindelöf.

(2) ~~$A \subseteq X$~~ $X: \text{Lindelöf}, Y \text{ 紧} \Rightarrow X \times Y$ 也 Lindelöf. (ps: 紧 $\Rightarrow$ Lindelöf)

(3) $f: X \rightarrow Y$ 连续, $X: \text{Lindelöf} \Rightarrow f(X)$ 也 Lindelöf.

注: (1), (2), (3) 中可把 "Lindelöf" 换成 "紧", 命题仍然成立, 证明基本一样, 并且更常用.

设 (1). $\forall A$ 的开覆盖 $\mathcal{A}$, 则由子空间拓扑的定义, $\exists \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{Z}^X$

由子空间拓扑的定义, $\forall U \in \mathcal{A}$, $\exists V \subseteq X$ 开, $U = V \cap A$

这样得到 X 中开族 $\mathcal{A}'$ 满足: $\mathcal{A}' \xleftrightarrow{\text{双射}} \mathcal{A}$

$$V \longrightarrow V \cap A$$

(注: ~~子空间~~ 开覆盖 等价描述,

总结 $\textcircled{1} A \subseteq X$, $\mathcal{A}$ 为 A 上开族 ($\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Z}^A$), 则 $\exists \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{Z}^X$

双射: $\cap A: \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$

$\textcircled{2} A \subseteq X$, $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{Z}^X$, $A \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{A}'} V$ 则 $\mathcal{A}' \cap A := \{V \cap A: V \in \mathcal{A}'\}$ 为 A 上开族 ($\subseteq \mathcal{Z}^A$)

设 $\beta := \mathcal{A}' \cup \{A^c\}$ 则 β 是 X 上开覆盖

由 X : Lindelöf $\Rightarrow \beta$ 存在可数子覆盖 β_0

$\therefore \{V \cap A \mid V \in \beta_0, V \neq A^c\} = (\beta_0 - \{A^c\}) \cap A$ 是 A 上 $\mathcal{A}$ 的可数覆盖.
(无论是可数无限还是有限均对).

(2) 任取 $X \times Y$ 上一个开覆盖 $\mathcal{A}$.

$\forall x \in X$,

$\forall y \in Y, \exists A \in \mathcal{A}, (x, y) \in A \Rightarrow \exists U \subseteq X$ 开, $V \subseteq Y$ 开: $(x, y) \in U \times V \subseteq A$.

$\{V_y\}_{y \in Y}$ 是 Y 上一个开覆盖 $\xrightarrow{Y \text{ 紧}} \exists$ 有限子覆盖 $V_1, \dots, V_{n_x}$

令 $U_x := U \cap V_1 \cap \dots \cap V_{n_x}$, $V_{x,i} := V_i$, $I_x := \{1, \dots, n_x\}$. (ps: U_x 仍是开集

$\therefore \forall i \in I_x, \exists A \in \mathcal{A}, U_x \times V_{x,i} \subseteq A$. 但是如早 X 是 Lindelöf 此时同样方法无法保证 U_x 开)

$\{U_x\}_{x \in X}$ 是 X 上开覆盖 $\xrightarrow{X: \text{Lindelöf}} \exists$ 可数子覆盖 $\{U_{x_n}\}$ (ps: 无论 X 是否可数 还是有限, 均可)

断言: $\{U_{x_n} \times V_{x_n,i}\}_{n \in \mathbb{N}, i \in I_{x_n}}$ 是 $X \times Y$ 上一个开覆盖. (ps: 可数)

$\forall (x, y) \in X \times Y, \exists n, x \in U_{x_n}$; 对 Y 上开覆盖 $\{V_{x_n,i}\}_i, \exists i_0, y \in V_{x_n,i_0}$

$\therefore (x, y) \in U_{x_n} \times V_{x_n,i_0}$

对每个 $U_{x_n} \times V_{x_n,i}$, $\exists A \in \mathcal{A}, U_{x_n} \times V_{x_n,i} \subseteq A$, 得到 $\mathcal{A}$ 的一个可数子覆盖.

(3) $\forall f$ 的开覆盖 $\mathcal{A}$ $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

则 $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ 是 X 上开覆盖 $\xrightarrow{X: \text{Lindelöf}} \exists J \subseteq I, \#J \text{ 可数}, \{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ 是 X 上可数子覆盖

$\therefore \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 是 $f(X)$ 上可数子覆盖.

5. (可分性)

(1) 举例说明 可分空间的子空间不一定可分.

(2) X 可分, $V \subseteq X$ 开, 证明: V 可分

(3) X_i 可分 $\Rightarrow$ 证明 $\prod_{i \in I} X_i$ 可分 (I 可数)

(4) $f: X \rightarrow Y$ 连续, X 可分 $\Rightarrow f(X)$ 可分

例: (1) $\mathbb{R}$ 上取拓扑 $\tau := \{V \subseteq \mathbb{R} \mid V = \emptyset \text{ or } 0 \in V\}$.

断言: $\overline{\{0\}} = \mathbb{R}$; $\mathbb{R} - \{0\}$ 是离散子空间.

证: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall U(x) \in \tau$, 则 $0 \in U$ 即 $U \cap \{0\} \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{\{0\}}$ 即 $\mathbb{R} = \overline{\{0\}}$

$\forall x \neq 0, \{x\} \cup \{0\} \in \tau \Rightarrow \{x\} \subseteq \mathbb{R} - \{0\}$ 开.

$\{0\} \in \tau \Rightarrow \mathbb{R} - \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ 闭

Back.

$(\mathbb{R}, \tau)$ 可分: 因为 $\{0\}$ 是可数稠密子集.

但子空间 $\mathbb{R} - \{0\}$ 不可分: 因为任何可数子集 $A \subseteq \mathbb{R} - \{0\}$, 且是闭子空间.

~~证: $\mathbb{R} - \{0\}$ 不可分~~

(2) 取 X 的可数稠密子集 A

断言: $A \cap V$ 是 V 的可数稠密子集.

只需证: $V \subseteq \overline{A \cap V}$ (ps. $\overline{A \cap V} = \overline{A \cap V} \cap V$)

$\forall x \in V, \forall U(x) \subseteq X$ 开, 则 $U \cap V$ 仍是 x 开邻域

由

$\downarrow \text{因 } x \in A$

$\therefore U \cap V \cap A \neq \emptyset$

$\therefore x \in \overline{A \cap V}$

证: 一般地, $V \subseteq X$ 开, $A \subseteq X$ 则 $\overline{A \cap V} \subseteq \overline{A \cap V}$

证: $\forall x \in \overline{A \cap V}, \forall U(x) \subseteq X$ 开, 则 $U \cap V$ 是 x 开邻域

因 $x \in \overline{A \cap V} \Rightarrow U \cap V \cap A \neq \emptyset$

$\therefore x \in \overline{A \cap V}$

另一种方法: lem: $f: X \rightarrow Y$ 连续开 $\Leftrightarrow \forall B \subseteq Y, f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$

取 $i: V \hookrightarrow X$ 则 $\forall B \subseteq X, \overline{B \cap V} = \overline{B \cap V} \cap V$

(3). 设 $A_i \subseteq X_i$ 为可数稠密子集

(当 i 的指标有限时, 证明很简单 $\prod A_i = \prod A_i = \prod A_i$)

取 $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod X_i$

令 $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n := \{A_1 \times \cdots \times A_n \times \{x_{n+1}\} \times \cdots\}$ 则 L_n 可数

$L := \bigcup L_n$ 则 L 可数

断言: $\overline{L} = \prod X_i$

lem. $A \subseteq X$ 稠密 $\Leftrightarrow \forall U \subseteq X$ 非空 $U \cap A \neq \emptyset$
 $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{B}$ 非空 $U \cap A \neq \emptyset$ (非空 $\mathcal{B}$ 是拓扑基)

$\Rightarrow$: $\forall U \subseteq X$ 非空, 取 $x \in U$, 由 $x \in X \subseteq \prod A_i$, $U \cap A \neq \emptyset$

$\Leftarrow$: $\forall x \in X$, $\forall U(x)$, $U \cap A \neq \emptyset$ (非空)

$\Rightarrow$: 非空

$\Leftarrow$: $\forall U \subseteq X$ 非空, 取 $x_0 \in U$, 则 $\exists B \in \mathcal{B}$, $x_0 \in B \cap U$

由条件, $B \cap A \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$

Back.

只需证 $\prod X_i$ 中每点与 L 稠密非空

取 $\prod U_i$, $U_i \subseteq X_i$ 非空, 则 $U_i = X_i$

$\forall 1 \leq i \leq n$, 由 A_i 稠密 $\Rightarrow \exists a_i \in A_i \cap U_i$

且 $a_i = x_i$, $i \geq n$

则 $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in L_n \cap \left(\prod_{i \geq n} U_i\right) \subseteq L \cap \left(\prod_{i \geq n} U_i\right)$

(4). ~~若 $A \subseteq X$ 稠密~~

设 $A \subseteq X$ 可数稠密子集. 则 $f(A)$ 是可数集

由于连续性 $\Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$
 $\parallel$
 $f(X)$

$\therefore f(A)$ 在 $f(X)$ 中稠密