

拓扑学

王向军

南开大学数学院

2017年9月

天津市南开大学数学院, 300071
xjwang@nankai.edu.cn

第一章 拓扑空间

我们假设读者已经熟悉了点集拓扑中的基本概念和性质, 其中包括拓扑空间的概念、连续映射、拓扑空间的紧致性、连通性、分离性等基本内容. 本章我们将主要介绍拓扑空间的同胚、同伦以及在代数拓扑中常见的一些构造拓扑空间的办法.

§1.1 拓扑空间与同胚

在介绍拓扑空间的同胚之前, 我们先来回顾一下点集拓扑中的一些基本概念.

定义1.1.1 设 X 是一个集合, $\mathcal{T}$ 是 X 的一个子集族, 其元素 $U \in \mathcal{T}$ 被称为 X 的开集, 满足:

- (1) $X \in \mathcal{T}$, X 本身是开集;
- (2) $\emptyset \in \mathcal{T}$, 空集 $\emptyset$ 是开集;
- (3) $\mathcal{T}$ 中任意多个开集 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 的并 $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}$ 还是开集;
- (4) $\mathcal{T}$ 中有限个开集的交 $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{T}$ 还是开集.

$\mathcal{T}$ 被称为 X 的拓扑, 集合 X 连同其拓扑 $\mathcal{T}$, $(X, \mathcal{T})$ 称为一个拓扑空间.

两个拓扑空间 X, Y 之间的对应 $f: X \rightarrow Y$ 称为连续映射, 如果对任何 Y 中的开集 V , 其对应的原像 $f^{-1}(V) = \{x | f(x) \in V\}$ 是 X 中的开集.

例1 任何度量空间 (X, ρ) 中都可以赋予一种自然的拓扑 $\mathcal{T}$. X 中开集 $U \in \mathcal{T}$ 是 X 中任意多个开球体 $\{B(x_\alpha, r_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ 的并

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} B(x_\alpha, r_\alpha).$$

两个度量空间 X, Y 之间的连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 等同与连续映射的 $\varepsilon - \delta$ 定义.

定义1.1.2 如果空间 X 的任何开覆盖, 都有一个有限子覆盖, 即: 对 X 的任何开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in I\}$, 都存在 $\mathcal{U}$ 的一个有限子族

$$\mathcal{U}_0 = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \cdots, U_{\alpha_n}\}$$

仍构成 X 的一个开覆盖, 则称 X 是紧致拓扑空间.

定义1.1.3 空间 X 称为Hausdorff空间, 如果对 X 中的任意两点 x, y 都存在不相交的开邻域 U, V 将这两点分开, 即: $x \in U, y \in V$ 且 $U \cap V = \emptyset$. 此时 X 也称为 T_2 可分离空间.

度量空间 (X, ρ) 中的有界闭集是紧致的, 比如: 单位区间 $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ 和二维欧氏空间中的正方形 $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ 等都是紧致空间. 而任何度量空间都一定是Hausdorff空间.

定义1.1.4 空间 X 称为是连通的, 如果 X 不能被分成两个不相交的开集的并, 即不存在开集 U, V 使得 $U \cup V = X$ 且 $U \cap V = \emptyset$.

单位区间 I 到空间 X 的一个连续映射 $\sigma : I \rightarrow X$ 称为 X 中的一条道路. 拓扑空间 X 称为道路连通的, 如果 X 中任何两点 x, y 之间都可以用一条道路连接, 即存在映射 $\sigma : I \rightarrow X$ 使得 $\sigma(0) = x, \sigma(1) = y$. 这个映射 σ 称为 X 中从 x 到 y 的一条道路.

道路连通的空间一定是连通的. 但一般来说: 连通的空间不一定是道路连通的.

例2 实数轴 $\mathbb{R}$ 上的单位区间 I 本身作为一个拓扑空间是紧致的、连通的且道路连通的Hausdorff空间. 在 I 中挖去点 $\{\frac{1}{2}\}$ 后 $I - \{\frac{1}{2}\}$ 既不紧致, 也不连通.

定义1.1.5 设 X, Y 是两个拓扑空间, 如果存在连续映射 $f : X \rightarrow Y$ 和 $g : Y \rightarrow X$ 使得 $g \cdot f = 1_X, f \cdot g = 1_Y$, 即

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow 1_X & \downarrow g \\ & & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow 1_Y & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

可换, 则称 X 与 Y 同胚, 记为 $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ 或 $X \cong Y$.

例3 记

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\}$$

为 $n+1$ 维欧氏空间中的标准球面.

$$N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$$

为球面上的北极. 则从 S^n 上挖去北极点 N 后 $S^n - \{N\}$ 与 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 同胚.

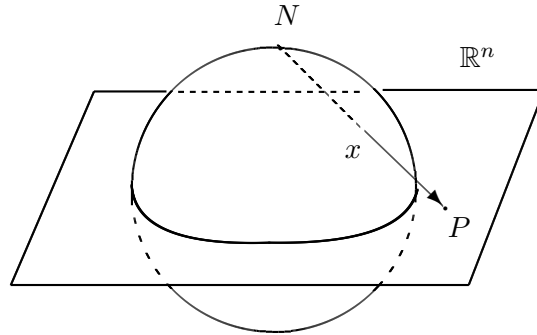


图1.1

如图1.1, 记 $\mathbb{R}^n$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中最后一个坐标 $x_{n+1} = 0$ 的点. 对 S^n 中任何一点 x , 从北极 N 向 x 引一条射线, 交 $\mathbb{R}^n$ 与点 P . 定义 $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 $f(x) = P$. 易知 f 是即单且满的同胚映射.

另外, 注意到; 在上述映射中北极 N 应该对应到 $\mathbb{R}^n$ 的无穷远点. 因而有 $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ 又被称作 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一点紧致化.

显然, 以上提到的拓扑空间的紧致性、连通性、分离性都是空间的同胚不变量. 即: 如果 X 与 Y 同胚, 则

- (1) X 是紧致空间当且仅当 Y 也是紧致空间;
- (2) X 是Hausdorff空间当前仅当 Y 是Hausdorff空间;
- (3) X 是连通(道路连通)空间当且仅当 Y 也是连通(道路连通)空间.

例4 试证明1维欧氏空间 $\mathbb{R}$ 不与2维欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 同胚.

如果 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 同胚, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是同胚映射, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是同胚逆, 即: $g \cdot f = 1_X$, $f \cdot g = 1_Y$. 我们假设 $f(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$, 其中0是 $\mathbb{R}$ 的坐标原点. 则 $g(x_0) = 0$. (见图1.2)

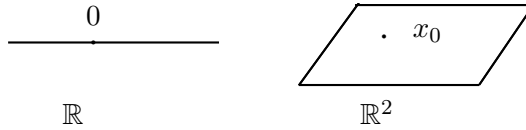


图1.2

考虑 $f|_{\mathbb{R}-\{0\}}: \mathbb{R}-\{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2-\{x_0\}$. 显然它还是同胚映射, 但 $\mathbb{R}-\{0\}$ 是不连通的, 而 $\mathbb{R}^2-\{x_0\}$ 是连通的, 矛盾.

一个自然的问题, 既然1维欧氏空间不与2维欧氏空间同胚, 那么 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 也应该不与 $n+1$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 同胚. 但利用紧致性、分离性及连通性却不能证明这一点. 为此我们需要对拓扑空间引进更多的“不变量”. 而基本群, 同调群及上同调环就是新的不变量, 也可以说是从拓扑空间范畴到群范畴的函子.

定义1.1.6 一个范畴 $\mathcal{C}$ 包含两部分的内容

- (1) 对象 $X, Y, \dots \in \mathcal{C}$, (比如拓扑空间、群、分次环等等);
- (2) 对象之间的态射 $f: X \rightarrow Y$, (比如空间之间的连续映射、群之间的同态等等).

它们满足:

- (1) 对于任何态射 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $g \cdot f: X \rightarrow Z$ 还是态射, 称为 f 与 g 的合成, 且满足

$$h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f.$$

- (2) 对任何对象 X , 存在态射 $1_X: X \rightarrow X$, 满足对任何态射 $f: X \rightarrow Y$ 及 $h: Z \rightarrow X$

$$f \cdot 1_X = f: X \rightarrow Y, \quad 1_X \cdot h = h: Z \rightarrow X$$

1_X 称为单位态射.

- 所有的拓扑空间 $X, Y, \dots$ 及拓扑空间之间的所有连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 构成一个范畴, 称为拓扑空间范畴, 记为 $\mathcal{T}$.
- 所有的群 $G, K, \dots$ 及群之间所有的同态 $h: G \rightarrow K$ 构成一个范畴, 称为群范畴, 记为 $\mathcal{G}$.

定义1.1.7 从一个范畴 $\mathcal{C}$ 到另一个范畴 $\mathcal{D}$ 的一个共变函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是一个对应,

- (1) 任何范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 X , 对应范畴 $\mathcal{D}$ 中的对象 $F(X) \in \mathcal{D}$.
- (2) 任何范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f: X \rightarrow Y$, 对应范畴 $\mathcal{D}$ 中的态射

$$F(f): F(X) \rightarrow F(Y).$$

它们满足

- (1) 对任何 $1_X: X \rightarrow X$, $F(1_X) = 1_{F(X)}: F(X) \rightarrow F(X)$;
- (2) 对任何 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f: X \rightarrow Y$ 及 $g: Y \rightarrow Z$,

$$F(g \cdot f) = F(g) \cdot F(f): F(X) \longrightarrow F(Z).$$

从范畴 $\mathcal{C}$ 到范畴 $\mathcal{D}$ 的反变函子 $F^*: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 仍然将 $\mathcal{C}$ 中对象 X 对应到 $\mathcal{D}$ 中对象 $F^*(X)$; 将 $\mathcal{C}$ 中态射 $f: X \rightarrow Y$ 对应到 $\mathcal{D}$ 中态射 $F^*(f)$. 只不过 $\mathcal{D}$ 中的态射 $F^*(f)$ 是反方向的, 即:

$$F^*(f): F^*(Y) \longrightarrow F^*(X).$$

因而对 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f: X \rightarrow Y$ 及 $g: Y \rightarrow Z$ 有

$$F^*(g \cdot f) = F^*(f) \cdot F^*(g): F^*(Z) \longrightarrow F^*(Y) \longrightarrow F^*(X).$$

代数拓扑的实质就是构造了一系列的从拓扑空间范畴 $\mathcal{T}$ 到群范畴 $\mathcal{G}$ 的函子, 比如基本群 $\pi_1(-)$, 同调群 $H_q(-)$ 都是从拓扑空间范畴到群范畴的共变函子, 而上同调环是从拓扑空间范畴到分次环的反变函子.

§1.1 习题

- 1, 试利用 S^n 同胚与 $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, 北极点 N 对应无穷远点 ∞ , 给出 $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ 的拓扑 $\mathcal{T}$.
- 2, 试举例说明: 拓扑空间可以是连通的但不道路连通.
- 3, 设 $\mathcal{T}_1$ 是拓扑空间 X 的拓扑, $\mathcal{T}_2$ 是拓扑空间 Y 的拓扑. 证明:

$$\mathcal{B} = \{U \times V \subset X \times Y | U \in \mathcal{T}_1 \text{ 是 } X \text{ 中开集, } V \in \mathcal{T}_2 \text{ 是 } Y \text{ 中开集}\}$$

构成 $X \times Y$ 的一个拓扑基.

- 4, 记 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ 为2维欧氏空间中的单位圆,

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

为2维欧氏空间中的圆带. 证明: S^1 不与 X 同胚.

- 5, 记 $GL_n(\mathbb{R})$ 为所有 n 阶实可逆矩阵构成的集合. 一个 n 阶可逆矩阵 A 可以看成是 $n \times n$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的点(它有 $n \times n$ 个元素). 因此可以定义两个 n 阶可逆矩阵 A, B 的距离使得 $GL_n(\mathbb{R})$ 成为一个度量空间, 因而它是一个拓扑空间
试证明: $GL_n(\mathbb{R})$ 不是道路连通的拓扑空间.
- 6, 记 $SO(n)$ 为所有行列式等于1的正交矩阵构成的集合, 它与 $GL_n(\mathbb{R})$ 有相似的拓扑. 试利用正交矩阵的相似标准型证明: $SO(n)$ 是道路连通的.

§1.2 同伦与空间的伦型

同伦是代数拓扑中的一个非常重要的概念，相对于同胚来说，是一种退而求其次的办法。两个映射 $f, g : X \rightarrow Y$ 可以不相同，但可以通过连续变化从一个映射变到另一个映射。同样，两个拓扑空间 X 与 Y 可以不同胚，但可以通过连续变化从一个空间变成另外一个空间。

比如：圆 S^1 不与圆带

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

同胚。如图1.3，将圆带的宽度逐渐变小，最后将圆带的宽度变成0即变成圆 S^1 。这就是空间的同伦。

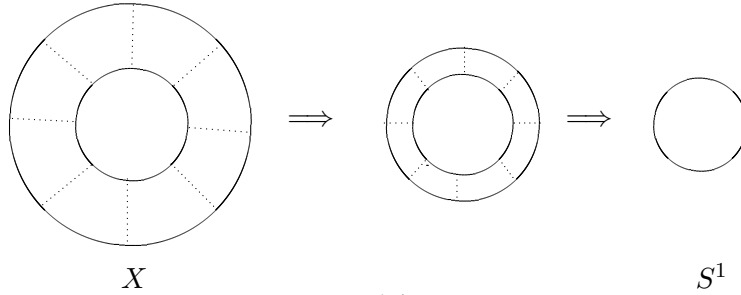


图1.3

定义1.2.1 设 $f, g : X \rightarrow Y$ 是两个映射，如果存在映射 $F : X \times I \rightarrow Y$ 使得，对任何 $x \in X$

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x)$$

则称映射 f 与 g 是同伦等价的，称 F 为从映射 f 到映射 g 的伦移，记为 $f \stackrel{F}{\simeq} g : X \rightarrow Y$ 或简记为 $f \simeq g$ 。

伦移 $F : X \times I \rightarrow Y$ 中的第二个坐标 $t \in I = [0, 1]$ 可以看成时间。固定一个时刻 t ， $F(-, t)$ 可以看做是从 X 到 Y 映射

$$f_t = F(-, t) : X \rightarrow Y$$

而 $f_t : X \rightarrow Y$ 是随时间 $t \in I$ 连续变化的一系列映射。在初始时刻 $t = 0$ 时 $f_0 = f : X \rightarrow Y$ ，到最终时刻 $t = 1$ 时变成了 $f_1 = g$ 。（如图1.4）

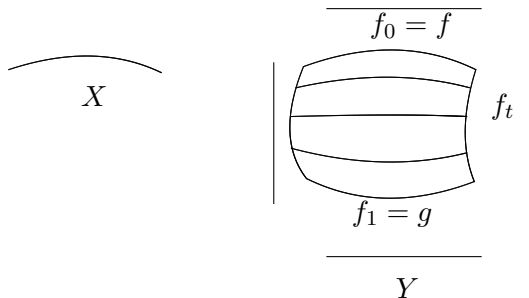


图1.4

例1 (见图1.3) 记 $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ 为圆带, $f: X \rightarrow X$ 定义为: 对任何 $(x, y) \in X$

$$f(x, y) = \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

则 $f: X \rightarrow X$ 同伦等价与单位映射 1_X 。

构造伦移 $F: X \times I$ 为: 对任何 $(x, y) \in X$ 及 $t \in I$

$$F((x, y), t) = \frac{(x, y)}{(1-t)\sqrt{x^2 + y^2} + t}, \quad \text{即} \quad f_t(x, y) = \frac{(x, y)}{(1-t)\sqrt{x^2 + y^2} + t}$$

则有

$$f_0(x, y) = F((x, y), 0) = \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = f(x, y),$$

$$f_1(x, y) = F((x, y), 1) = \frac{(x, y)}{1} = 1_X(x, y)。$$

在介绍下面的结论之前, 我们先来介绍点集拓扑中的一个基本结论。

粘接定理 设 A, B 是拓扑空间 X 的两个闭子空间, 满足 $A \cup B = X$ 。 $f: A \rightarrow Y$, $g: B \rightarrow Y$ 是两个连续映射。如果对任何 $x \in A \cap B$, $f(x) = g(x)$, 则可以定义粘接映射 $H: X \rightarrow Y$: 对任何 $x \in X$

$$H(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } x \in A \\ g(x) & \text{如果 } x \in B \end{cases}$$

$H: X \rightarrow Y$ 是连续的。

记 $Y^X = \{f: X \rightarrow Y | f \text{ 连续}\}$ 为所有从 X 到 Y 的连续映射构成的集合。

定理1.2.1 在所有从 X 到 Y 的映射构成的集合 Y^X 中, 同伦关系是一种等价关系。

证明: 1, 反身性: 对于 $f: X \rightarrow Y$, 有伦移 $F: X \times I \rightarrow Y$: 对任何 $x \in X$ 和 $t \in I$, $F(x, t) = f(x)$, 易知 F 是 f 到自身的伦移。

2, 对称性: 如果 $f \stackrel{F}{\simeq} g$, F 是从 f 到 g 的伦移。定义 $G: X \times I \rightarrow Y$ 为: 对任何 $x \in X$, $t \in I$, $G(x, t) = F(x, 1-t)$ 。则

$$G(x, 0) = F(x, 1) = g(x), \quad G(x, 1) = F(x, 0) = f(x),$$

G 是从 g 到 f 的伦移。

3, 传递性: 如果 $f \stackrel{F}{\simeq} g$, $g \stackrel{G}{\simeq} h$, 构造 $H: X \times I \rightarrow Y$ 为: 对任何 $x \in X$ 及 $t \in I$,

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{如果 } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) & \text{如果 } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

由于当 $t = \frac{1}{2}$ 时 $F(x, 1) = g(x) = G(x, 0)$, 可以将 F 与 G 粘接在一起得到连续映射 H (见图1.5) 且

$$H(x, 0) = F(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = G(x, 1) = h(x),$$

f 同伦等价与 h 。

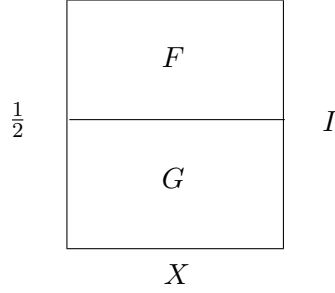


图1.5

例2 设 X 是任意拓扑空间, $S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum x_i^2 = 1\}$ 为 $n+1$ 维欧氏空间中的标准球面, $f, g: X \rightarrow S^n$ 是两个映射。如果对任何 $x \in X$ 都有 $f(x) \neq -g(x)$ ($g(x)$ 不是 $f(x)$ 在球面上的对径点), 则 $f \simeq g$ 。

对任何 $x \in X$, 考察 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中连接 $f(x)$, $g(x)$ 的直线, $h(t) = (1-t)f(x) + tg(x)$, 其中 $t \in I$ 。易知 $h(t)$ 不经过坐标原点。否则, 存在 $t \in [0, 1]$ 使得 $(1-t)f(x) + tg(x) = 0 = (0, 0, \dots, 0)$, 因而 $(1-t)f(x) = -tg(x)$ 。考虑向量 $(1-t)f(x) = -tg(x)$ 的长度有

$$\|(1-t)f(x)\| = (1-t) = \|-tg(x)\| = t$$

因而 $1-t=t=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x) = 0$, $f(x) = -g(x)$, 矛盾。

由 $(1-t)f(x) + tg(x) \neq 0$ 构造同伦 $F: X \times I \rightarrow S^n$: 对任何 $x \in X$, $t \in I$

$$F(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|}$$

易知 F 连续且

$$F(x, 0) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|} = f(x), \quad F(x, 1) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|} = g(x)$$

$f \stackrel{F}{\simeq} g$ 。

定义1.2.2 所有从 X 到 Y 的映射构成的集合 Y^X 关于同伦等价关系 $\simeq$ 的商集合 $Y^X / \simeq$ 称为 X 到 Y 的映射同伦类集, 记为

$$[X, Y] = Y^X / \simeq = \{[f] | f: X \rightarrow Y \text{ 连续}\}$$

映射 $f: X \rightarrow Y$ 所在的同伦等价类记为 $[f]$ 。

定义1.2.3 如果 A 是空间 X 的一个子空间, 则 (X, A) 称为一个空间偶。

对于另一个空间偶 (Y, B) , 如果映射 $f: X \rightarrow Y$ 满足 $f(A) \subset B$, 则称 f 是空间偶之间的映射, 记为 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 。

对于空间偶之间的映射 $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, 如果 $f \stackrel{F}{\simeq} g$ 且从 f 到 g 的伦移 $F: X \times I \rightarrow Y$ 满足: $F(A \times I) \subset B$ (即伦移过程中 A 中点总映射到 B),

则称空间偶之间的映射 f 与 g 同伦, 记为 $f \stackrel{F}{\simeq} g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 。

更进一步, 如果 $f|_A = g|_A : A \rightarrow B$ 且伦移 F 满足: 对任何 $a \in A, t \in I$, $F(a, t) = f(a) = g(a)$ (伦移过程中保持 A 中的点不动), 则称 f 与 g 相对于 A 同伦, 记为 $f \stackrel{F}{\simeq} g \text{ rel } A$ 。

许多时候我选 X 的子空间 $A = \{x_0\}$ 为独点空间, 此时的空间偶 (X, x_0) 称为带基点的空间。

定义1.2.4 称空间 X 与 Y 是同伦等价的或有相同的伦型, 如果存在映射 $f : X \rightarrow Y$ 和 $g : Y \rightarrow X$ 使得

$$g \cdot f \simeq 1_X, \quad f \cdot g \simeq 1_Y$$

即: 下面图表同伦可换

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \simeq 1_X & \downarrow g \\ & & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow \simeq 1_Y & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

记为 $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ 或 $X \simeq Y$ 。我们称 g 为 f 的同伦逆。

对应的有空间偶之间的同伦等价 $f : (X, A) \xrightarrow{\simeq} (Y, b)$ 。

例3 圆带 $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ 与圆 S^1 同伦等价。

有映射 $r : X \rightarrow S^1$, 对任何 $(x, y) \in X$, $r(x, y) = \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \in S^1$ 和内射 $i : S^1 \rightarrow X$, 满足: $r \cdot i = 1_{S^1} : S^1 \rightarrow X \rightarrow S^1$ 。而 $i \cdot r = f : X \rightarrow S^1 \rightarrow X$ 为例1中的 f 。在例1中已经证明 $f \simeq 1_X$, 因而 $r : X \xrightarrow{\simeq} S^1$ 。

引理1.2.2 设 $f \stackrel{F}{\simeq} f_1 : X \rightarrow Y$, $g \stackrel{G}{\simeq} g_1 : Y \rightarrow Z$, 则

$$g \cdot f \simeq g_1 \cdot f_1 : X \rightarrow Y \rightarrow Z.$$

证明: 设 $F : X \times I \rightarrow Y$ 是从 f 到 f_1 的伦移, $G : Y \times I \rightarrow Z$ 是从 g 到 g_1 的伦移。考察 $g \cdot F : X \times I \rightarrow Y \rightarrow Z$, 有:

$$g \cdot F(x, 0) = g \cdot f(x), \quad g \cdot F(x, 1) = g \cdot f_1(x)$$

$g \cdot F$ 是从 $g \cdot f : X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 到 $g \cdot f_1$ 的伦移。

考察 $G \cdot (f_1 \times 1) : X \times I \rightarrow Y \times I \rightarrow Z$, 其中 $(f_1 \times 1)(x, t) = (f_1(x), t)$, 有:

$$G \cdot (f_1 \times 1)(x, 0) = G(f_1(x), 0) = g \cdot f_1(x), \quad G \cdot (f_1 \times 1)(x, 1) = G(f_1(x), 1) = g_1 \cdot f_1(x)$$

$G \cdot (f_1 \times 1)$ 是从 $g \cdot f_1 : X \rightarrow Y \rightarrow Z$ 到 $g_1 \cdot f_1$ 的伦移。

由映射同伦的传递性中 $g \cdot f \simeq g \cdot f_1 \simeq g_1 \cdot f_1$ 。

定理1.2.3 拓扑空间的同伦关系 $X \simeq Y$ 是一种等价关系

证明: 1, 反身性: 显然 X 与自身同伦 (有相同的伦型)。

2, 对称性: 如果 $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ 是同伦等价, $g : Y \rightarrow X$ 是 f 的同伦逆, 则 $g : Y \xrightarrow{\simeq} X$ 是同伦等价, f 是 g 的同伦逆。

3, 传递性: 设 $f: X \xrightarrow{\simeq} Y$ 是同伦等价, $g: Y \rightarrow X$ 是 f 的同伦逆, $\mu: Y \xrightarrow{\simeq} Z$ 也是同伦等价, $\nu: Z \rightarrow Y$ 是 μ 的同伦逆。考察映射

$$\mu \cdot f: X \rightarrow Y \rightarrow Z, \quad g \cdot \nu: Z \rightarrow Y \rightarrow X$$

及它们的合成 $(g \cdot \nu) \cdot (\mu \cdot f)$, 有下面的同伦交换图:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\mu} & Z \\ & \searrow 1_X & \downarrow g & \searrow 1_Y & \downarrow \nu \\ & & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \searrow 1_X & & \downarrow g \\ & & & & X \end{array}$$

即 $(g \cdot \nu) \cdot (\mu \cdot f) = g \cdot (\nu \cdot \mu) \cdot f \simeq g \cdot 1_Y \cdot f = g \cdot f \simeq 1_X$ 。同理, $(\mu \cdot f) \cdot (g \cdot \nu) \simeq 1_Z$ 。 X 与 Z 同伦等价。

定义1.2.4 设 Y 是拓扑空间, y_0 是 Y 中一点。一个映射 $f: X \rightarrow Y$ 称为是零伦的如果 f 同伦等价与常值映射

$$c_{y_0}: X \rightarrow y_0 \rightarrow Y.$$

一个同伦等价与独点空间 $\{*\}$ 的空间称为可缩空间。

例4 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是可缩空间。

n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的点可以表示成 $r(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其中 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 满足 $\sum x_i^2 = 1$ 是 $n-1$ 维球面上的点, $r \in [0, \infty)$ 这个点到原点 0 的距离。定义映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\}$ 为: 对任何 $r(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$f(r(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0.$$

记 $i: \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为内射。易证:

$$f \cdot i = 1_{\{0\}}: \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\}$$

而 $i \cdot f \simeq 1_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 。因而 $f: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\simeq} \{0\}$

定义1.2.5 设 A 是 X 的一个子空间, $i: A \hookrightarrow X$ 是内射。如果存在映射 $r: X \rightarrow A$ 使得 $r \cdot i = 1_A: A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} A$, 则称 A 是 X 的收缩核。

如果 $i \cdot r \simeq 1_X: X \xrightarrow{r} A \xrightarrow{i} X$, 则称 A 是 X 的形变收缩核。此时 A 与 X 同伦等价。

例3 中 S^1 是圆带 $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ 的形变收缩核。

定义1.2.6 映射集 Y^X 中可以定义拓扑 $\mathcal{T}$: 对任何 X 的紧集 K 及 Y 中的开集 U , 记

$$N(K, U) = \{f: X \rightarrow Y | \text{满足 } f(K) \subset U \text{ 的映射 } f\} \subset Y^X$$

$$\mathcal{B} = \{N(K, U) \subset Y^X | \text{所有 } N(K, U) \text{ 组成的 } Y^X \text{ 的子集族}\}$$

可以证明 $\mathcal{B}$ 构成 Y^X 的一个拓扑基。由此得到的 Y^X 的拓扑称为 Y^X 的紧开拓扑, Y^X 称为映射空间。

§1.2 习题

- 1 证明: 例4中的 $i \cdot f \simeq 1_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 。
- 2 设 $f : X \rightarrow S^n$ 是一个不满的映射, $N = (0, \dots, 0, 1)$ 是 n 维球面的北极。证明: f 同伦等价与常值映射 $c_N : X \rightarrow \{N\}$ 。
- 3 令 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 为 n 维欧氏空间挖去坐标原点 $\{0\}$ 得到的空间。证明: $n - 1$ 维球面 S^{n-1} 是 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 的形变收缩核。
- 4 设 $f : S^n \rightarrow X$ 是映射。证明: f 同伦等价与一个常值映射的充分必要条件是 f 可以扩充到 $n+1$ 维球体 $B^{n+1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \mid \sum x_i^2 \leq 1\}$ 上。
- 5 证明: X 的子空间 A 是 X 的收缩核的重分必要条件是: 任何映射 $f : A \rightarrow Y$ 都可以扩充到 X 上。
- 6 证明: 映射空间 Y^X 的道路连通分支与映射同伦类集 $[X, Y]$ 一一对应。

§1.3 常见的拓扑空间

代数拓扑中研究的拓扑空间基本都是很好的空间，许多时候就是欧氏空间的一部分。而代数拓扑中更多的是关心拓扑空间中基本块（单形，胞腔）之间的粘接关系。

单纯复形* 单纯复形是由一些单形通过它们的顶点、边、面等重合拼在一起的一个几何体 K 。

给定欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的 $q+1$ 个点 $(a_0, a_1, \dots, a_q)$ ，如果向量组 $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_q - a_0$ 是线性无关的则称这 $q+1$ 个点为一个**几何无关点组**。

欧氏空间中：一个点 (a_0) 一定是几何无关的，两个点 (a_0, a_1) 几何无关指它俩不重合，三个点 (a_0, a_1, a_2) 几何无关指这三个点不在一条直线上，四个点几何无关指这四个点不在同一个平面上，...

易证：如果 $(a_0, a_1, \dots, a_q)$ 是一个几何无关的点组，则它的任何一个子组 $(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$ 也是几何无关的。

如果 $(a_0, a_1, \dots, a_q)$ 是一个几何无关的点组，则它张成欧氏空间中的一个 q -维单形

$$\sigma = [a_0, a_1, \dots, a_q] = \{\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_q a_q \mid \text{其中每个 } \lambda_i \geq 0 \text{ 且 } \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1\}.$$

它的一个子组 $(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$ 张成一个 r -维子单形 $\sigma' = [a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_r}]$ ，称为 $\sigma = [a_0, a_1, \dots, a_q]$ 的一个 r -维面。

容易看出：一个点 (a_0) 张成的单形是这个点 a_0 ，两个几何无关的点 (a_0, a_1) 张成的单形是连接这两个点的线段，三个几何无关的点 (a_0, a_1, a_2) 张成的单形是这三个点构成的三角形，四个几何无关的点 (a_0, a_1, a_2, a_3) 张成的单形是这四个点构成的四面体（见图1.6）

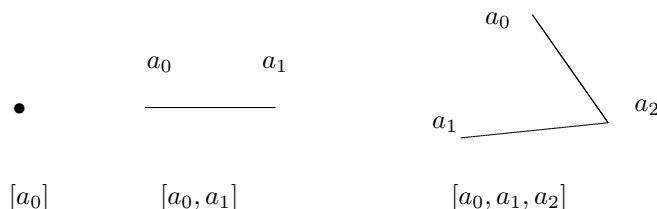


图1.6

定义1.3.1 单纯复形 $K = \{\sigma \mid \sigma = [a_0, a_1, \dots, a_q] \text{ 是欧氏空间中的单形}\}$ 是欧氏空间中一族单形，它满足：

- 1 如果 $\sigma \in K$ 是单纯复形 K 中的一个单形，则 σ 所有的面 σ' 也是 K 中的单形。
- 2 单纯复形 K 中的两个单形 σ 与 τ 或者不交，或者相交于它们的一个公共的面，即规则相处（见图1.7）。

单纯复形 K 中所有单形构成的几何体称为单纯复形的几何实现，记为 $|K|$ 。如果某拓扑空间 X 同胚与 $|K|$ ，则称 K 为 X 的一个三角剖分。

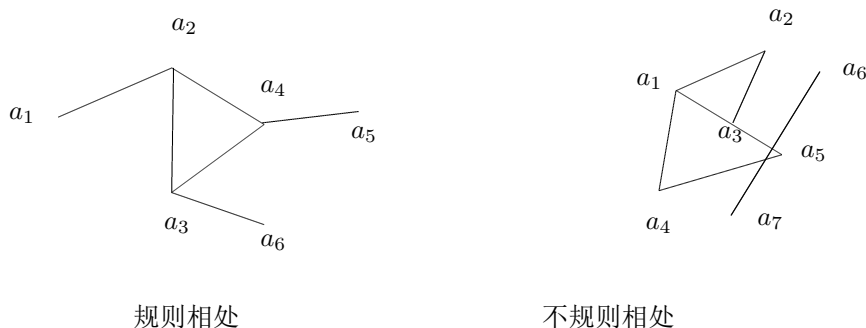


图1.7

乘积空间 设 $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ 是两个拓扑空间。此时

$$\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 = \{U \times V \subset X \times Y \mid \text{其中 } U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}$$

只能构成 $X \times Y$ 的一组拓扑基。由此拓扑基生成 $X \times Y$ 拓扑, $X \times Y$ 连同这个拓扑称为乘积空间。

比如: 正方形 $I^2 = I \times I$ 作为 I 与 I 的乘积空间有一种拓扑, 作为 $\mathbb{R}^2$ 的子空间(度量空间)也有一种拓扑。这两种拓扑是一致的。

附贴空间 附贴空间是一种商空间, 他是通过将拓扑空间中某些点粘合在一起得到的空间。

定义1.3.2 设 $(X, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间, “ $\sim$ ”是 X 中的一种等价关系, $X/\sim$ 是 X 对“ $\sim$ ”的商集合。此时有自然投射

$$p: X \longrightarrow X/\sim \quad p(x) = [x], [x] \text{ 是 } x \text{ 所在的等价类。}$$

在 $X/\sim$ 中定义拓扑 $\mathcal{T}/\sim$ 为: $W \subset X/\sim$ 是 $X/\sim$ 中的开集当且仅当 $p^{-1}(W)$ 是 X 中的开集。则 $(X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$ 称为 X 对“ $\sim$ ”的商空间。

事实上, 许多代数拓扑中用到的拓扑空间都是通过商空间构做出来的。下面我们将通过一些例子介绍一些常用的构做拓扑空间的办法。

例1 在单位区间 $I = [0, 1]$ 中定义等价关系“ $\sim$ ”为: $x \sim y$ 当且仅当 $x = y$ 或 $x = 0, y = 1$ 。这样 $I/\sim$ 同胚与圆 S^1 (见图1.8)

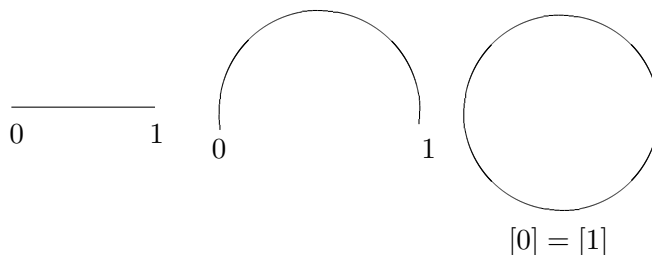


图1.8

这种方法叫粘合法，即将拓扑空间中的一些点和另外一些点粘合在一起。

例2 将 $I^2 = I \times I$ 中两个对边 $\{0\} \times I$ 和 $\{1\} \times I$ 按同方向粘合 ($(0, t) \sim (1, t)$) 得到圆柱面。

将 $I^2 = I \times I$ 中两个对边 $\{0\} \times I$ 和 $\{1\} \times I$ 按反方向粘合 ($(0, t) \sim (1, 1-t)$) 得到的是 Möbius 带。(见图1.9)



图1.9

例3 将 $I^2 = I \times \{0\}$ 中两对边 $I \times \{0\}$ 和 $I \times \{1\}$ 按同方向粘合得到圆柱面，之后再另两个对边 $\{0\} \times I$ 和 $\{1\} \times I$ 也按同方向粘合 ($(0, t) \sim (1, t)$) 得到一个环面记为 T^2 。

将 $I^2 = I \times \{0\}$ 中两对边 $I \times \{0\}$ 和 $I \times \{1\}$ 按同方向粘合得到圆柱面，之后再另两个对边 $\{0\} \times I$ 和 $\{1\} \times I$ 按反方向粘合 ($(0, t) \sim (1, 1-t)$) 得到 Klein 瓶，记为 K 。(见图1.10)

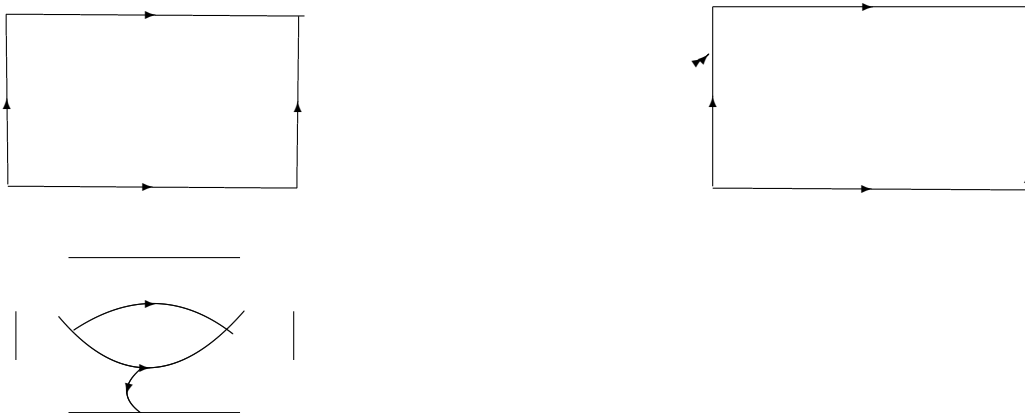


图1.10

例4 将球面 $S^2 = \{\alpha = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 的对径点粘合 ($\alpha \sim -\alpha$) 得到的是实射影平面 $\mathbb{R}P^2 = S^2/(\alpha \sim -\alpha)$ 。

将上半球面 $E_+^2 = \{\alpha = (x, y, z) | z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 中的大圆 $S^1 = \{\alpha = (x, y, 0) \in E_+^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ 按对径点粘合 ($(x, y, 0) \sim (-x, -y, 0)$) 得到的也是实射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 。

一般地, 将 n -维球面 $S^n = \{\alpha = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum x_i^2 = 1\}$ 的对径点粘合 ($\alpha \sim -\alpha$) 得到空间被称为 n -维实射影空间记为 $\mathbb{R}P^n = S^n/(\alpha \sim -\alpha)$ 。(见图1.11)

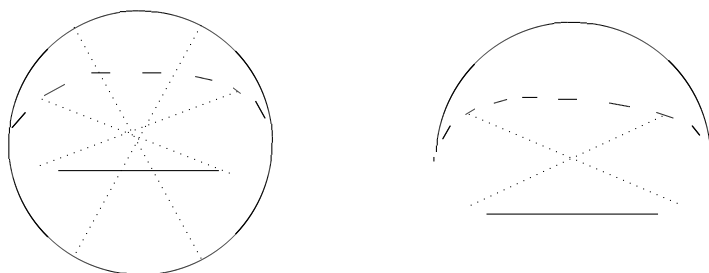


图1.11

定义1.3.3 设 X 是一个拓扑空间。将 $X \times I$ 中的 $X \times \{1\}$ 粘合成一点, 即: 对任何 $x, y \in X$, $(x, 1) \sim (y, 1)$ 得到的空间称为 X 的锥, 记为 $CX = X \times I / X \times \{1\}$ 。将 CX 中的 $X \times \{0\}$ 再粘合成一点得到的空间称为 X 的双角锥, 记为 $\Sigma X = CX / X \times \{0\}$ 。 $X \times I$ 称为 X 的柱。(见图1.12)

空间 X 的柱 $X \times I$ 与 X 本身是同伦等价的, 而它的锥 CX 是可缩空间 (同伦等价与独点空间)

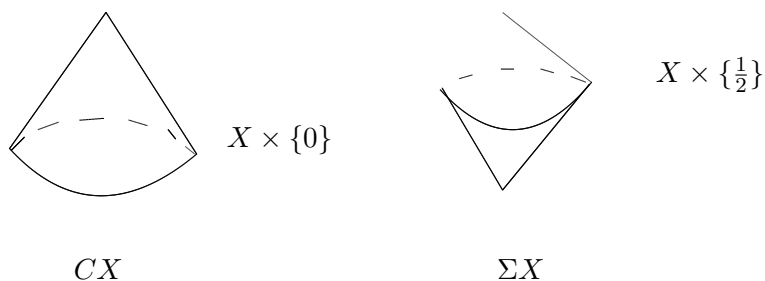


图1.12

定义1.3.4 设 A 是 X 的子空间, $f: A \rightarrow Y$ 是映射。在 X 与 Y 的不交并 $X \amalg Y$ 中定义等价关系“ $\sim$ ”为: 对所有的 $a \in A$, a 与 Y 中的 $f(a)$ 等价, 即 $a \sim f(a)$ 。 X, Y 中其它的点只与自己等价。 $X \amalg Y / \sim$ 称为将 X 按映射 $f: A \rightarrow Y$ 粘接在 Y 上得到的空间, 记为 $Y \cup_f X$ 。

定义1.3.5 设 $f: X \rightarrow Y$ 是映射。

将 X 的锥 CX 中的 $X \times \{0\}$ 按 $f: X \times \{0\} \cong X \rightarrow Y$ 粘接在 Y 上得到的空间称为 $f: X \rightarrow Y$ 的映射锥, 记为 $Y \cup_f CX$ 。

将 X 的柱 $X \times I$ 中的 $X \times \{0\}$ 按 $f: X \times \{0\} \cong X \rightarrow Y$ 粘接在 Y 上得到的空间称为 $f: X \rightarrow Y$ 的映射柱, 记为 $Y \cup_f (X \times I)$ 。(见图1.13)

事实上 $f: X \rightarrow Y$ 的映射柱 $Y \cup_f (X \times I)$ 与 Y 是同伦等价的, 并且 Y 是 $Y \cup_f (X \times I)$ 的形变收缩核。

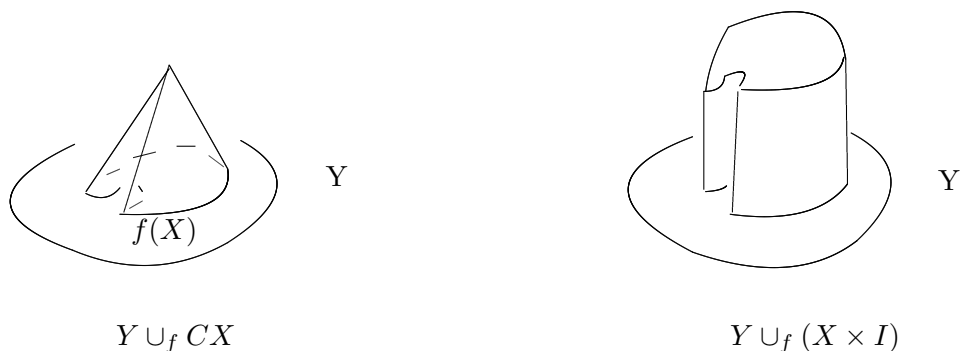


图1.13

$n-1$ -维球面 S^{n-1} 的锥 CS^{n-1} 同胚与 n -维实球体

$$e^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 \leq 1\} \cong CS^{n-1}.$$

S^{n-1} 同胚与 e^n 的边界。映射 $f: S^{n-1} \rightarrow Y$ 的映射锥 $Y \cup_f CS^{n-1}$ 称为在 Y 上通过 f 粘贴一个 n -维胞腔得到的空间，记为 $Y \cup_f e^n$ 。

例5 记 $S^1 = \{e^{2\pi it} \in \mathbb{C} \mid t \in [0, 1]\}$ 为复平面上的单位圆。定义映射 $m: S^1 \rightarrow S^1$ 为：对任何 $e^{2\pi it} \in S^1$

$$m(e^{2\pi it}) = e^{2m\pi it},$$

这是一个绕了 S^1 m -周的映射。在 S^1 上通过 m 粘贴一个 2-维胞腔得到的空间 $S^1 \cup_m e^2$ 称为模 m 的 Moore 空间。

CW复形* CW复形是通过逐步粘贴胞腔的办法得到的空间，而粘贴每个 n -维胞腔 e^n 时的映射 $f: S^{n-1} \rightarrow X^{(n-1)}$ 起关键作用。

定义1.3.6 CW复形 X 是一族子空间 $\{X^{(n)} \mid n \geq 0\}$ 的并 $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X^{(n)}$ ，其中 $X^{(n)}$ 称为 X 的 n -维骨架。它是用归纳法构造出来的：

- 1 $X^{(0)}$ 是一些离散的点 $\{x_i \mid i \in \Gamma\}$ 。
- 2 设 X 的 $n-1$ -维骨架 $X^{(n-1)}$ 已经得到， X 的 n -维骨架 $X^{(n)}$ 是在 $X^{(n-1)}$ 上粘贴一些 n -维胞腔得到的，即

$$X^{(n)} = X^{(n-1)} \cup_{f_\alpha} e_\alpha^n,$$

其中每个 e_α^n 都同胚与 n -维球体，称为 X 的一个 n -维胞腔， $f_\alpha: S_\alpha^{n-1} \rightarrow X^{(n-1)}$ 是胞腔 e_α^n 的粘贴映射。

例6 单纯复形 K 的几何实现 $|K|$ （有时我们也会将二者混用）是 CW复形。

只需令 $|K|^{(n-1)}$ 为单纯复形 K 中维数小于等于 $n-1$ 的所有单形构成的几何体即可。 K 的任何一个单形 σ 看做是 $|K|$ 的一个 n -维胞腔，它的边界 $\partial\sigma \cong S^{n-1}$ 是 $n+1$ 个 $n-1$ -维面的并，已经包含在 $|K|^{(n-1)}$ 中了。用内射 $i: \partial\sigma \rightarrow |K|^{(n-1)}$ 粘接 n -维胞腔得到 n -维骨架 $|K|^{(n)}$ 。

例7 n -维球面 S^n 可以有多种 CW复形结构。

1, 令球面的0-维骨架 $X^{(0)} = \{x_0\}$ 为一个点, 中间不加1-维到 $n-1$ -维骨架, $X^{(n-1)} = X^{(0)}$. 在 $X^{(n-1)} = \{x_0\}$ 上通过常值映射 $c: S^{n-1} \rightarrow x_0$ 粘贴 n -维胞腔得到的空间

$$X^{(n)} = x_0 \cup_c e^n = e^n / \partial e^n \cong S^n.$$

2, 令球面的0-维骨架 $X^{(0)} = \{x_0\}$ 为一个独点, $n-1$ -维骨架 $X^{(n-1)} = x_0 \cup_c e^{n-1}$, 它同胚与一个 $n-1$ 维球面. 在 $n-1$ -维骨架 S^{n-1} 上粘贴两个胞腔也可以得到 n -维球面

$$S^n = X^{(n)} = (x_0 \cup_c e^{n-1}) \cup_{1_+} e_+^n \cup_{1_-} e_-^n$$

其中 $1_+, 1_-: S^{n-1} \rightarrow X^{(n-1)} \cong S^{n-1}$ 都是同胚映射。

3, 令 $X^{(0)} = \{0, 1\}$ 为离散的点构成的拓扑空间, 它可以看成是0-维球面. 在 $X^{(0)}$ 上粘接两个1-维胞腔得到1维球面 S^1

$$S^1 = X^{(1)} = \{0, 1\} \cup_{1_+} e_+^1 \cup_{1_-} e_-^1.$$

其中 $e_+^1 \cong e_-^1 \cong I$, $1_+, 1_-: S^0 = \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ 都是单位映射。

归纳地假设已经有了 $n-1$ -维球面的胞腔结构 $X^{(n-1)} \cong S^{n-1}$, 同上在 $X^{(n-1)} \cong S^{n-1}$ 上粘接上两个胞腔得到 S^n 的胞腔结构。

§1.3 习题

- 1 证明: 例4中将球面 $S^2 = \{\alpha = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 的对径点粘合和将上半球面 $E_+^2 = \{\alpha = (x, y, z) | z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 中的大圆 $S^1 = \{\alpha = (x, y, 0) \in E_+^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ 按对径点粘合 $((x, y, 0) \sim (-x, -y, 0))$ 得到的是同一个拓扑空间。
- 2 证明: 任何一个拓扑空间 X 的锥 $CX = X \times I / X \times \{1\}$ 都是可缩空间。
- 3 证明: 映射 $f: X \rightarrow Y$ 的映射柱 $Y \cup_f (X \times I)$ 与 Y 同伦等价。而映射

$$i \cdot f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} Y \cup_f (X \times I)$$

与 $i: X \xrightarrow{\cong} X \times \{1\} \rightarrow Y \cup_f (X \times I)$ 同伦等价。

- 4 证明: 例5中模2的Moore空间, 即通过 $2(e^{2\pi it}) = e^{4\pi it}$ 粘接一个2-维胞腔得到的空间 $S^1 \cup_2 e^2$ 与实射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 是同胚的。
- 5 证明: 例3中通过粘合对边得到的环面 T^2 与乘积空间 $S^1 \times S^1$ 同胚。
- 6 证明: 从环面 T^2 中挖去一点得到的空间 $T^2 - \{[1/2, 1/2]\}$ 和从Klein瓶中挖去一点得到的空间 $K - \{[1/2, 1/2]\}$ 是同伦等价的。
- 7 记 $SO(3)$ 为所有行列式等于1的正交矩阵构成的拓扑空间, $\mathbb{R}P^3 = S^3 / (\alpha \sim -\alpha)$ 为3-维实射影空间。证明: $SO(3)$ 与 $\mathbb{R}P^3$ 同胚。

第二章 基本群

代数拓扑的一个基本方法就是要构造一些从拓扑空间范畴（或流形、拓扑群等范畴）到群范畴的共变或反变函子 $\mathcal{F} : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{G}$ 。任给一个拓扑空间 X ， $\mathcal{F}(X)$ 是 X 的一个代数不变量。两个拓扑空间的代数不变量相同时它们可能同胚或同伦，但当两个拓扑空间的代数不变量不同时它们一定不会同胚。

先来看一个例子：记 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 为从2-维平面中挖去坐标原点得到的空间。（见图2.1）

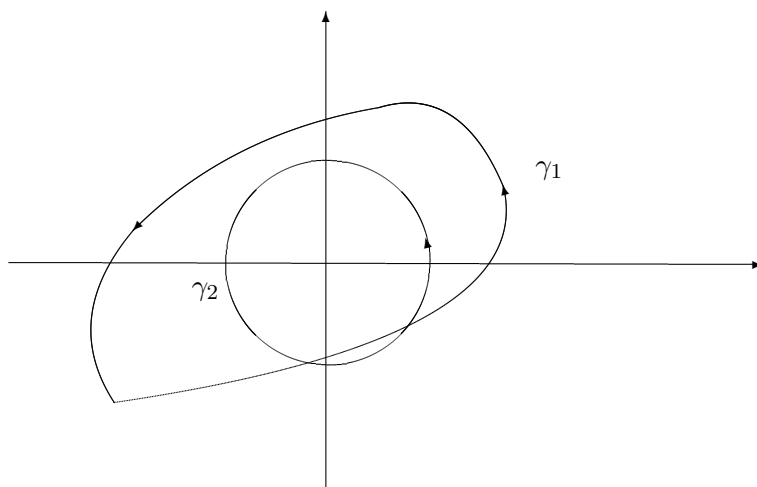


图2.1

为考察 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 和 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 中光滑闭曲线 γ 的性质，我们考察曲线积分

$$\int_{\gamma} \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx = \int_{\gamma} Q dy + P dx.$$

由于 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，这个曲线积分与线路无关。但 $\frac{-y}{x^2 + y^2}$ ， $\frac{x}{x^2 + y^2}$ 在坐标原点 $0 = (0, 0)$ 不连续。沿单位圆周逆时针方向的曲线积分

$$\oint_{\gamma_2} \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx = 2\pi,$$

因而任何沿逆时针方向一周的曲线积分 $\oint_{\gamma_1} Q dy + P dx$ 都等于 2π ，而沿顺时针方向一周的曲线积分等于 -2π 。

考察 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 中所有的光滑闭曲线 γ 。曲线积分 $\oint_{\gamma} Q dy + P dx$ 的取值一定等于某个 $k \cdot 2\pi$ 。这里 k 反映的是闭曲线 γ 的性质，当 k 取正值时说明它沿逆时针方向绕坐标原点 $(0, 0)$ 转了 k 周；当 k 取负值时说明它沿顺时针方向绕坐

标原点转了 $|k|$ 周。 k 所有可能的取值 $\mathbb{Z}$ 反映的是拓扑空间 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 的性质，它就是 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 的基本群。

§2.1 道路同伦与基本群

定义2.1.1 映射 $\sigma : I \rightarrow X$, $\sigma(0) = x_0$, $\sigma(1) = x_1$ 称为空间 X 中从 x_0 到 x_1 的一条道路。

对于 X 中从 x_0 到 x_1 的两条道路 $\sigma, \tau : I \rightarrow X$, 如果存在同伦 $F : I \times I \rightarrow X$ (或 $f_t : I \rightarrow X$, $t \in [0, 1]$) 使得对任何 $s, t \in I$

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= \sigma(s), & F(s, 1) &= \tau(s), & (f_0 = \sigma, f_1 = \tau) \text{ 且} \\ F(0, t) &\equiv x_0, & F(1, t) &\equiv x_1, & (f_t(0) = x_0, f_t(1) = x_1), \end{aligned}$$

则称 σ 与 τ 是道路同伦的, 记为 $\sigma \stackrel{F}{\simeq_p} \tau$ 或 $\sigma \stackrel{f_t}{\simeq_p} \tau$; $F(f_t)$ 称为从 σ 到 τ 的道路伦移。

注 在道路同伦的伦移 ($F(-, t)$ 或 $f_t(-)$) 过程中, 要求保持起点 x_0 、终点 x_1 不动, 即

$$F(0, t) \equiv x_0, \quad F(1, t) \equiv x_1$$

是必要的。事实上, 在一个道路连通的空间中任何两条道路 σ, τ (甚至它们的起点、终点都不同) 一定是同伦的。

例1 n -维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中任何从 x_0 到 x_1 的两条道路 σ, τ 都是道路同伦的。有道路伦移 $f_t : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f_t(s) &= (1-t)\sigma(s) + t\tau(s) & \text{满足} \\ f_0(s) &= \sigma(s), & f_1(s) &= \tau(s) & \text{且} \\ f_t(0) &= (1-t)x_0 + tx_0 \equiv x_0, & f_t(1) &\equiv x_1. \end{aligned}$$

这种同伦称为线性同伦。

命题2.1.1 空间 X 的所有从 x_0 到 x_1 的道路组成的集合中道路同伦 $\simeq_p$ 是一种等价关系。

证明: 仿照定理1.2.1; 映射的同伦是一种等价关系的证明, 要求在伦移过程中保持起点、终点不动知命题成立。

定义2.1.2 设 σ, τ 是 X 中的两条道路, 满足 $\sigma(1) = \tau(0)$ (σ 的终点= τ 的起点)。定义 X 中的道路 $\sigma * \tau : I \rightarrow X$ 为

$$\sigma * \tau(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{如果 } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \tau(2s-1) & \text{如果 } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$\sigma * \tau$ 称为 σ 与 τ 的道路乘积或道路连接。

注 当 σ 的终点 $\neq \tau$ 的起点时, σ 与 τ 不能做乘积。当 σ 的终点= τ 的起点时, 由§1.2中的粘接定理知: $\sigma * \tau$ 是连续函数, 且 $\sigma * \tau$ 在 $[0, 1/2]$ 走完 σ 的全程, 在 $[1/2, 1]$ 走完 τ 的全程。

命题2.1.2 设 $\sigma \stackrel{F}{\simeq_p} \sigma'$, $\tau \stackrel{G}{\simeq_p} \tau'$ 并且 $\sigma(1) = \sigma'(1) = \tau(0) = \tau'(0)$, 则 $\sigma * \tau$ 与 $\sigma' * \tau'$ 道路同伦。

证明: 设

$$\begin{aligned} \sigma &\stackrel{F}{\simeq_p} \sigma' & F: I \times I \rightarrow X &\text{是从}\sigma\text{到}\sigma'\text{的道路伦移,} \\ \tau &\stackrel{G}{\simeq_p} \tau' & G: I \times I \rightarrow X &\text{是从}\tau\text{到}\tau'\text{的道路伦移.} \end{aligned}$$

如图2.2所示, 令

$$H: I \times I \rightarrow X, \quad H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & 0 \leq s \leq 1/2; \\ G(2s - 1, t) & 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

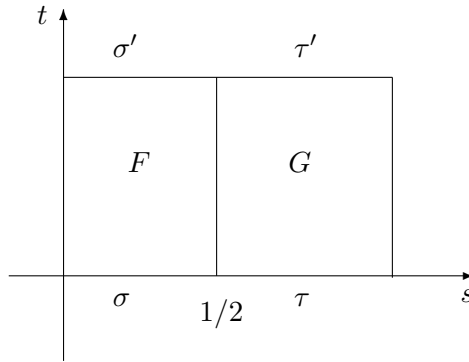


图2.2

由 $F(1, t) \equiv \sigma(1) = \tau(0) \equiv G(0, t)$ 易知 H 是 F 与 G 粘接得到的连续函数, 且

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \begin{cases} F(2s, 0) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ G(2s - 1, 0) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} = \sigma * \tau(s), \\ H(s, 1) &= \begin{cases} F(2s, 1) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ G(2s - 1, 1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} = \sigma' * \tau'(s) \end{aligned}$$

$$H(0, t) = F(0, t) = \sigma(0), \quad H(1, t) = G(1, t) = \tau(1)$$

H 是从 $\sigma * \tau$ 到 $\sigma' * \tau'$ 的道路伦移。

设有三条定理 σ, τ, ν 满足: $\sigma(1) = \tau(0)$, $\tau(1) = \nu(0)$ 即:

σ 的终点 = τ 的起点, τ 的终点 = ν 的起点,

此时有道路乘积 $(\sigma * \tau) * \nu$ 和 $\sigma * (\tau * \nu)$ 。由定义知:

$$\begin{aligned} (\sigma * \tau) * \nu(s) &= \begin{cases} \sigma * \tau(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ \nu(2s - 1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \sigma(4s) & 0 \leq s \leq 1/4 \\ \tau(4s - 1) & 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ \nu(2s - 1) & 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases} \\ \sigma * (\tau * \nu)(s) &= \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ \tau * \nu(2s - 1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ \tau(4s - 2) & 1/2 \leq s \leq 3/4 \\ \nu(4s - 3) & 3/4 \leq s \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

显然作为道路 $(\sigma * \tau) * \nu \neq \sigma * (\tau * \nu)$, 但我们有:

命题2.1.3 如果三条道路 σ, τ, ν 满足:

$$\sigma(1) = \tau(0)$$

$$\tau(1) = \nu(0)$$

则 $(\sigma * \tau) * \nu \simeq_p \sigma * (\tau * \nu)$ 。

证明: 如图2.3, 我们构造从 $(\sigma * \tau) * \nu$ 到 $\sigma * (\tau * \nu)$ 的道路伦移

$$F : I \times I \longrightarrow X,$$

$$f_t : I \longrightarrow X$$

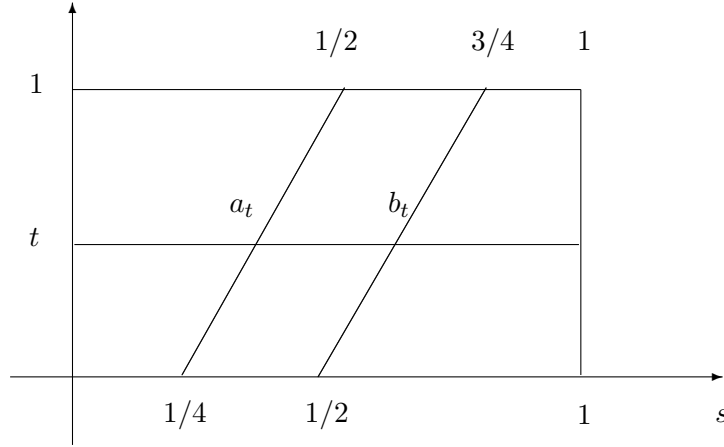


图2.3

做 $(1/4, 0)$ 到 $(1/2, 1)$ 的连线 L_1 , 做 $(1/2, 0)$ 到 $(3/4, 1)$ 的连线 L_2 。对于 $t \in [0, 1]$, 从 $(0, t)$ 做一条平行于 s 轴的直线交 L_1 与 (a_t, t) 、交 L_2 与 (b_t, t) 。

道路同伦变化过程在 t 时刻 $f_t : I \rightarrow X$ 在 $[0, a_t]$ 走 σ 这段道路, 在 $[a_t, b_t]$ 走 τ 这段道路, 在 $[b_t, 1]$ 走 ν 这段道路, 即:

$$f_t(s) = \begin{cases} \sigma\left(\frac{s}{a_t}\right) & 0 \leq s \leq a_t \\ \tau\left(\frac{s - a_t}{b_t - a_t}\right) & a_t \leq s \leq b_t \\ \nu\left(\frac{s - b_t}{1 - b_t}\right) & b_t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

容易验证 f_t 连续且:

$f_0 : I \rightarrow X$ 在 $[0, 1/4]$ 走 σ 这段道路, 在 $[1/4, 1/2]$ 走 τ 这段道路, 在 $[1/2, 1]$ 走 ν 这段道路, 即 $f_0 = (\sigma * \tau) * \nu$ 。

$f_1 : I \rightarrow X$ 在 $[0, 1/2]$ 走 σ 这段道路, 在 $[1/2, 3/4]$ 走 τ 这段道路, 在 $[3/4, 1]$ 走 ν 这段道路, 即 $f_1 = \sigma * (\tau * \nu)$ 。

设 X 是一个拓扑空间, x_0 是 X 中的一个固定点 (称为基点), 考虑 X 中所有起点 $\sigma(0)$ 终点 $\sigma(1)$ 都在 x_0 的闭路构成的集合

$$\Omega X = \{\sigma : I \longrightarrow X \mid \sigma(0) = \sigma(1) = x_0\}.$$

ΩX 中任何两条闭路 σ, τ 都满足 $\sigma(1) = \tau(0)$, 因而可以做道路乘积 $\sigma * \tau$ 。

$$* : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$$

是 ΩX 中的一种运算.但这种运算不满足结合律,无法使 ΩX 构成半群.

考虑 ΩX 对道路同伦关系 $\simeq_p$ 的等价类集 $\Omega/\simeq_p$.

定义2.1.3 以 x_0 为起点、终点的所有闭路关于道路同伦的等价类集 $\Omega X/\simeq_p$ 记为 $\pi_1(X, x_0)$,其元素是一个等价类

$$[\sigma] = \{\tau : I \longrightarrow X | \tau(0) = \tau(1) = x_0 \text{ 且 } \tau \simeq_p \sigma\}.$$

(所有与 σ 道路同伦的闭路构成的子集) σ 是 $[\sigma]$ 的一个代表元.

注意到, 当 $\sigma' \simeq_p \sigma$ 时 σ' 也是 $[\sigma]$ 的一个代表元, 且 $[\sigma'] = [\sigma]$. 对于 $\pi_1(X, x_0)$ 中的两个道路同伦类 $[\sigma], [\tau]$, 在 $[\sigma]$ 中任选一个代表元 σ , 在 $[\tau]$ 中任选一个代表元 τ , 对应的有以 $\sigma * \tau$ 为代表元的道路同伦类

$$[\sigma * \tau] = \{\nu | \nu \simeq_p \sigma * \tau\}.$$

由于当 $\sigma \simeq_p \sigma', \tau \simeq_p \tau'$ 时, $\sigma * \tau \simeq_p \sigma' * \tau'$. 等价类 $[\sigma * \tau]$ 与代表元 σ, τ 的选取无关;

定义2.1.4 在 $\pi_1(X, x_0)$ 中定义乘法: $[\sigma] \cdot [\tau] = [\sigma * \tau]$.

定理2.1.4 $\pi_1(X, x_0)$ 对于乘法“ $\cdot$ ”构成一个群, 称为 X 的以 x_0 为基点的基本群.

证明 1, 由定义知运算“ $\cdot$ ”封闭.

2, 结合律: 对于 $\pi_1(X, x_0)$ 中的三个元 $[\sigma], [\tau], [\nu]$, 由乘积的定义知:

$$\begin{aligned} ([\sigma] \cdot [\tau]) \cdot [\nu] &= [\sigma * \tau] \cdot [\nu] = [(\sigma * \tau) * \nu] \\ [\sigma] \cdot ([\tau] \cdot [\nu]) &= [\sigma] \cdot [\tau * \nu] = [\sigma * (\tau * \nu)] \end{aligned}$$

由命题2.1.3知 $(\sigma * \tau) * \nu \simeq_p \sigma * (\tau * \nu)$, 因而作为道路同伦类

$$[(\sigma * \tau) * \nu] = [\sigma * (\tau * \nu)].$$

3, 单位元: 在 x_0 处的常值道路 c_{x_0} 所在的道路同伦类 $[c_{x_0}]$ 是 $\pi_1(X, x_0)$ 的乘法单位元. 在此我们只证明 $[c_{x_0}]$ 是 $\pi_1(X, x_0)$ 的右单位, 读者自己证明 $[c_{x_0}]$ 是左单位.

任给道路同伦类 $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$, $[\sigma] \cdot [c_{x_0}] = [\sigma * c_{x_0}]$ 其中

$$\sigma * c_{x_0}(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ x_0 & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

如图2.4, 我们构造从 $\sigma * c_{x_0}$ 到 σ 的道路同伦

$$F : I \times I \longrightarrow X, \quad f_t : I \longrightarrow X$$

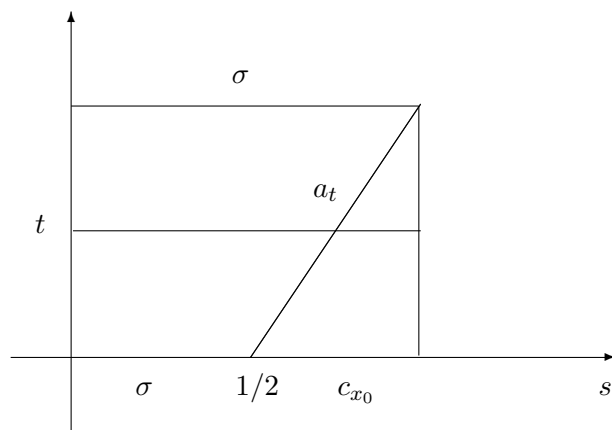


图2.4

从 $(1/2, 0)$ 向 $(1, 1)$ 引一条直线 L . 对任何 $t \in [0, 1]$, 从 $(0, t)$ 引一条平行于 s 轴的直线交 L 与 (a_t, t) . 在 t 时刻, f_t 在 $[0, a_t]$ 走 σ 这段道路, 在 $[a_t, 1]$ 保持不动, 即

$$f_t(s) = \begin{cases} \sigma(\frac{s}{a_t}) & 0 \leq s \leq a_t \\ x_0 & a_t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

因而 $[\sigma * c_{x_0}] = [\sigma]$.

4, 逆元素: 对任何 $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$, 定义 σ 的逆道路 $\sigma^{-1} : I \rightarrow X$ 为 $\sigma^{-1}(s) = \sigma(1 - s)$. 我们证明 $\sigma * \sigma^{-1} \simeq_p c_{x_0}$, 因而

$$[\sigma] \cdot [\sigma^{-1}] = [\sigma * \sigma^{-1}] = [c_{x_0}]$$

如图2.5, 构造从 $\sigma * \sigma^{-1}$ 到常值道路 c_{x_0} 的道路伦移。

$$G : I \times I \longrightarrow X, \quad g_t : I \longrightarrow X$$

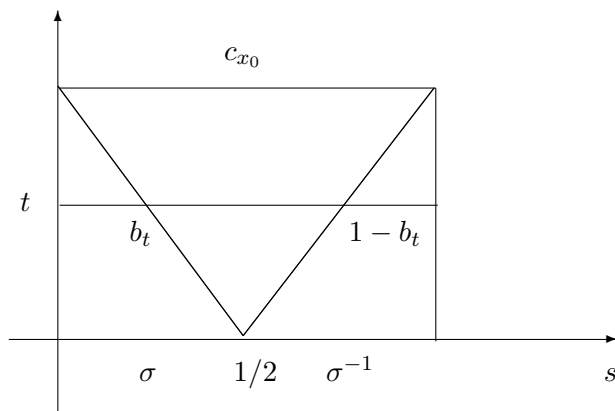


图2.5

从 $(1/2, 0)$ 分别向 $(0, 1)$ 和 $(1, 1)$ 各引一条直线 K_1, K_2 . 对任何 $t \in [0, 1]$, 从 $(0, t)$ 引一条平行于 s 轴的直线分别交 K_1, K_2 与 $(b_t, t), (1 - b_t, t)$. 伦移过程中在 t 时刻 g_t 在 $[0, b_t]$ 沿 σ 从 $\sigma(0)$ 到 $\sigma(2b_t)$ 这一段, 在 $[b_t, 1 - b_t]$ 停留在 $\sigma(2b_t)$,

由于 $\sigma(2b_t) = \sigma^{-1}(1 - 2b_t)$, 在 $[1 - b_t, 1]$ 沿 σ^{-1} 返回到 x_0 , 即:

$$g_t(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \leq s \leq b_t \\ \sigma(2b_t) & b_t \leq s \leq 1 - b_t \\ \sigma^{-1}(2s - 1) & 1 - b_t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

注意到, 当 $t = 1$ 时 $b_t = 0$, $g_1 = c_{x_0}$.

例2 记 0 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的原点, $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) = 0$.

事实上 $\mathbb{R}^n$ 中任何一条起点、终点在 0 的闭路 σ 都道路同伦与常值道路. 道路伦移为 $F : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$F(s, t) = (1 - t)\sigma(s).$$

§2.1 习题

- 1 设 $\sigma, \tau : I \rightarrow X$ 是空间 X 中从 x_0 到 x_1 的两条道路, 证明: 如果不要保持起点、终点不动, 这两条道路一定是同伦等价的.
- 2 试计算出命题2.1.3证明中的 a_t, b_t 并写出道路伦移 $F : I \times I \rightarrow X$ 及 $f_t : I \rightarrow X$ 的解析表达式.
- 3 计算出定理2.1.4证明中的 a_t, b_t 并写出伦移 f_t, g_t 的解析表达式.
- 4 设 $n > 1$. 记 S^n 为 n 维标准球面, $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$. 证明: S^n 的基本群 $\pi_1(S^n, x_0) = 0$.

提示: 当 $n > 1$ 时任何闭路 $\sigma : I \rightarrow S^n$ 不会是满映射, 类似于§1.2习题2的证法可以证明 σ 可以收缩成一个常值道路. 但当 $n = 1$ 时不对.

§2.2 基本群的性质

事实上 $\pi_1(-, -)$ 是一个从带基点的拓扑空间偶范畴 $\mathcal{T}_0$ 到群范畴 $\mathcal{G}$ 的一个共变函子, 因而他是同胚不变量. 不仅如此 $\pi_1(-, -)$ 还是拓扑空间的同伦不变量, 即: 当 (X, x_0) 与 (Y, y_0) 同伦等价时, 它们的基本群是同构的.

设 $f : X \rightarrow Y$ 是一个映射, 则对 X 中的任何道路 $\sigma : I \rightarrow X$, $f \cdot \sigma : I \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y$ 是 Y 中的一条道路.

引理2.2.1 如果 $f : X \rightarrow Y$ 是一个映射, X 中的两条道路 σ 与 τ 道路同伦, 则 $f \cdot \sigma$ 与 $f \cdot \tau$ 道路同伦.

证明 首先由 $\sigma(0) = \tau(0)$, $\sigma(1) = \tau(1)$ 知 $f \cdot \sigma(0) = f \cdot \tau(0)$, $f \cdot \sigma(1) = f \cdot \tau(1)$. 设 $H_t : I \rightarrow X$, $t \in [0, 1]$ 是从 σ 到 τ 的道路伦移, $H_0 = \sigma$, $H_1 = \tau$, 则 $f \cdot H_t : I \rightarrow X \rightarrow Y$ 是从 $f \cdot \sigma$ 到 $f \cdot \tau$ 的道路伦移.

有引理2.2.1易知: 如果 $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ 是带基点的拓扑空间之间的映射, 那么对于 $\pi_1(X, x_0)$ 中的一个道路同伦等价类 $[\sigma]$ 中的任何两条道路 σ, σ' , $f \cdot \sigma$ 和 $f \cdot \sigma'$ 在 $\pi_1(Y, y_0)$ 的同一个道路同伦等价类中, 即: $[f \cdot \sigma] = [f \cdot \sigma']$. 这样映射 $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ 导出一个映射

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0),$$

$$f_*([\sigma]) = [f \cdot \sigma].$$

定理2.2.2 映射 $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ 导出的映射 $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ 是一个群同态且满足:

1, 对于映射 $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$

$$\begin{array}{ccc} (g \cdot f)_* = g_* \cdot f_* & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow (g \cdot f)_* & \downarrow g_* \\ & & \pi_1(Z, z_0). \end{array}$$

2, 对于 $1 : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$, $1_* = 1 : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

证明 1, 对于 $[\sigma], [\tau] \in \pi_1(X, x_0)$, $[\sigma] \cdot [\tau] = [\sigma * \tau]$

$$f_*([\sigma] \cdot [\tau]) = f_*([\sigma * \tau]) = [f \cdot (\sigma * \tau)]$$

注意到 $f \cdot (\sigma * \tau) : I \xrightarrow{\sigma * \tau} X \xrightarrow{f} Y$ 是 Y 中闭路

$$f \cdot (\sigma * \tau)(s) = \begin{cases} f \cdot \sigma(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ f \cdot \tau(2s - 1) & 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

因而 $f \cdot (\sigma * \tau) = (f \cdot \sigma) * (f \cdot \tau)$, $f_*([\sigma] \cdot [\tau]) = f_*([\sigma]) \cdot f_*([\tau])$, f_* 是群同态.

2, 对于映射 $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ 及 $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$,

$$\begin{aligned} (g \cdot f)_*([\sigma]) &= [g \cdot f \cdot \sigma], & I &\xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \\ g_* \cdot f_*([\sigma]) &= g_*(f_*([\sigma])) = g_*([f \cdot \sigma]) = [g \cdot f \cdot \sigma] \end{aligned}$$

$$(g \cdot f)_* = g_* \cdot f_*.$$

3, 对于单位映射 $1 : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$, 显然

$$1_* = 1 : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

因而 $\pi_1(-, -)$ 是从带基点的拓扑空间范畴 $\mathcal{T}_0$ 到群范畴 $\mathcal{G}$ 的一个共变函子.

定理2.2.3 1, 如果带基点的空间映射 f 与 g 同伦; $f \simeq g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, 则它们导出的基本群的同态相同

$$f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

2, 如果带基点的空间同伦等价 $f : (X, x_0) \xrightarrow{\sim} (Y, y_0)$, 则它们的基本群同构。

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, y_0)$$

证明 1, 设 $H : X \times I \rightarrow Y$ 是从 f 到 g 的伦移, 由于是带基点的空间映射的同伦, H 满足: 对任何 $t \in [0, 1]$, $H(x_0, t) = f(x_0) = g(x_0)$. 对任何道路同伦类 $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$

$$H \cdot (\sigma \times 1) : I \times I \xrightarrow{\sigma \times 1} X \times I \xrightarrow{H} Y$$

满足:

$$\begin{aligned} H \cdot (\sigma \times 1)(s, 0) &= f \cdot \sigma(s), & H \cdot (\sigma \times 1)(s, 1) &= g \cdot \sigma(s) \quad \text{且} \\ H \cdot (\sigma \times 1)(0, t) &= H(\sigma(0), t) = f(x_0), & H \cdot (\sigma \times 1)(1, t) &= g(x_0) \end{aligned}$$

2, 设 $g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ 是 $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ 的同伦逆, 则

$$g_* \cdot f_* = (g \cdot f)_* = 1 \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow (g \cdot f)_* & \downarrow g_* \\ & & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

$$f_* \cdot g_* = (f \cdot g)_* = 1 \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(X, x_0) \\ & \searrow (f \cdot g)_* & \downarrow f_* \\ & & \pi_1(Y, y_0) \end{array}$$

下面我来看基点 x_0 在基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 中的作用。

首先 I 及 $I \times I$ 都是道路连通的, 闭路的起点、终点 $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$, 道路的伦移 F 满足 $F(0, t) = \sigma(0) = x_0$. 因而道路及道路伦移映射的像全落在 X 的 x_0 所在的道路连通分支中. $\pi_1(X, x_0)$ 只与 x_0 所在的道路连通分支有关. 为此, 我总假设 X 是道路连通的. 当 X 不道路连通时, 对 X 的道路连通分支分别研究其基本群.

设 X 是道路连通的拓扑空间, $\gamma : I \rightarrow X$ 是 X 中从 x_0 到 x_1 的一条道路. 则对 X 中任何一条起点、终点在 x_0 的闭路 σ , $\gamma^{-1} * \sigma * \gamma$ 是 X 中一条起点、终点在 x_1 的闭路, 其中 γ^{-1} 是 γ 的逆道路 (见图2.6).

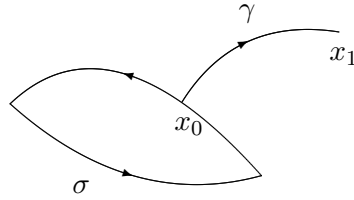


图2.6

命题2.2.4 X 中从 x_0 到 x_1 的一条道路 γ 诱导出基本群的同构

$$\gamma^* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1),$$

其中 γ^* 定义为: 对任何 $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$, $\gamma^*([\sigma]) = [\gamma^{-1} * \sigma * \gamma]$.

证明 首先, 道路同伦类 $[\gamma^{-1} * \sigma * \gamma]$ 不依赖于 $[\sigma]$ 中代表元 σ 的选取, γ^* 的定义合理.

设 $[\sigma], [\tau]$ 是 $\pi_1(X, x_0)$ 中的两个道路同伦类,

$$\gamma^*([\sigma]) \cdot \gamma^*([\tau]) = [\gamma^{-1} * \sigma * \gamma] \cdot [\gamma^{-1} * \tau * \gamma] = [\gamma^{-1} * \sigma * \gamma * \gamma^{-1} * \tau * \gamma].$$

仿照定理2.1.4中 $\sigma^{-1} * \sigma \simeq_p c_{x_0}$ 的证明, 读者容易证明

$$\gamma^{-1} * \sigma * (\gamma * \gamma^{-1}) * \tau * \gamma \simeq_p \gamma^{-1} * \sigma * \tau * \gamma.$$

因而 $\gamma^*([\sigma]) \cdot \gamma^*([\tau]) = \gamma^*([\sigma] \cdot [\tau])$. γ^* 是同态.

γ 的逆道路 γ^{-1} 诱导出同态: $\gamma^{-1*} : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. 由

$$\gamma^{-1*} \cdot \gamma^*([\sigma]) = [\gamma * (\gamma^{-1} * \sigma * \gamma) * \gamma^{-1}]$$

易知 $\gamma^{-1*} \cdot \gamma^* = 1 : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$, 同样 $\gamma^* \cdot \gamma^{-1*} = 1$. γ^* 是同构.

由此知: 对一个道路连通的空间 X , 基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 与基点 x_0 的选取无关. 以后 X 的基本群可以简记为 $\pi_1(X)$.

如果 $\gamma : I \rightarrow X$ 是 X 中起点、终点都在 x_0 的闭路, 则 $[\gamma]$ 本身是 $\pi_1(X, x_0)$ 中的道路同伦类, 同时 γ 还导出基本群的同构

$$\gamma^* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0).$$

容易验证: 对任何 $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$,

$$\gamma^*([\sigma]) = [\gamma^{-1} * \sigma * \gamma] = [\gamma]^{-1} \cdot [\sigma] \cdot [\gamma],$$

这个同构是基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 的一个内自同构.

设 $f, g : X \rightarrow Y$ 是同伦的两个映射, $x_0 \in X$, 但 $f(x_0) \neq g(x_0)$, 不妨设 $f(x_0) = y_0$, $g(x_0) = y_1$. 设 $F : X \times I \rightarrow Y$ 是 f 到 g 的伦移. 固定 x_0 $F(x_0, t) = \gamma(t)$ 是从 y_0 到 y_1 的一条道路.

命题2.2.5 对于同伦的两个映射 $f \stackrel{F}{\simeq} g : X \rightarrow Y$ 有基本群同态的交换图

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow g_* & \downarrow \cong \gamma^* \\ & & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

其中 $\gamma(t) = F(x_0, t)$.

证明 设 $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$ 是 X 的一个道路同伦类,

$$f_*([\sigma]) = [f \cdot \sigma] \in \pi_1(Y, y_0), \quad g_*([\sigma]) = [g \cdot \sigma] \in \pi_1(Y, y_1).$$

注意到: 固定 $t \in [0, 1]$, s 在 $[0, 1]$ 变化, $F(\sigma(s), t)$ 是起点、终点在 $\gamma(t) = F(x_0, t)$ 的一条闭路. 如图2.7, 我们构造从 $\gamma^{-1} * (f \cdot \sigma) * \gamma$ 到 $c_{x_1}^{-1} * (g \cdot \sigma) * c_{x_1}$ 的道路同伦. 则由 $[c_{x_1}^{-1} * (g \cdot \sigma) * c_{x_1}] = [g \cdot \sigma]$ 知:

$$\gamma^* \cdot f_*([\sigma]) = [\gamma^{-1} * (f \cdot \sigma) * \gamma] = g_*([\sigma]).$$

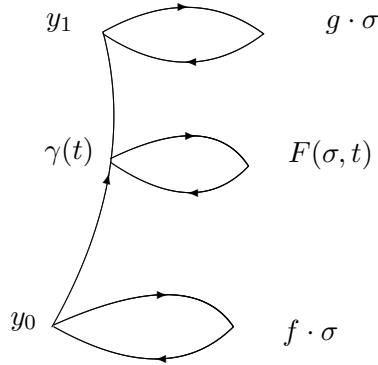


图2.7

道路伦移在 t 时刻, $[0, 1/3]$ 沿 γ 的逆道路从 y_1 走到 $\gamma(t) = \gamma^{-1}(1-t)$, $[1/3, 2/3]$ 沿 $F(\sigma, t)$ 走起点、终点在 $\gamma(t)$ 的闭路, $[2/3, 1]$ 沿 γ 从 $\gamma(t)$ 返回到 y_1 , 即:

$$f_t(s) = \begin{cases} \gamma^{-1}(3s(1-t)) & 0 \leq s \leq 1/3 \\ F(\sigma(3s-1), t) & 1/3 \leq s \leq 2/3 \\ \gamma((3s-2)(1-t) + t) & 2/3 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

定理2.2.6 如果 $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ 是同伦等价的两个空间, $f(x_0) = y_0$, 则

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

是基本群的同构.

证明 设 $g : Y \rightarrow X$ 是 f 的同伦逆. 此时我们不能希望 $g(y_0) = x_0$, 为此假设 $g(y_0) = x_1$, $f(x_1) = y_1$. 设 F 是 $g \cdot f$ 到单位映射的伦移, G 是 $f \cdot g$ 到单位映

射的伦移;

$$\begin{aligned} g \cdot f &\stackrel{F}{\simeq} 1 : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X \\ f \cdot g &\stackrel{G}{\simeq} 1 : Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y. \end{aligned}$$

则 F 给出 X 中从 x_1 到 x_0 的一条道路 $\gamma(t) = F(x_0, t)$; G 给出 Y 中从 y_1 到 y_0 的一条道路 $\delta(t) = G(y_0, t)$, 而

$$f \cdot \gamma : I \xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{f} Y$$

给出 Y 中另一条从 y_1 到 y_0 的道路. 由命题 2.2.5 知:

$$\begin{array}{ccccc} \gamma^* g_* f_* = 1 : & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(X, x_1) \\ & & \searrow 1 & & \downarrow \gamma^* & \\ & & & & \pi_1(X, x_0) & \end{array}$$

并且 $\delta^* f_* g_* = 1$.

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_1) & \xrightarrow{\delta^*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & & \downarrow \gamma^* & & \downarrow (f \cdot \gamma)^* & \nearrow & \\ & & \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) & & \end{array}$$

注意到这里的 f_* 有两个, 一个是 $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, 另一个是 $f_* : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(Y, y_1)$. 由于上图可换, 我们有

$$(\gamma^* g_*) \cdot f_* = 1 f_* \cdot (\gamma^* g_*) \neq 1$$

$$\delta^* \cdot (f \cdot \gamma)^{-1} \cdot f_* \cdot (\gamma^* g_*) = 1$$

而 $\delta^* \cdot (f \cdot \gamma)^{-1} = ((f \cdot \gamma^{-1}) * \delta)^*$ 是 $\pi_1(Y, y_0)$ 的一个内自同构. 因而 $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ 是同构。

定义 2.2.1 道路连通的空间 X 称为是单连通的, 如果其基本群 $\pi_1(X, x_0) = 0$.

§2.2 习题

- 1 设 $\gamma : I \rightarrow X$ 是 X 中以 x_0 为起点、终点的闭路, 证明: $\gamma^* = 1 : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ 的充分必要条件是 $[\gamma]$ 和 $\pi_1(X, x_0)$ 中任何道路同伦类都可换.
- 2 设 X 是道路连通的空间, 证明: X 单连通的充要条件是, X 中任何起点、终点相同的道路 $\sigma, \tau : I \rightarrow X$ 都道路同伦.
- 3 设 X 是单连通的拓扑空间, 记 $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$, 为单位圆盘, S^1 是单位圆. 证明: 任何映射 $f : S^1 \rightarrow X$ 都可以扩充到 D^2 上.
- 4 证明: 如果 $f : X \rightarrow Y$ 同伦等价与常值映射 c_{y_0} 则 f 导出基本群的零同态 $f_* = 0 : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$.

5 令 $CX = X \times I / X \times \{1\}$ 为空间 X 的锥, $f : X \rightarrow Y$ 是映射. 证明: f 同伦与常值映射的充分必要条件是 f 可以扩充到 CX 上.

6 设 X, Y 都是道路连通的空间, 证明: $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

注 设 G_1, G_2 是乘法群, 在 $G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) | g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$ 中定义乘法 $(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) = (g_1 \cdot g'_1, g_2 \cdot g'_2)$ 使 $G_1 \times G_2$ 还构成群.

7 设 $A \subset X$ 是 X 的收缩核, $r : X \rightarrow A$ 是收缩映射, 基点 $x_0 \in A$. 证明: $i_* : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ 是单射, $r_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(A, x_0)$ 是满射.

8 设 G 关于运算 “ $\cdot$ ” 是一个拓扑群 (既是拓扑空间又群, 并且乘积运算, 求逆运算都是连续的), e 是他的单位元. 令 ΩX 为 G 中起点、终点在 e 的所有闭路构成的集合. 对于 $\sigma, \tau \in \Omega X$, 定义一条闭路 $\sigma \otimes \tau : I \rightarrow G$ 为:

$$(\sigma \otimes \tau)(s) = \sigma(s) \cdot \tau(s)$$

1, 证明: 这个运算使 ΩX 构成一个群.

2, 在所有道路同伦等价类 $\pi_1(G, e)$ 中定义一种运算 “ $\otimes$ ”: 对任何 $[\sigma], [\tau] \in \pi_1(G, e)$, $[\sigma] \otimes [\tau] = [\sigma \otimes \tau]$. 证明: 这种运算和利用道路乘积 $*$ 定义的运算是等价的, 即在 $\pi_1(G, e)$ 中

$$[\sigma] \otimes [\tau] = [\sigma \otimes \tau] = [\sigma * \tau] = [\sigma] \cdot [\tau].$$

3, 证明: $\pi_1(G, e)$ 是一个交换群.

9 证明: $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 \cong \mathbb{Z}/6$, 而 $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \not\cong \mathbb{Z}/4$.

§2.3 圆的基本群

在本节我们将通过实直线 $\mathbb{R}$ 来计算圆 S^1 的基本群。事实上，圆的基本群 $\pi_1(S^1, x_0)$ 中的一个道路同伦等价类仅依赖于它绕圆旋转的周数。当周数为负时指沿反方向旋转。

记 $S^1 = \{e^{2\pi it} \in \mathbb{C} | t \in \mathbb{R}\}$ 为复平面上的单位圆，选取基点 $x_0 = e^0 = 1$ 。

定理2.3.1 $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ ，生成元是 $\sigma_1 : I \rightarrow S^1$ ， $\sigma_1(t) = e^{2\pi it}$ 。

构造映射

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad \phi(x) = e^{2\pi ix}$$

和

$$\psi : S^1 - \{-1 = e^{\pi i}\} \rightarrow (-1/2, 1/2), \quad \psi(e^{2\pi it}) = t$$

(见图2.8)

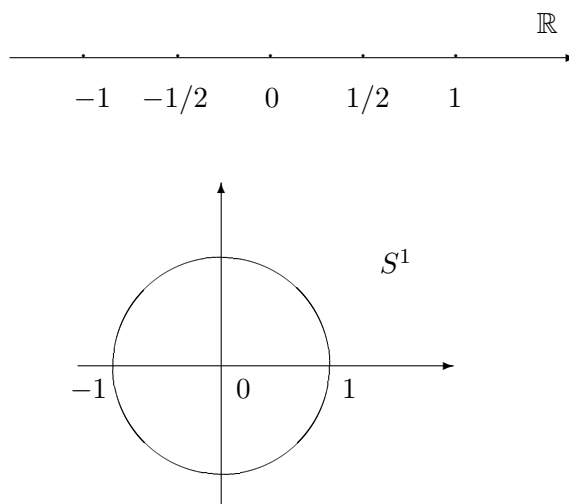


图2.8

容易验证， $\psi : S^1 - \{-1\} \rightarrow (-1/2, 1/2)$ 是同胚映射。而对任何 S^1 中的一点 $z_0 = e^{2\pi it_0}$ 和这点的一个小邻域 $U_0 = \{e^{2\pi it} | t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon\}$

$$\phi^{-1}(e^{2\pi it_0}) = \{t_0 + n | n \in \mathbb{Z}\} = \{t_0\} \times \mathbb{Z}$$

$$\phi^{-1}(U_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n + t_0 - \varepsilon < t < n + t_0 + \varepsilon) \cong U_0 \times \mathbb{Z}$$

引理2.3.2 (道路提升引理) 如果 $\sigma : I \rightarrow S^1$ 是 S^1 中一条起点在 $\sigma(0) = e^0 = 1$ 的道路则在 $\mathbb{R}$ 中有唯一的一条起点在 $\sigma'(0) = 0$ 的道路 $\sigma' : I \rightarrow \mathbb{R}$ 使

得 $\phi \cdot \sigma' = \sigma$

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \sigma' & \downarrow \phi \\ I & \xrightarrow{\sigma} & S^1. \end{array}$$

引理2.3.3 (覆盖同伦定理) 设 $\sigma, \tau : I \rightarrow S^1$ 是 S^1 中道路同伦的两条起点在 $\sigma(0) = \tau(0) = 1$ 的道路, $F : I \times I \rightarrow S^1$ 是从 σ 到 τ 的道路伦移. 则存在唯一的 $\mathbb{R}$ 中的伦移 $F' : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $F'(0, 0) = 0$. 而 $\sigma' = F'(s, 0)$ 是 σ 的道路提升, $\tau' = F'(s, 1)$ 是 τ 的道路提升.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow F' & \downarrow \phi \\ I \times I & \xrightarrow{F} & S^1. \end{array}$$

证明 我们将两个引理, $\sigma : I \rightarrow S^1$ 可以看成是 $F_\sigma : I \times I \rightarrow S^1$, 对任何 $t \in [0, 1]$, $F_\sigma(s, t) = \sigma(s)$.

提升的存在性: $F : I \times I \rightarrow S^1$ 连续, $I \times I$ 是紧致空间, S^1 是度量空间, 因而 F 在 $I \times I$ 上一致连续. 取 $\varepsilon = 1$ 存在 $\delta > 0$ 使得: 对任何 $y, y' \in I \times I$, 当 $\rho(y, y') < \delta$ 时, $\rho(F(y), F(y')) < 1$. 在此我们只要求 $F(y)$ 与 $F(y')$ 不是对径点即可, 在 $\mathbb{C}$ 中 $\frac{F(y)}{F(y')} \neq -1$, 因而 $\psi : S^1 - \{-1\} \rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 在 $\frac{F(y)}{F(y')}$ 上有定义.

对任何 $y \in I \times I$, $\rho(0, y) \leq \sqrt{2}$, 其中 0 是坐标原点 $(0, 0)$. 选定 N 使得 $\frac{\sqrt{2}}{N} < \delta$, 因而对任何 $y \in I \times I$ $\frac{\rho(0, y)}{N} < \delta$. 同时由于 $I \times I$ 是凸集, 连接坐标原点 0 与 y 的线段全在 $I \times I$ 中.

将线段 $0y$ N 等分, 分点是

$$0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{k-1} < y_k < \cdots < y_N = y$$

$$(y_k = \frac{k}{N}y) . \text{ 此时 } \rho(y_{k-1}, y_k) < \delta, \frac{F(y_k)}{F(y_{k-1})} \neq -1.$$

令 $F' : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ 为: 对任何 $y \in I \times I$

$$F'(y) = \psi\left(\frac{F(y_N)}{F(y_{N-1})}\right) + \psi\left(\frac{F(y_{N-1})}{F(y_{N-2})}\right) + \cdots + \psi\left(\frac{F(y_2)}{F(y_1)}\right) + \psi\left(\frac{F(y_1)}{F(y_0)}\right).$$

由于 N 是固定的, F' 连续且

$$\phi \cdot F'(y) = e^{2\pi i F'(y)} = \frac{F(y_N)}{F(y_{N-1})} \cdot \frac{F(y_{N-1})}{F(y_{N-2})} \cdots \frac{F(y_2)}{F(y_1)} \frac{F(y_1)}{F(y_0)} = F(y)$$

在此记 $F(y_0) = F(0) = e^{2\pi i 0}$. 归纳的记 $F(y_{k-1}) = e^{2\pi i t_{k-1}}$. 由于 $\frac{F(y_k)}{F(y_{k-1})} \neq -1$, 我们可以根据 t_{k-1} 的取值, 通过适当的选取 $t_k \in (-\infty, \infty)$ 使得 $t_k - t_{k-1} \in (-1/2, 1/2)$ 且 $F(y_k) = e^{2\pi i t_k}$. 在此也可以理解为: 当从 $F(y_{k-1})$ 到 $F(y_k)$ 沿逆

时针方向走时, 则通过选 t_k 使得 $1/2 > t_k - t_{k-1} > 0$. 当沿顺时针方向走时, 则通过选 t_k 使得 $-1/2 < t_k - t_{k-1} < 0$. 此时

$$\frac{F(y_k)}{F(y_{k-1})} = \frac{e^{2\pi i t_k}}{e^{2\pi i t_{k-1}}} = e^{2\pi i (t_k - t_{k-1})}$$

$$\psi\left(\frac{F(y_k)}{F(y_{k-1})}\right) = t_k - t_{k-1}$$

而

$$F'(y) = \psi\left(\frac{F(y_N)}{F(y_{N-1})}\right) + \psi\left(\frac{F(y_{N-1})}{F(y_{N-2})}\right) + \cdots + \psi\left(\frac{F(y_2)}{F(y_1)}\right) + \psi\left(\frac{F(y_1)}{F(y_0)}\right)$$

$$= (t_N - t_{N-1}) + (t_{N-1} - t_{N-2}) + \cdots + (t_2 - t_1) + (t_1 - 0) = t_N.$$

提升的唯一性: $I \times I$ 是道路连通的. 对于映射 $G : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$, 如果 $\phi \cdot G = C_x$, 则 $G(I \times I) \subset \phi^{-1}(x)$. 而

$$\phi^{-1}(x) = \{t + k | k \in \mathbb{Z}\}$$

是一些离散的点, 映射的像 $G(I \times I)$ 是连通的, 因而 $G(I \times I) \equiv t + k_0$ 是一个常值.

设 $F : I \times I \rightarrow S^1$ 有两个提升 $F', F'' : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ 且都满足 $F'(0) = F''(0) = 0$. 则 $F' - F'' : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且

$$\phi(F' - F'') = \frac{e^{2\pi i F'}}{e^{2\pi i F''}} = \frac{F}{F} = c_1$$

因而 $F' - F''$ 是一个常值映射, 由 $F'(0) = F''(0)$ 知 $F' \equiv F''$.

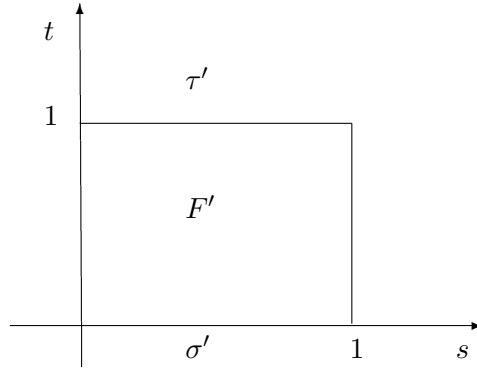


图2.9

考察 $F'(s, 0) = \sigma'(s)$ 和 $F'(s, 1) = \tau'(s)$ (见图2.9), 我们注意到

$$\phi \cdot \sigma'(s) = \phi \cdot F'(s, 0) = F(s, 0) = \sigma(s), \quad \phi \cdot \tau'(s) = \phi \cdot F'(s, 1) = F(s, 1) = \tau(s).$$

同样由于 $\{0\} \times I$ 和 $\{1\} \times I$ 都道路连通,

$$\phi \cdot F'(0, t) = F(0, t) \equiv 1, \quad \phi \cdot F'(1, t) = F(1, t) \equiv 1$$

$F'(\{0\} \times I), F'(\{1\} \times I) \in \phi^{-1}(1)$ 也是常值并且

$$\sigma'(0) = F'(0, 0) = 0 = F'(0, 1) = \tau'(0),$$

σ', τ' 分别是 σ, τ 的道路提升.

定理2.3.1的证明 对任何道路同伦类 $[\sigma] \in \pi(S^1, 1)$, 任选一个代表元 $\sigma : I \rightarrow S^1$. σ 在 $\mathbb{R}$ 中有唯一的道路提升 $\sigma' : I \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $\sigma'(0) = 0$. 在此不能断定道路提升的终点 $\sigma'(1)$ 也是 0, 由 $\phi \cdot \sigma'(1) = \sigma(1) = 1$ 知 $\sigma'(1) \in \phi^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. 因而 σ 唯一的对应一个整数 $\sigma'(1) = n$, 这个整数实际上代表的是 σ 绕圆转的周数.

如果 $\sigma \simeq_p \tau$, $F : I \times I \rightarrow S^1$ 是从 σ 到 τ 的道路伦移. 则 F 有唯一的同伦提升 $F' : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $F'(0, 0) = 0$ 而

$$F'(0, s) = \sigma'(s), \quad F'(1, s) = \tau'(s)$$

分别是 σ, τ 的道路提升

前面我们已经证明了 $F'(\{1\} \times I) \in \phi^{-1}(1)$ 是常值. 道路提升的终点 $\sigma'(1) = \tau'(1) = n$ 与道路同伦类 $[\sigma]$ 中代表元 σ 的选取无关.

定义 $\chi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ 为: 对任何道路同伦类 $[\sigma] \in \pi_1(S^1, 1)$, 任选一个代表元 σ , 做 σ 在 $\mathbb{R}$ 中的道路提升 σ' . 定义

$$\chi([\sigma]) = \sigma'(1) \quad \text{道路提升的终点.}$$

下面我们证明 $\chi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ 是群同构.

首先证明 χ 是群同态. 对任何两个道路同伦类 $[\sigma], [\tau] \in \pi_1(S^1, 1)$ 假设 σ', τ' 分别是 σ, τ 的道路提升且 $\sigma'(0) = \tau'(0) = 0$, 则 $\chi([\sigma]) = \sigma'(1)$, $\chi([\tau]) = \tau'(1)$.

考虑 $\sigma * \tau$ 的道路提升, 我们注意到: 它们各自的道路提升 σ' 和 τ' 不能做乘积, 但 σ' 和 $\sigma'(1) + \tau'$ 可以做乘积, 其中 $\sigma'(1)$ 是一个整数. 并且

$$\phi \cdot (\sigma'(1) + \tau'(s)) = \phi(\sigma'(1)) \cdot \phi(\tau'(s)) = \tau(s).$$

$\sigma' * (\sigma'(1) + \tau')$ 是 $\sigma * \tau$ 的道路提升. 因而

$$\begin{aligned} \chi([\sigma] \cdot [\tau]) &= \chi([\sigma * \tau]) = \sigma' * (\sigma'(1) + \tau')(1) = \sigma'(1) + \tau'(1) \\ &= \chi([\sigma]) + \chi([\tau]) \end{aligned}$$

χ 是群同态.

对任何 $n \in \mathbb{Z}$, 有 S^1 中的闭路

$$\sigma_n : I \longrightarrow S^1, \quad \sigma_n(s) = e^{2\pi i n s}$$

它的道路提升为

$$\sigma'_n : I \longrightarrow S^1, \quad \text{skip1cm} \sigma'_n(s) = ns$$

$\chi([\sigma_n]) = \sigma'_n(1) = n$, χ 是满同态.

设 $[\sigma], [\tau]$ 是 $\pi_1(S^1, 1)$ 中的两个道路同伦类, $\sigma', \tau' : I \rightarrow \mathbb{R}$ 分别是 σ, τ 的道路提升. 如果

$$\chi([\sigma]) = \sigma'(1) = \chi([\tau]) = \tau'(1),$$

则 σ', τ' 是 $\mathbb{R}$ 中起点在0, 终点相同的道路. 我们可以很容易的构造出从 σ' 到 τ' 的道路伦移

$$F'(s, t) = (1-t)\sigma'(s) + t\tau'(s).$$

因而 $F = \phi \cdot F'$ 是从 σ 到 τ 的道路伦移, $[\sigma] = [\tau]$. χ 是单同态.

例1 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 与圆 S^1 同伦等价, 因而 $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}, (1, 0)) \cong \mathbb{Z}$.

例2 $n \geq 3$ 时, $\mathbb{R}^n$ 不与 $\mathbb{R}^2$ 拓扑.

设 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{R}^n$ 同胚, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是同胚映射. 设 $f(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, 则

$$f: \mathbb{R}^2 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{x_0\}$$

也是同胚映射. 它导出基本群的同构,

$$f_*: \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}, (1, 0)) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathbb{R}^n - \{f(0)\}, f(1, 0)).$$

但是 $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}, (1, 0)) \cong \mathbb{Z}$, 而 $\mathbb{R}^n - \{f(0)\}$ 同伦等价与 $n-1$ 维球面 S^{n-1} . 在§2.1习题4中我们证明过: $n-1 \geq 2$ 时, $\pi_1(S^{n-1}, x_0) = 0$. 因而当 $n \geq 3$ 时 $\pi_1(\mathbb{R}^n - \{f(0)\}, f(1, 0)) = 0$. 矛盾.

例3 环面 $T^2 = S^1 \times S^1$, 因而

$$\pi_1(S^1 \times S^1, (1, 1)) = \pi_1(S^1, 1) \times \pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

命题2.3.4 圆盘 D^2 的边界 S^1 不是 D^2 的收缩核, 即不存在映射 $r: D^2 \rightarrow S^1$ 使得 $r \cdot i = 1_{S^1}$

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{i} & D^2 \\ & \searrow 1 & \downarrow r \\ & & S^1 \end{array}$$

证明: 记 $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ 为复平面上的单位圆盘, 并去基点 $x_0 = 1$. 如果存在 $r: D^2 \rightarrow S^1$ 使得 $r \cdot i = 1_{S^1}$, 则映射导出基本群的同构 $r_* \cdot i_* = 1$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, 1) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(D^2, 1) \\ & \searrow 1 & \downarrow r_* \\ & & \pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}. \end{array}$$

但是 D^2 是可缩空间, 其基本群 $\pi_1(D^2, 1) = 0$, 而 $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$. 矛盾.

例4 记映射 $n: S^1 \rightarrow S^1$ 为 $n(e^{2\pi is}) = e^{2\pi int}$, 它导出基本群的同态 $n_*: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$. 对 $\pi_1(S^1, 1)$ 中的道路同伦类 $[\sigma]$, 设 $\sigma': I \rightarrow \mathbb{R}$ 是代表元 σ 在 $\mathbb{R}$ 中的提升. 由 ϕ 的定义知

$$\sigma: I \longrightarrow S^1 \quad \text{为} \sigma(s) = e^{2\pi i \sigma'(s)}.$$

因而对 $s \in I$

$$n \cdot \sigma(s) = n(\sigma(s)) = e^{2\pi i n \sigma'(s)}$$

$n_*([\sigma]) = n \cdot [\sigma]$ 为 $[\sigma]$ 乘以 n 倍.

定理2.3.5(Brouwer不动点定理) 任何圆盘 D^2 到自身的映射 $f : D^2 \rightarrow D^2$ 都有不动点, 即存在 $x \in D^2$ 使得 $f(x) = x$.

证明: 如果 $f : D^2 \rightarrow D^2$ 不存在不动点, 即对任何 $z \in D^2$, $f(z) \neq z$.

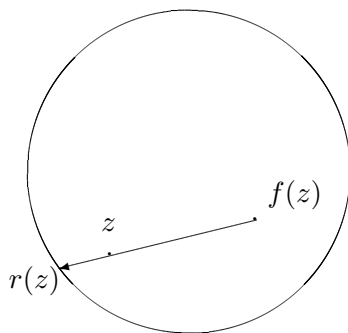


图2.10

如图2.10, 从 $f(z)$ 向 z 引一条射线, 这条射线交边界圆与 $r(z)$. 定义 $r : D^2 \rightarrow S^1$ 为: 对任何 $z \in D^2$, $r(z)$ 为射线与边界圆的交点. 容易验证, 当 $z \in S^1$ 在边界圆上时 $r(z) = z$, $r \cdot i = 1_{S^1}$. 与命题2.3.4矛盾.

定理2.3.4是Brouwer不动点定理的2维形式, 更一般的Brouwer不动点定理是: 任何 n 维实球体 $D^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | \sum x_i^2 \leq 1\}$ 到自身的映射 $f : D^n \rightarrow D^n$ 都有不动点.

§2.3 习题

- 1 试证明1维形式的Brouwer不动点定理, 即任何映射 $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ 都有不动点.
- 2 设 $X = U \cup V$, 其中 U, V 是 X 的开集, 基点 $x_0 \in U \cap V$. 证明: 如果 U, V 都是单连通的, $U \cap V$ 是道路连通的, 则 X 是单连通的.
- 3 求 $D^n - \{0\}$ 的基本群 $\pi_1(D^n - \{0\}, x_0)$, 其中 0 是坐标原点.
- 4 试利用圆的基本群证明代数基本定理, 即复数域上的 n 次方程在复数域上一定有 n 个根.
- 5 设 $A \hookrightarrow X$ 是 X 的收缩核, $\pi_1(A, x_0)$ 是 $\pi_1(X, x_0)$ 的正规子群. 证明:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) \times \pi_1(X, x_0) / \pi_1(A, x_0).$$

- 6 设 A 是一个 3×3 阶矩阵, 其各个元素 a_{ij} 均大于0. 试证明: A 有一个正的特征值 λ_1 , 且有一个各分量都大于0的属于 λ_1 特征向量.

提示: 令 $T = \{(x, y, z)^T \in S^2 | x, y, z \geq 0\}$ 为第一卦限的四分之一球面. 考虑映射

$$f : T \rightarrow S^2 \quad f(x, y, z) = \frac{A \cdot (x, y, z)^T}{\|A \cdot (x, y, z)^T\|}$$

利用Brouwer不动点定理证明结论.

§2.4 van Kampen定理

在介绍van Kampen定理之前, 我们先来介绍一个关于群的基本概念-自由积.

定义2.4.1 设 A, B 是两个群 e_A, e_B 分别是 A, B 的单位元. 定义 A 与 B 的自由积 $A * B$ 是一个群.

其单位元为 $e = e_A = e_B$.

其元素是任意长度的字

$a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n b_n$ 可以认为是乘积, 满足结合律, 其中 $a_i \in A, b_i \in B$

逆元素

$$(a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_n b_n)^{-1} = b_n^{-1} a_n^{-1} \cdots b_2^{-1} a_2^{-1} b_1^{-1} a_1^{-1}.$$

例1 设 $\mathbb{Z}\{a\}, \mathbb{Z}\{b\}$ 分别是由 a, b 生成的自由Abel群, 则 $\mathbb{Z}\{a\} * \mathbb{Z}\{b\}$ 或简记为 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F(a, b)$ 为由 a, b 生成的自由群. 其元素形如

$$a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \cdots a^{n_s} b^{m_s} \quad \text{其中 } n_i, m_i \in \mathbb{Z}.$$

在 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ 中由 $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ 生成的正规子群称为 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ 的交换化子, 记为 $[\mathbb{Z}, \mathbb{Z}]$. 其元素是所有满足

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = 0, \quad m_1 + m_2 + \cdots + m_s = 0$$

的元素 $a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \cdots a^{n_s} b^{m_s}$. 而商群

$$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} / [\mathbb{Z}, \mathbb{Z}] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

例2 记 $\mathbb{Z}/2\{a\}, \mathbb{Z}/2\{b\}$ 分别为由 a, b 生成的乘法群 $\mathbb{Z}/2$. 记

$$\mathbb{Z}/2\{a\} = \{e, a\}, \quad \mathbb{Z}/2\{b\} = \{e, b\}.$$

则 $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ 是一个非交换群, 其元素有以下4种形式:

$$\begin{aligned} & abab \cdots ab, \quad baba \cdots ba \\ & abab \cdots aba \quad baba \cdots bab. \end{aligned}$$

定义2.4.2 设 S 是一个集合, 定义 $F(S)$ 为由 S 生成的自由群. 其元素为所有的字

$$F(S) = \{\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_s^{k_s} \mid \text{其中 } \alpha_i \in S, k_i \in \mathbb{Z}, \text{ 满足 } \alpha_i^0 = e\}$$

乘积满足结合律且

$$(\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_s^{k_s}) \cdot (\beta_1^{l_1} \beta_2^{l_2} \cdots \beta_t^{l_t}) = \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_s^{k_s} \beta_1^{l_1} \beta_2^{l_2} \cdots \beta_t^{l_t}.$$

逆元素为

$$(\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_s^{k_s})^{-1} = \alpha_s^{-k_s} \cdots \alpha_2^{-k_2} \alpha_1^{-k_1}.$$

简单的说, 在一个自由群 $F(S)$ 中元素之间的乘积没有任何关系. 因此尽管自由群很大, 但它也有很好的性质

定理2.4.1 对任何群 G , 任何集合的映射 $f : S \rightarrow G$ 都可以扩充成群同态 $F_f : F(S) \rightarrow G$, 使得对任何 $\alpha \in S, F_f(\alpha) = f(\alpha)$.

证明 定义 $F_f : F(S) \rightarrow G$ 为: 对任何 $F(S)$ 中的字 $\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_s^{k_s}$,

$$F_f(\alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_s^{k_s}) = f(\alpha_1)^{k_1} f(\alpha_2)^{k_2} \cdots f(\alpha_s)^{k_s}.$$

容易验证 F_f 是满足条件的群同态.

在此应当注意到: 如果 F 是由集合 S 生成的一般的群 (非自由群), G 是另一个群. 一般情况下集合映射 $f : S \rightarrow G$ 不能扩充成群同态. 原因是: 在群 F 中可能有一些关系, 比如 $\alpha^3 = e, \alpha^2 \beta = \beta \alpha$ 等, 而在 G 当中 $f(\alpha), f(\beta)$ 没有这些关系.

例3 $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$ 是由 $S = \{a, b\}$ 生成的群, 有关系

$$a^2 = e, \quad b^3 = e, \quad ab = ba.$$

集合映射 $f : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{Z}/5, f(a) = 1, f(b) = 2$ 就不能扩充成群同态. 否则

$$f(e) = 0 = f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 1 + 1 = 2 \neq 0.$$

定理2.4.2 任何群 G 都同构与某个自由群的商群.

证明: 记 G^* 为从群 G 中除去单位元 e 后得到的集合. 由 G^* 生成一个自由群 $F(G^*)$. 定义集合映射 $f : G^* \rightarrow G$ 为: 对任何 $a \in G^*, f(a) = a \in G$. 将 f 扩充成群同态 $F_f : F(G^*) \rightarrow G$. 容易验证 F_f 是一个满同态, 因而 $G \cong F(G^*)/Ker F_f$.

定理2.4.3的另一种解释是: 任何群都是由生成元和关系组给出的. 在此集合 G^* 是生成元 $Ker F_f$ 是关系组. 当然许多群的生成元不必找这么多.

例4 对于群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, 不必找 $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})^*$ 做生成元生成自由群. 找生成元 $\{a, b\}$ 生成自由群 $F(a, b)$. 定义集合映射

$$f : \{a, b\} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad f(a) = (1, 0), f(b) = (0, 1)$$

并扩充成群同态 $F_f : F(a, b) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 容易验证 F_f 是满同态, $Ker F_f$ 为 $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ 生成的正规子群.

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong F(a, b)/\langle [a, b] \rangle.$$

另一种理解方法是 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 由两个元素 a, b 生成, 关系是 $ab = ba$.

van Kampen定理 设 U, V 是空间 X 的两个开集, 满足:

1, $U \cup V = X$ 且基点 $x_0 \in U \cap V$.

2, $U \cap V, U, V$ 都是道路连通的.

则 $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) / N$. 其中 N 由一下方式给出: 记

$$i_1 : \pi_1(U \cap V, x_0) \longrightarrow \pi_1(U, x_0), \quad i_2 : \pi_1(U \cap V, x_0) \longrightarrow \pi_1(V, x_0)$$

为内射导出的基本群同态. 任取 $[\sigma] \in \pi_1(U \cap V, x_0)$ $i_1([\sigma]) \in \pi_1(U, x_0)$, $i_2([\sigma]) \in \pi_1(V, x_0)$ 因而

$$i_1([\sigma])^{-1} \cdot i_2([\sigma]) \in \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0).$$

N 为 $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ 中所有的 $i_1([\sigma])^{-1} \cdot i_2([\sigma])$ 生成的正规子群, 即:

$$N = \langle i_1([\sigma])^{-1} \cdot i_2([\sigma]) \mid [\sigma] \in \pi_1(U \cap V, x_0) \rangle.$$

van Kampen定理也可以理解为 $X = U \cup V$ 的基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 等于在 U 的基本群与 V 的基本群的自由积 $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ 中添加关系: 对任何 $U \cap V$ 的基本群 $\pi_1(U \cap V, x_0)$ 中的任何道路同伦类 $[\sigma]$, $i_1([\sigma]) = i_2([\sigma])$.

证明*: 定理的证明很长, 在此我们只阐述一下定理证明的思路, (读者可以参考。。。的Elements of Topology).

记

$$\begin{aligned} j_1 : \pi_1(U, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0), & j_2 : \pi_1(V, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ \phi_1 : \pi_1(U, x_0) &\longrightarrow \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) & \phi_2 : \pi_1(V, x_0) &\longrightarrow \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \\ i : \pi_1(U \cap V, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \end{aligned}$$

为内射导出的基本群同态. 由群自由积的性质知 j_1, j_2 导出同态

$$j = j_1 * j_2 : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0),$$

并且有商同态

$$p : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) / N.$$

因此, 我们有下面群同态的交换图.

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(U, x_0) & & \\ & \nearrow i_1 & \downarrow j_1 & \searrow \phi_1 & \\ \pi_1(U \cap V, x_0) & \xrightarrow{i} & \pi_1(X, x_0) & \xleftarrow{j} & A * B \xrightarrow{p} \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) / N \\ & \searrow i_2 & \uparrow j_2 & \nearrow \phi_2 & \\ & & \pi_1(V, x_0) & & \end{array}$$

(Note: The diagram also includes arrows ϕ'_1 from $\pi_1(U, x_0)$ to the quotient, ϕ'_2 from $\pi_1(V, x_0)$ to the quotient, and a dotted arrow ϕ from $A * B$ to the quotient.)

其中 $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ 简记为 $A * B$.

在此, 我们需要构造一个同构映射 $\phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ 使得上图可换, 而 $p \cdot \phi$ 是同构.

首先构造一个对应 $\bar{\phi} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$.

对任何 $\pi_1(X, x_0)$ 中的道路同伦类 $[\sigma]$, 选取一个代表元

$$\sigma : I \longrightarrow X \quad \text{使得} \sigma(0) = \sigma(1) = x_0.$$

由于单位区间 I 是紧致的, $\{U, V\}$ 是 X 的一个开覆盖, 存在 I 的一个划分

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = 1$$

使得对任何 i , $\sigma([t_{i-1}, t_i])$ 的像或者在 U 中或者在 V 中.

我们记

$$\sigma'_i : I \longrightarrow X \quad \sigma'_i(s) = \sigma((1-s)t_{i-1} + st_i)$$

为 σ 在 $[t_{i-1}, t_i]$ 一段的道路, 则 σ'_i 或者是 U 中道路或者是 V 中道路. 道路的起点是 $\sigma(t_{i-1}) = x_{i-1}$, 终点是 $\sigma(t_i) = x_i$.

由于 $U, V, U \cap V$ 都是道路连通的, 我们依照以下原则选取从基地 x_0 到 $x_i = \sigma(t_i)$ 的道路 τ_i . (见图2.11) 对任何 $0 < i < n$

1 如果 $\sigma([t_{i-1}, t_i]), \sigma([t_i, t_{i+1}])$ 的像同在 U 或同在 V 中, 我们选取 τ_i 为 U 或 V 中从 x_0 到 $x_i = \sigma(t_i)$ 的道路. 此时

$\sigma'_i * \tau_i^{-1}$ 是 U 或 V 中从 $x_{i-1} = \sigma(t_{i-1})$ 到基点 x_0 的道路.

$\tau_i * \sigma'_{i+1}$ 是 U 或 V 中从基点 x_0 到 $x_{i+1} = \sigma(t_{i+1})$ 的道路.

2 如果 $\sigma([t_{i-1}, t_i]), \sigma([t_i, t_{i+1}])$ 一个在 U 中一个在 V 中, 比如:

$$\sigma([t_{i-1}, t_i]) \subset U,$$

$$\sigma([t_i, t_{i+1}]) \subset V,$$

则 $x_i = \sigma(t_i) \in U \cap V$. 我们选 τ_i 为 $U \cap V$ 中从基点 x_0 到 $x_i = \sigma(t_i)$ 的一条道路. 此时

$\sigma'_i * \tau_i^{-1}$ 是 U 中从 $x_{i-1} = \sigma(t_{i-1})$ 到基点 x_0 的道路.

$\tau_i * \sigma'_{i+1}$ 是 V 中从基点 x_0 到 $x_{i+1} = \sigma(t_{i+1})$ 的道路.

特别的, $\sigma'_1 * \tau_1^{-1}, \tau'_{n-1} * \sigma'_n$ 是起点、终点在 x_0 的闭路.

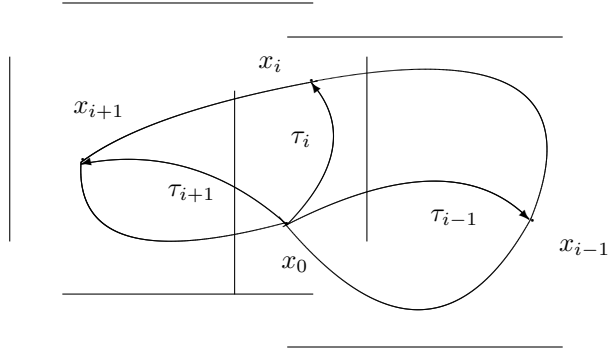


图2.11

由此得到: 对任何 $1 \leq i \leq n$, $\tau_{i-1} * \sigma'_i * \tau_i^{-1}$ 是 U 或 V 中的闭路, 因而

$$[\sigma'_1 * \tau_1^{-1}] \cdot [\tau_1 * \sigma'_2 * \tau_2^{-1}] \cdots [\tau_{i-1} * \sigma'_i * \tau_i^{-1}] \cdots [\tau_{n-1} * \sigma'_n]$$

是 $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ 中的一个元素, 他代表 $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$ 中的一个等价类.

要完成整个定理的证明, 我们还需要完成以下几个步骤.

1, 证明等价类

$$([\sigma'_1 * \tau_1^{-1}] \cdot [\tau_1 * \sigma'_2 * \tau_2^{-1}] \cdots [\tau_{i-1} * \sigma'_i * \tau_i^{-1}] \cdots [\tau_{n-1} * \sigma'_n]) \cdot N$$

在 $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$ 中不依赖于从基点 x_0 到 $x_i = \sigma(t_i)$ 的道路 τ_i 的选取. 这是因为当另选从 x_0 到 x_i 的道路 γ_i 时,

$$\begin{aligned} & [\sigma'_1 * \gamma_1^{-1}] \cdot [\gamma_1 * \sigma'_2 * \gamma_2^{-1}] \cdots [\gamma_{i-1} * \sigma'_i * \gamma_i^{-1}] \cdots [\gamma_{n-1} * \sigma'_n] \\ &= [\sigma'_1 * \tau_1^{-1}] \cdot [\tau_1 * \gamma_1^{-1}] \cdot [\gamma_1 * \sigma'_2 * \tau_2^{-1}] \cdot [\tau_2 * \gamma_2^{-1}] \cdots [\gamma_{n-1} * \tau_{n-1}^{-1}] \cdot [\tau_{n-1} * \sigma'_n] \\ &= [\sigma'_1 * \tau_1^{-1}] \cdot [\tau_1 * \sigma'_2 * \tau_2^{-1}] \cdots [\tau_{i-1} * \sigma'_i * \tau_i^{-1}] \cdots [\tau_{n-1} * \sigma'_n] \end{aligned}$$

其中 $[\tau_i * \gamma_i^{-1}]$ 及 $[\gamma_i * \tau_i^{-1}]$ 同为 $\pi_1(U, x_0)$ 或 $\pi_1(V, x_0)$ 中的元, 或者虽分别在 $\pi_1(U, x_0)$ 和 $\pi_1(V, x_0)$ 中, 但同来自 $\pi_1(U \cup V, x_0)$. $[\tau_i * \gamma_i^{-1}] \cdot [\gamma_i * \tau_i^{-1}] = 1$.

2, 证明等价类

$$([\sigma'_1 * \tau_1^{-1}] \cdot [\tau_1 * \sigma'_2 * \tau_2^{-1}] \cdots [\tau_{i-1} * \sigma'_i * \tau_i^{-1}] \cdots [\tau_{n-1} * \sigma'_n]) \cdot N$$

在 $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$ 中不依赖与分点

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = 1$$

的选取. 这可以通过证明: 增加分点 t'_i 不改变等价类来实现. 当

$$0 = t'_0 < t'_1 < \cdots < t'_{j-1} < t'_j < \cdots < t'_m = 1$$

是另一种划分时, 可以通过增加分点使得 $t_0, t_1, \cdots, t_n$, 和 $t'_0, t'_1, \cdots, t'_m$ 都是

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_{k-1} < s_k < \cdots < s_N = 1$$

的分点. 这样 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_{k-1} < s_k < \cdots < s_N = 1$ 既是在 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ 是增加了分点也是在 $0 = t'_0 < t'_1 < \cdots < t'_m = 1$ 上增加了分点.

对于增加一个分点 t'_i , 假设

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t'_i < t_i < \cdots < t_n = 1.$$

记

$$\begin{aligned} \sigma''_i : I &\rightarrow X, & \sigma''_i(s) &= \sigma((1-s)t_{i-1} + st'_i) \\ \sigma'''_i : I &\rightarrow X, & \sigma'''_i(s) &= \sigma((1-s)t'_i + st_i) \end{aligned}$$

分别为 σ 在 $[t_{i-1}, t'_i]$ 和 $[t'_i, t_i]$ 的一段, τ'_i 为从 x_0 到 x'_i 的道路. 则增加分点后对应的等价类为

$$\begin{aligned} & [\sigma'_1 * \tau_1^{-1}] \cdot [\tau_1 * \sigma_2 * \tau_2^{-1}] \cdots [\tau_{i-1} * \sigma''_i * \tau'_i{}^{-1}] \cdot [\tau'_i * \sigma'''_i * \tau_i^{-1}] \cdots [\tau_{n-1} * \sigma'_n] \\ &= [\sigma'_1 * \tau_1^{-1}] \cdot [\tau_1 * \sigma_2 * \tau_2^{-1}] \cdots [\tau_{i-1} * \sigma''_i * \tau'_i{}^{-1} * \tau'_i * \sigma'''_i * \tau_i^{-1}] \cdots [\tau_{n-1} * \sigma'_n] \\ &= [\sigma'_1 * \tau_1^{-1}] \cdot [\tau_1 * \sigma_2 * \tau_2^{-1}] \cdots [\tau_{i-1} * \sigma''_i * \sigma'''_i * \tau_i^{-1}] \cdots [\tau_{n-1} * \sigma'_n] \\ &= [\sigma'_1 * \tau_1^{-1}] \cdot [\tau_1 * \sigma_2 * \tau_2^{-1}] \cdots [\tau_{i-1} * \sigma'_i * \tau_i^{-1}] \cdots [\tau_{n-1} * \sigma'_n] \end{aligned}$$

这是因为 $[\tau_{i-1} * \sigma''_i * \tau'_i{}^{-1}]$, $[\tau'_i * \sigma'''_i * \tau_i^{-1}]$ 同在 $\pi_1(U, x_0)$ 中或者同在 $\pi_1(V, x_0)$ 中, 可以在 $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ 中做乘积.

3, 证明等价类

$$([\sigma'_1 * \tau_1^{-1}] \cdot [\tau_1 * \sigma_2 * \tau_2^{-1}] \cdots [\tau_{i-1} * \sigma'_i * \tau_i^{-1}] \cdots [\tau_{n-1} * \sigma'_n]) \cdot N$$

在 $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$ 中不依赖与道路同伦等价类 $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$ 中代表元 σ 的选取.

设 $\sigma \simeq_p \rho$, $F : I \times I \rightarrow X$ 是从 σ 到 ρ 的道路伦移. 由于 $I \times I$ 是紧致的, U, V 是 X 的一个开覆盖, 存在 $\delta > 0$ 使得对 $I \times I$ 中任两个点 x, y , 当他俩的距离 $\rho(x, y) < \delta$ 时 $F(x), F(y)$ 同在 U 中或同在 V 中.

将 $I = [0, 1]$ 做一个划分 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{j-1} < t_j < \cdots < t_n = 1$ 使得 $\max\{t_j - t_{j-1} | j = 1, 2, \cdots, n\} < \delta/2$. 记

$$\begin{aligned} \sigma_j : I &\rightarrow X, & \text{为 } \sigma_j(s) &= F(s, t_j), \\ F_j : I \times I &\rightarrow X & \text{为 } F_j(s, t) &= F(s, (1-t)t_{j-1} + tt_j). \end{aligned}$$

则有道路同伦

$$\sigma = \sigma_0 \stackrel{F_1}{\simeq_p} \sigma_1 \stackrel{F_2}{\simeq_p} \sigma_2 \simeq_p \cdots \simeq_p \sigma_{j-1} \stackrel{F_j}{\simeq_p} \sigma_j \simeq_p \cdots \simeq_p \sigma_n = \rho$$

在此, 我们只需要证明 σ_{j-1} 对应的等价类

$$([\sigma'_{j-1,1} * \tau_{j-1,1}^{-1}] \cdots [\tau_{j-1,i-1} * \sigma'_{j-1,i} * \tau_{j-1,i}^{-1}] \cdots [\tau_{j-1,n-1} * \sigma'_{j-1,n}]) \cdot N$$

和 σ_j 对应的等价类

$$([\sigma'_{j,1} * \tau'^{-1}_{j,1}] \cdot [\tau'_{j,1} * \sigma'_{j,2} * \tau'^{-1}_{j,2}] \cdots [\tau'_{j,i-1} * \sigma'_{j,i} * \tau'^{-1}_{j,i}] \cdots [\tau'_{j,n-1} * \sigma'_{j,m}]) \cdot N$$

在 $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$ 中相等, 则 $\sigma = \sigma_0$ 对应的等价类与 $\sigma_n = \rho$ 对应的等价类相同.

将 $\sigma \simeq_p \rho$ 拆分成许多段道路同伦的好处是当我们给出 I 的一个划分

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{i-1} < s_i < \cdots < s_m = 1,$$

他满足

$$\max\{s_i - s_{i-1} | i = 1, 2, \cdots, m\} < \delta/2$$

时不仅 σ_{j-1}, σ_j 在 $[s_{i-1}, s_i]$ 的一段全在 U 中或全在 V 中, 而且从 σ_{j-1} 到 σ_j 的整个伦移 F_j 在 $[s_{i-1}, s_i] \times I$ 这一段也全在 U 中或全在 V 中. (见图2.12)

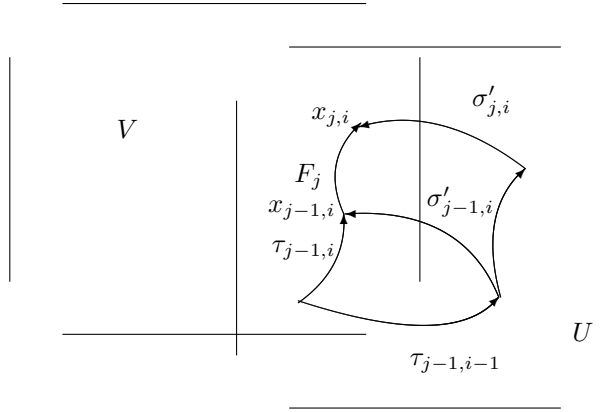


图2.12

选取从 x_0 到 $x_{j-1,i} = \sigma_j(s_i)$ 的道路 $\tau_{j-1,i}$, 固定 s_i , $F_j(s_i, t)$ 是从 $x_{j-1,i}$ 到 $x_{j,i}$ 的道路, 并选取从 x_0 到 $x_{j,i}$ 的道路 $\tau'_{j,i}$ 为 $\tau_{j-1,i} * F_j(s_i, -)$. 注意到, 当 $F_j([s_{i-1}, s_i] \times I)$ 与 $F_j([s_i, s_{i+1}] \times I)$ 一个在 U 中另一个在 V 中时 $F(\{s_i\} \times I) \subset U \cap V$, 这样的选取是合理的. 易知在 $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$ 中

$$[\tau_{j-1,i-1} * \sigma'_{j-1,i} * \tau'^{-1}_{j-1,i}] = [\tau'_{j,i-1} * \sigma'_{j,i} * \tau'^{-1}_{j,i}].$$

这样我们建立了从 $\pi_1(X, x_0)$ 到 $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$ 的对应 ϕ

4, 证明: $\phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$ 是同态, 并且是满同态.

5, 证明: $\phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ 是单同态. 考虑下面群同态的交换图:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) & \xrightarrow{p} & \pi_1(U, x_0) * \pi_a(V, x_0)/N \\ j \downarrow & \nearrow \phi & \\ \pi_1(X, x_0), & & \end{array}$$

其中 $j : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ 是由 $j_1 : \pi(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$, $j_2 : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ 诱导出的群的自由积到群的同态(见习题2). 由 ϕ 的构造,

我们知道 j 是一个满同态. 对任何 $[\sigma] \in \pi_1(U \cap V, x_0)$, $i_1([\sigma])^{-1} \cdot i_2([\sigma])$ 在群的自由积 $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ 中不能被消去. 这是因为

$$i_1([\sigma])^{-1} \in \pi_1(U, x_0), \quad i_2([\sigma]) \in \pi_1(V, x_0).$$

当通过 j 将 $i_1([\sigma])^{-1} \cdot i_2([\sigma])$ 映射到 $\pi_1(X, x_0)$ 中后

$$j(i_1([\sigma])^{-1} \cdot i_2([\sigma])) = i([\sigma])^{-1} \cdot i([\sigma]) = 0 \in \pi_1(X, x_0).$$

因而由所有 $i_1([\sigma])^{-1} \cdot i_2([\sigma])$ 生成的正规子群 N 是 $\text{Ker} j$ 的子群

$$N \subset \text{Ker} j \subset \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0).$$

另一方面

$$N = \text{Ker} p = \text{Ker}(\phi \cdot j) = j^{-1}(\text{Ker} \phi) \supset j^{-1}(0) = \text{Ker} j = N,$$

因而 $\text{Ker} \phi = \{0\}$, ϕ 是单射.

§2.4 习题

- 1 记 $\mathbb{Z}\{a\}$, $\mathbb{Z}\{b\}$ 分别为 a, b 生成的乘法群 $\mathbb{Z}$, 证明: 由 $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ 生成的正规子群中元素形如 $a^{n_1}b^{m_1}a^{n_2}b^{m_2} \dots a^{n_s}b^{m_s}$.
- 2 设 G_1, G_2, H 是群, 证明: 任何群同态 $f_1 : G_1 \rightarrow H$, $f_2 : G_2 \rightarrow H$ 都可以唯一的扩充成群同态

$$f_1 * f_2 : G_1 * G_2 \longrightarrow H$$

使得对于 $a_1 \in G_1, a_2 \in G_2$, $f_1 * f_2(a_1) = f_1(a_1)$, $f_1 * f_2(a_2) = f_2(a_2)$.

- 3 设 G 是一个非交换群, $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ 成为 G 的一个交换子. 证明: G 中所有的交换子 $\{[a, b] | a, b \in G\}$ 生成的子群

$$[G, G] = \{[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \cdots [a_n, b_n] | a_i, b_i \in G\}$$

是 G 的一个正规子群, 且 $G/[G, G]$ 是交换群.

- 4 设 G_1, G_2 是交换群, $G = G_1 * G_2$. 证明: $G/[G, G] \cong G_1 \oplus G_2$.
- 5 设 m, n 互素, 记 $G = \mathbb{Z}/m * \mathbb{Z}/n$. 证明: $G/[G, G] \cong \mathbb{Z}/m \cdot n$.
- 6 证明: $\phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$ 是满同态.
- 7 设 $U \cup V = X$, U, V 是道路连通的, $U \cap V$ 是单连通的. 证明:

$$k : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0)$$

是群同构.

§2.5 基本群的计算与应用

在证明了van Kampen定理之后, 我们来讨论基本群的计算与应用等问题. 当然基本群的计算是一个很难的问题, 许多空间的基本群还是计算不出来的.

一点并: 设 $(X, x_0), (Y, y_0)$ 是两个带基点的拓扑空间, 定义他们的一点并 $X \vee Y$ 为 $X \amalg Y / x_0 \sim y_0$, 即将 X 和 Y 在基点粘和在一起.

命题2.5.1 记 $S^1 \vee S^1$ 为两个圆 S_1^1, S_2^1 沿基点 $x_0 = 1$ 粘和得到的拓扑空间, 则

$$\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) \cong F(a, b)$$

为由两个元 $\{a, b\}$ 生成的自由群.

证明: 将 $S^1 \vee S^1$ 分成两个开集的并 $U \cup V = S^1 \vee S^1$ (见图2.13)

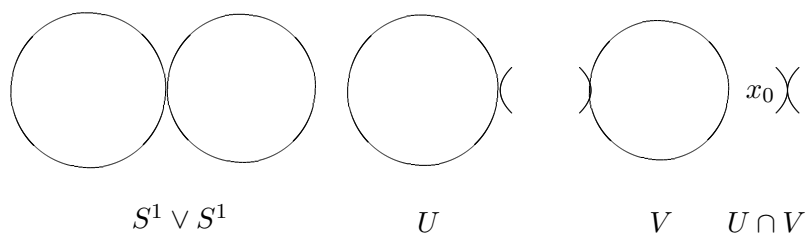


图2.13

U, V 都同伦等价与 S^1 , $\pi_1(U, x_0) \cong \pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z}$. $U \cap V$ 是可缩空间, $\pi_1(U \cap V, x_0) = 0$. 因而 $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} / 0 = F(a, b)$ 是由两个元 a, b 生成的自由群. a, b 代表的意义分别是绕左侧和右侧的圆逆时针方向转一周.

例1 类似于命题2.5.1的证明方法, 容易得出

$$\pi_1(S^1 \vee S^2, x_0) \cong \pi_1(S^1, x_0) * \pi_1(S^2, x_0) = \mathbb{Z}$$

设 X 是一个拓扑空间, $f : (S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ 是映射. f 导出基本群的同态 $f_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

命题2.5.2 记 $X \cup_f (CS^1) = X \cup_f e^2$ 为 $f : S^1 \rightarrow X$ 的映射锥. 则

$$\pi_1(X \cup_f e^2, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) / \langle f_*([\sigma_1]) \rangle,$$

其中 $\langle f_*([\sigma_1]) \rangle$ 为 $\pi_1(S^1, 1)$ 的生成元 $[\sigma_1]$ 在同态 f_* 下的像生成的正规子群.

证明: 记 $S^1 = \{e^{2\pi it} | t \in \mathbb{R}\}$. 将 $X \cup_f e^2 = Y$ 分成 U, V 的并, (见图2.14)

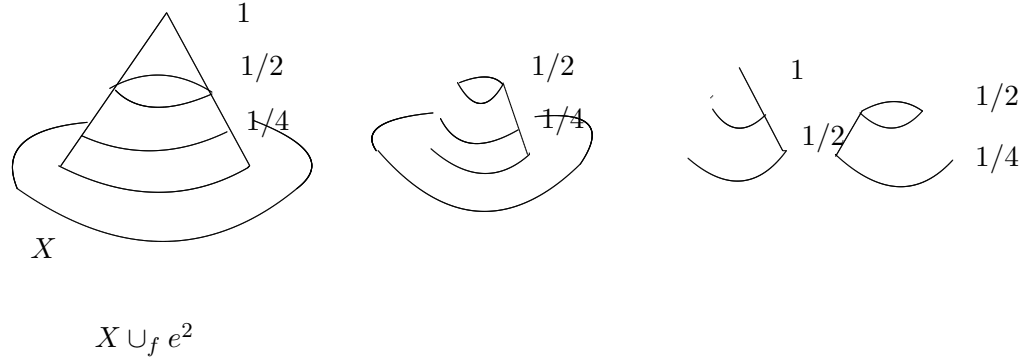


图2.14

其中 $U = X \cup_f (S^1 \times [0, 1/2)) = X \amalg S^1 \times [0, 1/2) / (z, 0) \sim f(z)$ 为映射锥砍去上部的锥 $S^1 \times [1/2, 1] / S^1 \times \{1\}$ 得到的开集. $V = S^1 \times (1/4, 1] / S^1 \times \{1\}$ 为映射锥上部的锥. $U \cap V = S^1 \times (1/4, 1/2)$. 取基点 $x_0 = (1, 1/3)$ 为 $U \cap V = S^1 \times (1/4, 1/2)$ 中的一点.

则 U 同伦等价与 X ,

$$P: U \xrightarrow{\simeq} X \quad \begin{array}{l} \text{对于 } x \in X, P(x) = x. \\ \text{对于 } (z, t) \in S^1 \times [0, 1/2), P(z, t) = f(z). \end{array}$$

是同伦等价映射. V 是可缩空间. $U \cap V \simeq S^1$. 由 van Kampen 定理知

$$\begin{aligned} \pi_1(X \cup_f e^2, x_0) &\cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) / N \\ &\cong \pi_1(X, P(x_0)) * \{e\} / P_*(N). \end{aligned}$$

下面我们计算正规子群 N 和 $P_*(N)$. $U \cap V = S^1 \times (1/4, 1/2)$,

$$\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \mathbb{Z}$$

的生成元为 $[\sigma'_1]$, 其中

$$\sigma'_1: I \longrightarrow U \cap V = S^1 \times (1/4, 1/2), \quad \sigma'_1(s) = (e^{2\pi is}, 1/3).$$

N 为 $\pi_1(U, x_0) * \{e\}$ 中由 $i_1([\sigma'_1])$ 生成的正规子群.

考察基本群的同构 $P_*: \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, P(x_0))$, 我们注意到

$$P \cdot \sigma'_1(s) = P(e^{2\pi is}, 1/3) = f(e^{2\pi is})$$

因而 $P_* \cdot i_1([\sigma'_1]) = [f \cdot \sigma_1] = f_*([\sigma_1])$. 命题成立.

推论2.5.3 设 $n \geq 2$, $f: S^n \rightarrow X$ 为任意映射, $X \cup_f CSn = X \cup_f e^{n+1}$ 为 f 的映射锥. 则

$$\pi_1(X \cup_f e^{n+1}, x_0) \cong \pi_1(X, x_0).$$

证明 将 f 的映射锥 $X \cup_f e^{n+1}$ 做与命题2.5.2类似的分解 $X \cup_f e^{n+1} = U \cup V$. 此时仍有 $U \simeq X$, V 可缩, 而 $U \cap V \simeq S^n$. 因而 $\pi_1(U \cap V, x_1) = \{e\}$, 由 $i_1([\sigma])^{-1}i_2([\sigma])$ 生成的正规子群 $N = \{e\}$. 结论成立.

例2 n 维实射影平面 $\mathbb{R}P^n$ 的基本群 $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0) \cong \mathbb{Z}/2$.

2维实射影空间 $\mathbb{R}P^2$ 可以看作映射锥 $S^1 \cup 2e^2$ 其中 $2: S^1 \rightarrow S^1$ 为 $2(z) = z^2$, 即对于 $z = e^{2\pi it} \in S^1$, $2(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i 2t}$. 它导出基本群的2倍映射

$$2: \pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}.$$

由命题2.5.2知 $\pi_1(\mathbb{R}P^2, [x_0]) \cong \mathbb{Z}/(2) = \mathbb{Z}/2$.

当 $n > 2$ 时, n 维射影空间可以看作 $n-1$ 维射影空间 $\mathbb{R}P^{n-1}$ 上的映射锥

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} \cup_p e^n,$$

其中 $p: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1} = S^{n-1}/\sim$ 为粘和对径点的映射. 由命题3.5.3知 $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^{n-1}, x_0) \cong \mathbb{Z}/2$.

定理2.5.4 任何群都可以实现为拓扑空间的基本群, 即: 对任何群 G 都存在拓扑空间 (X, x_0) 使得 $\pi_1(X, x_0) \cong G$.

证明 设群 G 是由其元素的集合 $S = \{\alpha_i | i \in \Lambda\}$ 生成的, 其中 Λ 是一个下标集. 记 $F(S)$ 为由 S 生成的自由群, 有自然的满同态

$$\phi: F(S) \rightarrow G, \quad \text{满足} \phi(\alpha_i) = \alpha_i.$$

由群同态基本定理知 $G \cong F(S)/\text{Ker}\phi$. 设 $\text{Ker}\phi$ 是由 $F(S)$ 中的元素簇 $\{\beta_j | j \in \Gamma\}$ 生成的正规子群, 其中 Γ 是下标集. 则

$$G \cong F(S)/\langle \beta_j | j \in \Gamma \rangle.$$

令 $Y = \bigvee_{i \in \Lambda} S_i^1$ 为圆簇 $\{S_i^1 | i \in \Lambda\}$ 的一点并. 由定理2.5.1及习题1知

$$\pi_1(Y, y_0) = \pi_1\left(\bigvee_{i \in \Lambda} S_i^1, y_0\right) \cong F(S)$$

为由 $S = \{\alpha_i | i \in \Lambda\}$ 生成的自由群. 对于每一个 $\beta_j \in \pi_1(Y, y_0) = F(S)$, 记 β_j 的闭路代表元为 $\beta_j: I \rightarrow Y$. 在 Y 上通过每个映射

$$\beta'_j: S^1 \longrightarrow Y, \quad \text{对于} s \in [0, 1], \beta'_j(e^{2\pi is}) = \beta_j(s)$$

都粘贴一个2维胞腔 e_j^2 , $j \in \Gamma$ 并令

$$X = Y \bigcup_{j \in \Gamma} \cup_{\beta'_j} e_j^2.$$

则对每一个 $j \in \Gamma$, 基本群同态 $\beta'_{j*}: \pi_1(S^1, y_0) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ 将 $\pi_1(S^1, y_0)$ 的生成元 $[\sigma_1]$ 映射到 β_j . 由命题2.5.2知

$$\pi_1\left(Y \bigcup_{j \in \Gamma} \cup_{\beta'_j} e_j^2, y_0\right) \cong \pi_1(Y, y_0)/\langle \beta_j | j \in \Gamma \rangle = G.$$

例3 环面 $T = S^1 \times S^1$, 因此其基本群是 $\pi_1(S^1 \times S^1, x_0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 环面还可以用一下方法构造出了(见图2.15)

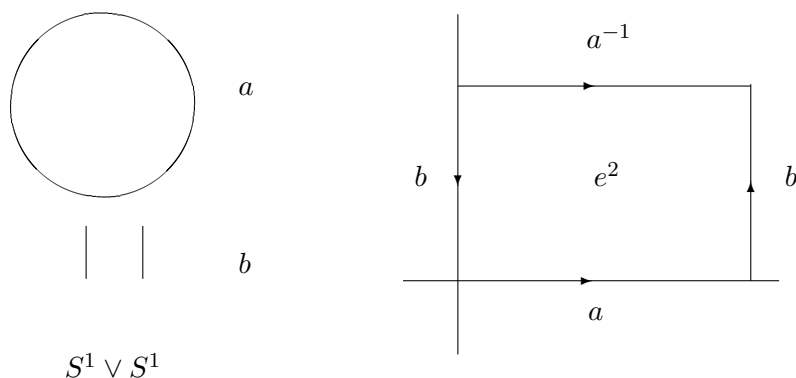


图2.15

环面是两组对边按同方向粘和得到的. 在此我们先做两个圆的一点并 $S^1 \vee S^1$ 作为骨架, 之后将 e^2 的边界 $\partial e^2 = S^1$ 粘在骨架 $S^1 \vee S^1$ 上, 即

$$T = S^1 \vee S^1 \cup_f e^2.$$

$\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)$ 是由两个元 a, b 生成的自由群 $F(a, b)$. 考察 e^2 的边界在 $S^1 \vee S^1$ 上的粘法, 它的一周是 a, b, a 的反方向, b 的反方向, 即 f_* 将 $\pi_1(S^1, y_0)$ 的生成元 $[\sigma_1]$ 映射到了 $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0)$ 中的 $aba^{-1}b^{-1}$. 因而

$$\pi_1(T, x_0) = \pi_1(S^1 \vee S^1 \cup_f e^2, x_0) = F(a, b) / \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

类似的, Klein瓶 K 也可以看成是在骨架 $S^1 \vee S^1$ 上通过映射 $g : \partial e^2 = S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ 粘上了正方形 e^2 ,

$$K = S^1 \vee S^1 \cup_g e^2.$$

所不同的是 e^2 的边界粘在 $S^1 \vee S^1$ 上的方法是 a, b, a 的反方向, b , 即 g_* 将 $\pi_1(S^1, y_0)$ 的生成元映到了 $aba^{-1}b$. 因而

$$\pi_1(K, x_0) = F(a, b) / \langle aba^{-1}b \rangle.$$

§2.5 习题

- 1 求多个圆一点并 $\bigvee_{\alpha \in I} S^1_\alpha$ 的基本群 $\pi_1(\bigvee_{\alpha \in I} S^1_\alpha, x_0)$, 其中 I 是一个下标集.
- 2 求 $SO(3)$ 的基本群 $\pi_1(SO(3), E)$.
- 3 求从环面 T 中挖去一点 x 得到的空间的基本群 $\pi_1(T - \{x\}, x_0)$.
- 4 证明从环面中挖去一点 $T - \{x\}$ 和从Klein瓶中挖去一点 $K - \{y\}$ 得到的空间的基本群同构.
- 5 求从2维实射影空间中挖去一点得到的空间的基本群 $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0)$.

6 试构造拓扑空间 (X, x_0) 使得 $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z}/6$.

7 记 $T \sharp T$ 为从两个环面中各挖去一个小圆盘 D^2 后沿圆盘的边界粘和在一起得到空间,

$$T \sharp T = (S^1 \times S^1) - D^2 \cup_{S^1} (S^1 \times S^1) - D^2$$

称为两个环面的联通和. 求 $T \sharp T$ 的基本群.

§2.6* 覆盖空间

在证明圆的基本群 $\pi_1(S^1, x_0) = \mathbb{Z}$ 时用到了一个映射 $\phi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\phi(t) = e^{2\pi it}$ 他满足

- 1, 对任何 $z \in S^1$, $\phi^{-1}(z) \cong \mathbb{Z}$.
- 2, 存在 z 的道路连通邻域 U 使得 $\phi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{Z}$.

第三章 奇异同调群

基本群是从带基点的拓扑空间范畴 $\mathfrak{T}_0$ 到群范畴 $\mathfrak{G}$ 的一个共变函子, 即:

1, 对任何带基点的拓扑空间 (X, x_0) 有一个群 $\pi_1(X, x_0)$ 与之对应.

2, 对于拓扑空间之间的映射 $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ 有群同态 $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ 与之对应.

奇异同调群是从拓扑空间范畴 $\mathfrak{T}$ 到Abel群范畴 $\mathfrak{A}$ 的一个共变函子序列 $\{H_n(-) | n \geq 0\}$.

§3.1 奇异链复形与奇异同调群

首先我们将 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 推广到无穷维欧氏空间,

$$\mathbb{R}^\infty = \{\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) | \text{其中自某个 } x_n \text{ 以后所有的 } x_m \text{ 全等于 } 0.\}$$

在 $\mathbb{R}^\infty$ 中有自然的加法、数乘运算, 因而他是线性空间. 同时对于 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots), \beta = (y_1, y_2, \dots, y_m, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ 由于只有有限个 x_m, y_m 不为0, $\sum_{m=1}^{\infty} (x_m - y_m)^2$ 不存在收敛性问题. 定义 α 与 β 的距离

$$\rho(\alpha, \beta) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2 + \dots}.$$

记 $\mathbb{R}^\infty$ 中点

$$\begin{aligned} e_0 &= (0, 0, 0, \dots, 0, \dots) \\ e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \\ &\dots \\ e_q &= (0, 0, 0, \dots, 1, \dots) \\ &\dots \end{aligned}$$

容易验证: 对任何 $q \geq 0, e_0, e_1, \dots, e_q$ 是几何无关的($e_1 - e_0, e_2 - e_0, \dots, e_q - e_0$ 是线性无关的). 他张成 $\mathbb{R}^\infty$ 中的一个 q 维标准单形(见图3.1)

$$\begin{aligned} \Delta^q &= (e_0, e_1, \dots, e_q) \\ &= \{\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_q e_q | \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1\} \\ &= \{(\lambda_1, \dots, \lambda_q, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty | \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^q \lambda_i = 1 - \lambda_0 \leq 1\} \end{aligned}$$

Δ^q 中的点 $\nu = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_q e_q, (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_q)$ 称为 ν 的重心坐标.

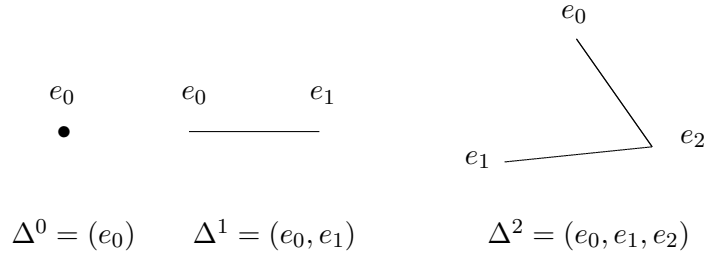


图3.1

定义3.1.1 设 X 是一个拓扑空间. 从 q 维标准单形到 X 的连续映射 $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ 称为 X 的一个 q 维奇异单形. X 中所有 q 维奇异单形生成的自由Abel群

$$S_q(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k n_i \sigma_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i : \Delta^q \rightarrow X \right\}$$

称为 X 的 q 维奇异链群.

在此应当注意的是:

- 1, 两个奇异单形 σ, σ' 相等指的是作为映射 $\sigma = \sigma' : \Delta^q \rightarrow X$ 两者相等.
- 2, 奇异链群 $S_q(X)$ 中的元素称为一个 q 维奇异链, 他是奇异单形的线性组合 $x = n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_2 + \cdots + n_k \sigma_k$ (有限和) 且只在映射相同时才可以系数相加.
- 3, 0维奇异单形 $\sigma_x : \Delta^0 = e_0 \rightarrow X$ 可以看做是 X 中的一个点 $\sigma_x(e_0) = x$, 记为 $x = \sigma_x$. 因而0维奇异链群 $S_0(X)$ 可以看做是 X 中所有点的线性组合.
- 4, 1维单形 $\sigma : \Delta^1 \cong [0, 1] \rightarrow X$ 可以看做是 X 中的一条道路, 因而1维奇异链群 $S_1(X)$ 可以看做是 X 中所有道路的线性组合.

对于每一个 $0 \leq i \leq q$, 存在线性映射

$$F^i : \Delta^{q-1} \longrightarrow \Delta^q.$$

F^i 将 Δ^{q-1} 的顶点 $e_0, e_1, \dots, e_{q-1}$ 映到 Δ^q 的顶点 $e_0, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_q$, 即

$$F^i(\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{q-1} e_{q-1}) = \lambda_0 e_0 + \cdots + \lambda_{i-1} e_{i-1} + \lambda_i e_{i+1} + \cdots + \lambda_{q-1} e_q.$$

F^i 称为 Δ^q 的第 i 个面.

例1, 2维标准单形有3个面 $F^0, F^1, F^2 : \Delta^1 \rightarrow \Delta^2$ 其中

$$F^0(e_0, e_1) \longrightarrow (e_1, e_2), \quad F^1(e_0, e_1) \longrightarrow (e_0, e_2), \quad F^2(e_0, e_1) \longrightarrow (e_0, e_1).$$

(见图3.2)

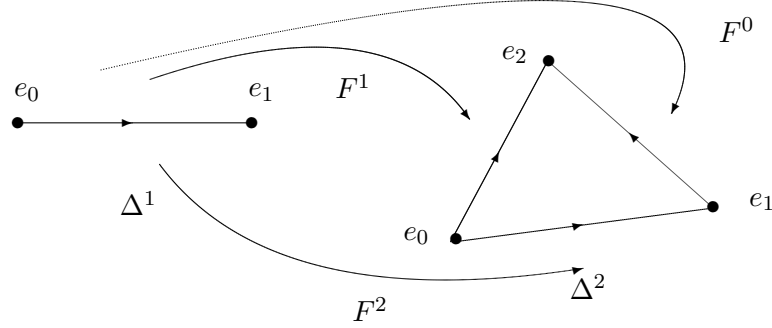


图3.2

定义3.1.2 设 $q > 0$, $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ 是 X 的一个 q 维单形, 则对于 $0 \leq i \leq q$

$$\sigma \cdot F^i : \Delta^{q-1} \xrightarrow{F^i} \Delta^q \xrightarrow{\sigma} X$$

是一个 $q-1$ 维单形.

定义: 1, q 维单形 σ 的边缘是一个 $q-1$ 维链

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \cdot F^i$$

2, 将 ∂_q 在 q 维链群 $S_q(X)$ 中做线性扩充, 即: 对于 q 维链 $x = \sum_{j=1}^k n_j \sigma_j$, 定义

$$\partial_q \left(\sum_{j=1}^k n_j \sigma_j \right) = \sum_{j=1}^k n_j \partial_q(\sigma_j) = \sum_{j=1}^k n_j \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma_j \cdot F^i,$$

得到同态 $\partial_q : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$, 这个同态称为奇异链群上的边缘算子.

3, 令 $\partial_0 : S_0(X) \rightarrow 0$ 为零同态, 则有链群同态序列

$$\cdots \rightarrow S_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

这个奇异链群序列称为 X 的奇异链复形, 记为 $S_*(X)$.

比如, 对于一个 2 维奇异单形 $\sigma : \Delta^2 \rightarrow X$

$$\partial_2(\sigma) = \sigma \cdot F^0 - \sigma \cdot F^1 + \sigma \cdot F^2.$$

引理3.1.1 对于任何 $q \geq 0$, 合成

$$\partial_q \partial_{q+1} = 0 : S_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X)$$

因而 $\text{Im} \partial_{q+1} \subset \text{Ker} \partial_q$.

证明: $\partial_0 \partial_1 = 0 : S_1(X) \rightarrow S_0(X) \rightarrow 0$ 是显然的.

对于 $q > 0$, 只需证明对任何 $q+1$ 维奇异单形 $\sigma : \Delta^{q+1} \rightarrow X$, $\partial_q \partial_{q+1}(\sigma) = 0$. 为此首先考察

$$F^i \cdot F^j : \Delta^{q-1} \xrightarrow{F^j} \delta^q \xrightarrow{F^i} \Delta^{q+1}$$

注意到 $F^i : \Delta^q \rightarrow \Delta^{q+1}$ 将顶点映射为

$$F^i(e_0, \dots, e_{j-1}, e_j \cdots e_q) = (e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_j, e_{j+1}, \dots, e_{q+1})$$

当 $0 \leq i \leq j \leq q+1$ 时,

$$\begin{aligned} F^i \cdot F^j(e_0, e_1, \dots, e_{q-1}) &= F^i(e_0, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_q) \\ &= (e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_j, e_{j+2} \cdots e_{q+1}) \end{aligned}$$

当 $0 \leq j < i \leq q+1$ 时,

$$\begin{aligned} F^i \cdot F^j(e_0, e_1, \dots, e_{q-1}) &= F^i(e_0, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_q) \\ &= (e_0, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_{i-1}, e_{i+1} \cdots e_{q+1}) \\ &= F^j(e_0, \dots, e_{i-2}, e_i \cdots, e_q) \\ &= F^j \cdot F^{i-1}(e_0, e_1, \dots, e_{q-1}) \end{aligned}$$

因此我们有: 当 $0 \leq j < i \leq q+1$ 时,

$$F^i \cdot F^j = F^j \cdot F^{i-1} : \Delta^{q-1} \longrightarrow \Delta^q \longrightarrow \Delta^{q+1}.$$

考察 $\partial_q \partial_{q+1}(\sigma)$

$$\begin{aligned} \partial_q \partial_{q+1}(\sigma) &= \partial_q \left(\sum_{i=1}^{q+1} (-1)^i \sigma \cdot F^i \right) \\ &= \sum i = 0^{q+1} (-1)^i \partial_q(\sigma \cdot F^i) \\ &= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^q (-1)^j \sigma \cdot F^i \cdot F^j \right) \\ &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq q} (-1)^{i+j} \sigma \cdot F^i \cdot F^j + \sum_{0 \leq j < i \leq q+1} (-1)^{i+j} \sigma \cdot F^i \cdot F^j \\ &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq q} (-1)^{i+j} \sigma \cdot F^i \cdot F^j + \sum_{0 \leq j < i \leq q+1} (-1)^{i+j} \sigma \cdot F^j \cdot F^{i-1} \end{aligned}$$

注意到当用 s 替代 j 用 t 替代 $i-1$ 时

$$\sum_{0 \leq j < i \leq q+1} (-1)^{i+j} \sigma \cdot F^j \cdot F^{i-1} = \sum_{0 \leq s \leq t \leq q} (-1)^{s+t+1} \sigma \cdot F^s \cdot F^t$$

因而

$$\begin{aligned} &\sum_{0 \leq i \leq j \leq q} (-1)^{i+j} \sigma \cdot F^i \cdot F^j + \sum_{0 \leq j < i \leq q+1} (-1)^{i+j} \sigma \cdot F^j \cdot F^{i-1} \\ &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq q} (-1)^{i+j} \sigma \cdot F^i \cdot F^j + \sum_{0 \leq s \leq t \leq q} (-1)^{s+t+1} \sigma \cdot F^s \cdot F^t = 0 \end{aligned}$$

引理成立.

定义3.1.3 在链复形

$$\cdots \rightarrow S_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

中定义:

1, $\mathbb{Z}_q(X) = \text{Ker} \partial_q$, $\partial_q : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$, 称为 X 的闭链群. $\mathbb{Z}_q(X)$ 中的元 $z = \sum_{i=1}^k n_i \sigma_i$ 称为 X 的一条闭链, 他满足 $\partial_q(z) = 0$.

2, $\mathbb{B}_q(X) = \text{Im} \partial_{q+1}$, $\partial_{q+1} : S_{q+1}(X) \rightarrow S_q(X)$, 称为 X 的 q 维边缘链群, 他是闭链群 $\mathbb{Z}_q(X)$ 的子群. 对于 $S_q(X)$ 中的两个奇异链 x_1, x_2 , 当 $x_1 - x_2 = \partial_{q+1}(x)$ 时称 x_1, x_2 相差一个边缘(x_1, x_2 不必都是闭链).

3, 商群 $H_q(X) = \mathbb{Z}_q(X) / \mathbb{B}_q(X) = \text{Ker} \partial_q / \text{Im} \partial_{q+1}$ 称为 X 的 q 维整系数非约化奇异同调群, 简称为 X 的 q 维同调群, 记为 $H_q(X)$ 或 $H_q(X, \mathbb{Z})$.

对于 X 的 q 维闭链 $z \in \mathbb{Z}_q(X)$, z 在 q 维同调群 $H_q(X)$ 中的等价类记为 $[z] \in H_q(X)$, z 称为同调类 $[z]$ 的一个代表元. 两个同调类 $[z] = [z']$ 指两个代表元闭链 z, z' 相差一个边缘, $z - z' = \partial_{q+1}(x)$.

首先我们通过下面几个例子看同调的几何意义:

例1 如果 $\sigma : \Delta^1 \cong I \rightarrow X$ 是一条闭路 $\sigma(e_1) = \sigma(e_0)$, 则作为1维奇异单形 σ 是 $S_1(X)$ 中的一条闭链, $[\sigma]$ 是1维同调群中的一个同调类.

如果 σ 道路同伦与常值道路, 则 σ 是一个边缘, $[\sigma] = 0 \in H_1(X)$.

$\Delta^1 = (e_0, e_1) = \{\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 | \lambda_0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_0 + \lambda_1 = 1\} \cong I$. 拓扑空间 X 中的一个1维奇异单形 $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ 可以看成是 X 中的一条道路, 起点在 $\sigma(e_0)$ 终点在 $\sigma(e_1)$. σ 的边缘

$$\partial_1(\sigma) = \sigma \cdot F^0 - \sigma \cdot F^1 = \sigma(e_1) - \sigma(e_0).$$

注意到0维单形是一个点 e_0 , $\sigma \cdot F^0(e_0) = \sigma(e_1)$ 是终点, $\sigma \cdot F^1(e_0) = \sigma(e_0)$ 是起点. 因此 $\partial_1(\sigma)$ 可以看做是终点减去起点.

当 σ 是 X 中的一条闭路时 $\sigma(e_1) = \sigma(e_0)$, $\partial_1(\sigma) = 0$. 作为奇异单形 $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ 是 $S_1(X)$ 中的一个闭链, $[\sigma]$ 代表1维同调群中的一个同调类.

当 $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ 道路同伦与常值道路 $c_0 : \Delta^1 \rightarrow \sigma(e_0) \in X$ 时, 设 $F : \Delta^1 \times I \rightarrow X$ 是从 σ 到 c_0 的道路伦移, 即对于 $\nu \in \Delta^1, t \in I$

$$\begin{aligned} F(\nu, 0) &= \sigma(\nu), & F(\nu, 1) &\equiv c_0(\nu) = \sigma(e_0). \\ F(e_0, t) &= \sigma(e_0), & F(e_1, t) &= \sigma(e_1) = \sigma(e_0). \end{aligned}$$

F 可以收缩成 Δ^1 的锥到 X 的映射 $\tilde{F} : C\Delta^1 \rightarrow X$, 其中 $C\Delta^1 = \Delta^1 \times I / \Delta^1 \times \{1\}$, 映射 $\tilde{F}$ 为: 对任何 $[\nu, t] \in C\Delta^1$

$$\tilde{F}([\nu, t]) = F(\nu, t)$$

由于 $F(\nu, 1) \equiv \sigma(e_0)$, $\tilde{F}$ 连续.

另外构造线性同胚映射 $f : \Delta^2 \rightarrow C\Delta^1$ 使得

$$f(e_0) = [\nu, 1], \quad f(e_1) = [e_0, 0], \quad f(e_2) = [e_1, 0]$$

(见图3.3)

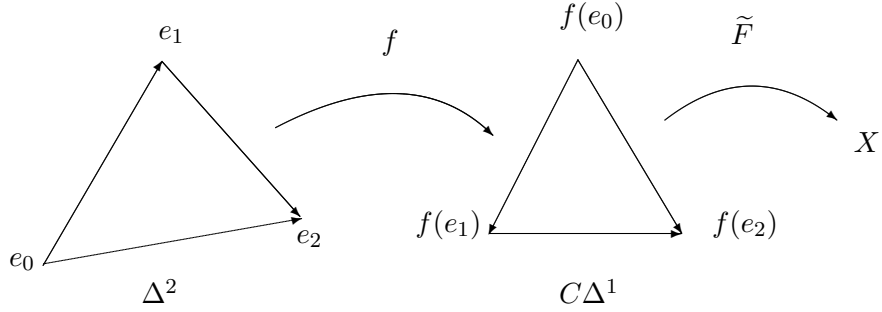


图3.3

则 $\tilde{F} \cdot f : \Delta^2 \xrightarrow{f} C\Delta^1 \xrightarrow{\tilde{F}} X$ 是 X 中的一个2维奇异单形.

$$\partial_2(\tilde{F} \cdot f) = \tilde{F} \cdot f \cdot F^0 - \tilde{F} \cdot f \cdot F^1 + \tilde{F} \cdot f \cdot F^2.$$

注意到

$$\begin{aligned} \tilde{F} \cdot f \cdot F^0 &= \sigma : (e_0, e_1) \xrightarrow{F^0} (e_1, e_2) \xrightarrow{f} \Delta^1 \times \{0\} \xrightarrow{\tilde{F}} X \\ \tilde{F} \cdot f \cdot F^1 &= c_0 : (e_0, e_1) \xrightarrow{F^1} (e_0, e_2) \xrightarrow{f} \{e_1\} \times I \xrightarrow{\tilde{F}} X \\ \tilde{F} \cdot f \cdot F^2 &= c_0 : (e_0, e_1) \xrightarrow{F^2} (e_0, e_1) \xrightarrow{f} \{e_0\} \times I \xrightarrow{\tilde{F}} X \end{aligned}$$

我们有 $\partial_2(\tilde{F} \cdot f) = \sigma - c_0 + c_0 = \sigma$. σ 是一个边缘, $[\sigma] = 0 \in H_1(X)$.

例2 当奇异单形 $\sigma, \tau : \Delta^1 \rightarrow X$ 满足 $\sigma(e_1) = \tau(e_0)$ 时可以做道路乘积

$$\sigma * \tau : \Delta^1 \longrightarrow X,$$

对于 $(1 - \lambda_1)e_0 + \lambda_1 e_1 \in \Delta^1$,

$$\sigma * \tau((1 - \lambda_1)e_0 + \lambda_1 e_1) = \begin{cases} \sigma((1 - 2\lambda_1)e_0 + 2\lambda_1 e_1) & 0 \leq \lambda_1 \leq 1/2, \\ \tau((2 - 2\lambda_1)e_0 + (2\lambda_1 - 1)e_1) & 1/2 \leq \lambda_1 \leq 1. \end{cases}$$

则 $\sigma + \tau - \sigma * \tau = \partial_2(\delta)$ 是一个上边缘.

我们构造 X 中的一个2奇异单形 $F : \Delta^2 \rightarrow X$, (见图3.4)

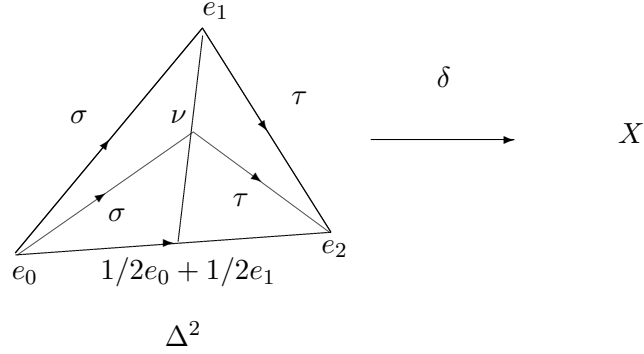


图3.4

从 e_1 向 e_0, e_2 的中点 $1/2e_0 + 1/2e_2$ 引一条直线 L . 对于直线 L 上的一点 $\nu = (1-s)e_1 + s(1/2e_0 + 1/2e_2)$, 引一条从 e_0 到 ν 的直线 l_1 , 他上面的点记为 $(1-t)e_0 + t\nu$, 再引一条从 ν 到 e_2 的直线 l_2 , 他上面的点记为 $(1-t)\nu + te_2$. 定义 $\delta : \Delta^2 \rightarrow X$ 为:

对于 l_1 上的点 $(1-t)e_0 + t\nu$, $\delta((1-t)e_0 + t\nu) = \sigma((1-t)e_0 + te_1)$.

对于 l_2 上的点 $(1-t)\nu + te_2$, $\delta((1-t)\nu + te_2) = \tau((1-t)e_0 + te_1)$.

由

$$\delta \cdot F^2 = \sigma : (e_0, e_1) \xrightarrow{F^2} (e_0, e_1) \xrightarrow{\delta} X$$

$$\delta \cdot F^1 = \sigma * \tau : (e_0, e_1) \xrightarrow{F^1} (e_0, e_2) \xrightarrow{\delta} X$$

$$\delta \cdot F^0 = \tau : (e_0, e_1) \xrightarrow{F^0} (e_1, e_2) \xrightarrow{\delta} X$$

知 $\sigma + \tau - \sigma * \tau = \partial_2(\delta)$.

例3 环面 $T = S^1 \times S^1$ 是由 $I \times I$ 按同方向粘和对边得到的(见图3.5).

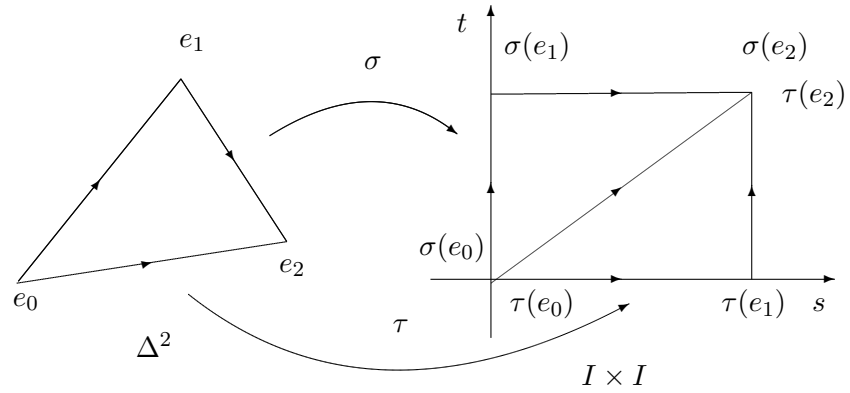


图3.5

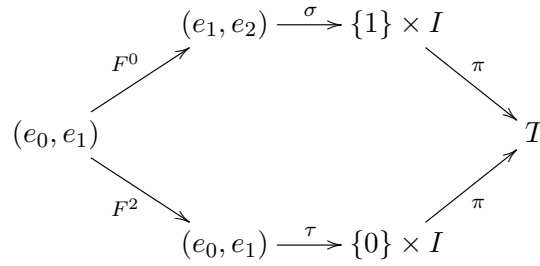
我们构造 $\sigma, \tau : \Delta^2 \rightarrow I \times I$ 分别为 Δ^2 到 $I \times I$ 的上半部分三角形 $\{(s, t) \in I \times I | s \leq t\}$ 和到下半部分三角形 $\{(s, t) \in I \times I | s \geq t\}$ 的线性同胚使得

$$\begin{aligned} \sigma(e_0) &= (0, 0), & \sigma(e_1) &= (0, 1), & \sigma(e_2) &= (1, 1) \\ \tau(e_0) &= (0, 0), & \tau(e_1) &= (1, 0), & \tau(e_2) &= (1, 1) \end{aligned}$$

并记 $\pi : I \times I \rightarrow T = I \times I / \sim$ 为粘合映射. 则 $\pi \cdot \sigma, \pi \cdot \tau$ 是环面 T 中的两个 2 维单形.

由于粘合以后 $(s, 0) \sim (s, 1), (0, t) \sim (1, t)$, 有

$$\begin{aligned} \pi \cdot \sigma \cdot F^0 &= \pi \cdot \tau \cdot F^2, & \pi \cdot \sigma \cdot F^2 &= \pi \cdot \tau \cdot F^0, \\ \pi \cdot \sigma \cdot F^1 &= \pi \cdot \tau \cdot F^1 \end{aligned}$$



因此

$$\begin{aligned} \partial_2(\pi \cdot \sigma - \pi \cdot \tau) &= \pi \cdot \sigma \cdot F^0 - \pi \cdot \sigma \cdot F^1 + \pi \cdot \sigma \cdot F^2 \\ &\quad - \pi \cdot \tau \cdot F^2 + \pi \cdot \tau \cdot F^1 - \pi \cdot \tau \cdot F^0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\pi \cdot \sigma - \pi \cdot \tau$ 是 T 的一个 2 维闭链, $[\pi \cdot \sigma - \pi \cdot \tau]$ 代表环面 T 的 2 维同调群中的一个同调类. 而 $\pi \cdot \sigma$ 和 $\pi \cdot \tau$ 的像恰好把环面分成了两部分.

命题 3.1.2 如 X 是道路连通的, 则 X 的 0 维同调群 $H_0(X) = \mathbb{Z}$. $H_0(X)$ 的生成元是 $[x_0] \in H_0(X)$, 且对 X 中的任何点 x_1 , $[x_0] = [x_1]$.

证明: 考察链复形

$$\cdots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

闭链群 $Z_0(X) = \text{Ker} \partial_0 = S_0(X)$ 是由 X 的所有的点生成的自由 Abel 群.

对于 0 维闭链群中的任何两个点 x_0, x_1 , 存在从 x_0 到 x_1 的道路 $\sigma : \Delta^1 = I \rightarrow X$ 使得 $\sigma(e_0) = x_0, \sigma(e_1) = x_1$. 因而 x_1 与 x_0 相差一个边缘 $\partial_1(\sigma)$, 作为同调

类 $[x_0] = [x_1]$. 在 0 维同调群 $H_0(X)$ 中 $[\sum_{i=1}^k n_i x_i] = [(\sum_{i=1}^k n_i) x_0]$.

推论 3.1.3 如果 X 有 n 个道路连通分之 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, 则 X 的 0 维同调群 $H_0(X)$ 是 n 个 $\mathbb{Z}$ 的直和.

对于一般的拓扑空间来说, q 维奇异链群 $S_q(X)$ 总是无限生成的自由 Abel 群. 要想直接从定义计算出其同调群 $H_q(X)$ 基本是不可能的. 但对于独点空

间 $\{x_0\}$ 来说, 由于 q 维奇异单形 $\sigma_q : \Delta^q \rightarrow \{x_0\}$ 只有一个, 可以计算出其各维同调群.

命题3.1.4 独点空间 $\{x_0\}$ 的同调群为

$$H_q(\{x_0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & q > 0. \end{cases}$$

证明: 独点空间 $\{x_0\}$ 是道路连通的, 因而 $H_0(\{x_0\}) = \mathbb{Z}$.

对于 $q > 0$, 记独点空间唯一的 q 维奇异单形为 $\sigma_q : \Delta^q \rightarrow \{x_0\}$, $S_q(\{x_0\}) = \mathbb{Z}\{\sigma_q\}$ 为由 σ_q 生成的自由Abel群. 对任何 $0 \leq i \leq q$

$$\sigma_q \cdot F^i = \sigma_{q-1} : \Delta^{q-1} \xrightarrow{F^i} \Delta^q \xrightarrow{\sigma_q} \{x_0\}.$$

考察链复形

$$\cdots \longrightarrow S_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X) \longrightarrow \cdots,$$

1, 当 $q = 2k > 0$ 是偶数时

$$\begin{aligned} \partial_{2k}(\sigma_{2k}) &= \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i \sigma_{2k} \cdot F^i \\ &= \sigma_{2k-1} - \sigma_{2k-1} + \cdots + \sigma_{2k-1} - \sigma_{2k-1} + \sigma_{2k-1} \\ &= \sigma_{2k-1}. \end{aligned}$$

$\partial_{2k} : S_{2k}(\{x_0\}) \rightarrow S_{2k-1}(\{x_0\})$ 是同构, 闭链群 $\mathbb{Z}_{2k}(\{x_0\}) = \text{Ker} \partial_{2k} = 0$. 因而

$$H_{2k}(\{x_0\}) = 0 / \text{Im} \partial_{2k+1} = 0.$$

2, 当 $q = 2k + 1 > 0$ 是奇数时

$$\begin{aligned} \partial_{2k+1}(\sigma_{2k+1}) &= \sum_{i=0}^{2k+1} (-1)^i \sigma_{2k+1} \cdot F^i \\ &= \sigma_{2k} - \sigma_{2k} + \cdots + \sigma_{2k} - \sigma_{2k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

闭链群 $\mathbb{Z}_{2k+1}(\{x_0\}) = S_{2k+1}(\{x_0\})$. 但此时 $\partial_{2k+2} : S_{2k+2} \rightarrow S_{2k+1}(\{x_0\})$ 是同构, $\mathbb{B}(\{x_0\}) = \text{Im} \partial_{2k+2} = S_{2k+1}(\{x_0\})$. 同调群

$$H_{2k+1}(\{x_0\}) = \mathbb{Z}_{2k+1}(\{x_0\}) / \mathbb{B}_{2k+1}(\{x_0\}) = 0.$$

§3.1 习题

1 如果我们改变0维边缘算子为

$$\partial_0^* : S_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

$$\text{对任何0维奇异链} \sum_{i=1}^k n_i x_i, \partial_0^* \left(\sum_{i=1}^k n_i x_i \right) = \sum_{i=1}^k n_i \in \mathbb{Z}.$$

1, 证明: $\partial_0^* \partial_1 = 0$.

2, 此时的链复形变为

$$\cdots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0^*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

0维同调群变为 $\tilde{H}_0(X) = \text{Ker} \partial_0^* / \text{Im} \partial_1$ 称为约化同调群.

证明: $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

2 设 X 有两个道路连通分支 X_1, X_2 , 证明: q 维奇异链群

$$S_q(X) \cong S_q(X_1) \oplus S_q(X_2)$$

且

$$\partial_q(S_q(X_1)) \subset S_{q-1}(X_1), \quad \partial_q(S_q(X_2)) \subset S_{q-1}(X_2).$$

因而 $H_q(X) \cong H_q(X_1) \oplus H_q(X_2)$.

3 证明: 如果 1 维奇异单形 $C_0 : \Delta^1 \rightarrow X$ 是常值映射, 则 C_0 是一个边缘.

4 证明: 如果两个 1 维奇异单形 $\sigma \simeq_p \tau : \Delta^1 \rightarrow X$ 作为 X 中的道路是道路同伦的, 则 $\sigma - \tau$ 是一个边缘.

5 设 $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ 是从 x_1 到 x_2 的一条道路, $\gamma_0, \gamma_1 : \Delta^1 \rightarrow X$ 分别是 x_0 到 x_1, x_2 的道路. 证明: 作为 1 维奇异链, $\gamma_1 + \sigma - \gamma_0$ 是一条闭链.

6 记 $\sigma^{-1} : \Delta^1 \rightarrow X$ 是 σ 的逆道路. 证明: 1 维奇异链 $\sigma + \sigma^{-1}$ 是一个边缘.

7 设 $\sigma, \tau : \Delta^1 \rightarrow X$ 是 X 中起点、终点都在 x_0 的闭路. 证明: 作为 1 维同调类 $[\sigma * \tau] = [\sigma] + [\tau] \in H_1(X)$.

§3.2 同调群的同伦不变性

设 $f : X \rightarrow Y$ 是一个映射, 则对 X 的任意 q 维奇异单形 $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$,

$$f \cdot \sigma : \Delta^1 \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y$$

是 Y 的一个奇异单形. 将这个对于在 $S_q(X)$ 上做线性扩充得到同态

$$f_{\#} : S_q(X) \longrightarrow S_q(Y).$$

引理3.2.1 映射 $f : X \rightarrow Y$ 导出的同态 $f_{\#} : S_q(X) \rightarrow S_q(Y)$ 满足 $\partial_q \cdot f_{\#} = f_{\#} \cdot \partial_q$, 即

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & S_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0 \\ & & f_{\#} \downarrow & & f_{\#} \downarrow & & f_{\#} \downarrow & & f_{\#} \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & S_q(Y) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(Y) & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow S_1(Y) \xrightarrow{\partial_1} S_0(Y) \xrightarrow{\partial_0} 0 \end{array}$$

可换. 因而 $f_{\#}$ 导出同调群的同态 $f_* : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$.

证明: 对任何 q 维奇异单形 $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$,

$$\begin{aligned} f_{\#} \cdot \partial_q(\sigma) &= f_{\#} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \cdot F^i \right) = \sum_{i=0}^q (-1)^i f_{\#}(\sigma \cdot F^i) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i (f_{\#}(\sigma) \cdot F^i) = \partial_q \cdot f_{\#}(\sigma) \end{aligned}$$

因而 $f_{\#} \cdot \partial_q = \partial_q \cdot f_{\#}$.

对任何 X 的 q 维同调类 $[z] \in H_q(X)$, 取他的一个代表元 $z \in \mathbb{Z}_q(X)$. 由

$$\partial_q(f_{\#}(z)) = f_{\#}(\partial_q(z)) = f_{\#}(0) = 0$$

知 $f_{\#}(z)$, 是 Y 的 q 维闭链.

如果 z' 是同调类 $[z]$ 的另一个代表元, 则 z 与 z' 相差一个边缘, 即存在 $q+1$ 维链 $x = \sum_k m_k \tau_k \in S_{q+1}(X)$ 使得 $z - z' = \partial_{q+1}(x)$. 因而

$$f_{\#}(z) - f_{\#}(z') = f_{\#}(z - z') = \partial_{q+1}(f_{\#}(x)).$$

定义同调群映射 $f_* : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ 为

$$f_*([z]) = [f_{\#}(z)] \in H_q(Y).$$

容易验证 f_* 是群同态.

定理3.2.2 映射 $f : X \rightarrow Y$ 导出的同调群的同态 $f_* : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ 满足:

1), 单位映射 $1 : X \rightarrow X$ 导出的同态是单位映射 $1_* = 1 : H_q(X) \rightarrow H_q(X)$.

2), 映射 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ 的合成 $g \cdot f$ 导出的同态满足

$$(g \cdot f)_* = g_* \cdot f_* \quad \begin{array}{ccc} H_q(X) & \xrightarrow{f_*} & H_q(Y) \\ & \searrow (g \cdot f)_* & \downarrow g_* \\ & & H_q(Z). \end{array}$$

因而同调群是同胚不变量, 同调函子是一列从拓扑空间范畴 $\mathfrak{T}$ 到 Abel 群范畴 $\mathfrak{A}$ 的共变函子.

证明: 对 X 的任何 q 维奇异单形 $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$.

1) 由 $1_\#(\sigma) = 1 \cdot \sigma = \sigma$ 易得.

2) 由

$$(g \cdot f)_\#(\sigma) = g \cdot f \cdot \sigma = g_\# \cdot f_\#(\sigma)$$

知 $(g \cdot f)_* = g_* \cdot f_*$.

由定理 3.2.2 易知: 如果 $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ 是同胚映射, $g : Y \xrightarrow{\cong} X$ 是同胚逆映射则对任何 $q \geq 0$, $f_* : H_q(X) \xrightarrow{\cong} H_q(Y)$ 都是同构.

和基本群一样, 同调群也是同伦不变量:

定理 3.2.3 如果 $f \stackrel{F}{\simeq} g : X \rightarrow Y$ 是同伦的两个映射, 则他们导出相同的同调群同态

$$f_* = g_* : H_q(X) \longrightarrow H_q(Y).$$

推论 3.2.4 如果 X 与 Y 是同伦等价的拓扑空间, $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ 是同伦等价映射, 则 f 导出同调群的同构映射

$$f_* : H_q(X) \xrightarrow{\cong} H_q(Y)$$

证明: 设 $g : Y \rightarrow X$ 是 f 的同伦逆, $g \cdot f \simeq 1_X, f \cdot g \simeq 1_Y$. 则有 $g_* \cdot f_* = 1, f_* \cdot g_* = 1$

$$\begin{array}{ccc} H_q(X) & \xrightarrow{f_*} & H_q(Y) \\ & \searrow 1 & \downarrow g_* \\ & & H_q(X) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H_q(Y) & \xrightarrow{g_*} & H_q(X) \\ & \searrow 1 & \downarrow f_* \\ & & H_q(Y) \end{array}$$

$f_* : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ 是同构.

定理 3.2.3 的证明: 定理证明的关键是通过从 f 到 g 的伦移 $F : X \times I \rightarrow Y$ 构造一系列链群之间的同态

$$\{H_q : S_q(X) \longrightarrow S_{q+1}(Y)\}_{q \geq 0}$$

使得 $g_{\#} - f_{\#} = H_{q-1} \cdot \partial_q + \partial_{q+1} \cdot H_q$, 即有下面的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & S_{q+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & S_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(X) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow g_{\#} & \swarrow H_q & \downarrow g_{\#} & \swarrow H_{q-1} & \downarrow g_{\#} \\
 \cdots & \longrightarrow & S_{q+1}(Y) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & S_q(Y) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(Y) \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

特别的, 在 $q=0$ 时 $g_{\#} - f_{\#} = \partial_1 \cdot H_0 : S_0(X) \rightarrow S_0(Y)$.

此时, 对 X 中的任何 q 维闭链 $z \in \mathbb{Z}_q(X)$, 尽管 $f_{\#}(z) \neq g_{\#}(z)$ 但是

$$g_{\#}(z) - f_{\#}(z) = \partial_{q+1} \cdot H_q(z) + H_{q-1} \cdot \partial_q(z) = \partial_{q+1}(H_q(z)).$$

$f_{\#}(z)$ 与 $g_{\#}(z)$ 相差一个边缘 $\partial_{q+1}(H_q(z))$, 他们代表的同调类相同, 即

$$f_*([z]) = [f_{\#}(z)] = [g_{\#}(z)] = g_*([z]).$$

$f_{\#}, g_{\#} : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ 称为奇异链复形间的链映射. 而

$$H_* = \{H_q : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(Y)\}_{q \geq 0}$$

称为从链映射 $f_{\#}$ 到 $g_{\#}$ 的链同伦.

下面我们构造从 $f_{\#}$ 到 $g_{\#}$ 的链同伦 $H_q : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(Y)$.

记 $F : I \times X \rightarrow Y$ 为从 f 到 g 的伦移, 满足对任何 $x \in X$

$$F(0, x) = f(x), \quad F(1, x) = g(x).$$

注意到: 任何 q 维单形 Δ^q 都是凸集, 因而 $I \times \Delta^q$ 也是凸集, 即对任何 $x = (t_1, \nu_1), y = (t_2, \nu_2) \in I \times \Delta^q$, 连接 x, y 的线段还在 $I \times \Delta^q$ 中. 对任何 $t \in I$,

$$(1-t)x + ty \in I \times \Delta^q.$$

$I \times \Delta^q$ 底层 $\{0\} \times \Delta^q$ 的 $q+1$ 个顶点仍记为 $e_0, e_1, \dots, e_q$, 即

$$e_0 = (0, e_0), e_1 = (0, e_1), \dots, e_q = (0, e_q).$$

$I \times \Delta^q$ 顶层 $\{1\} \times \Delta^q$ 的 $q+1$ 个顶点记为 $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q$ (见图3.6).

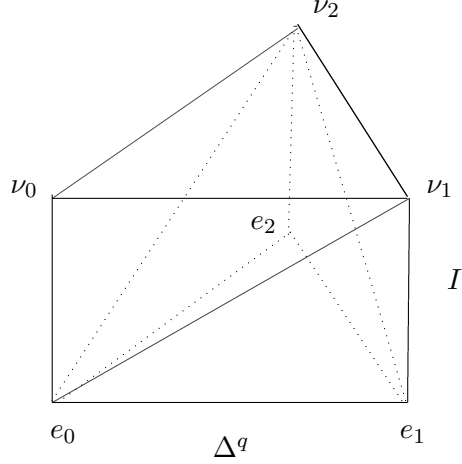


图3.6

对任何 $0 \leq i \leq q$, $q+2$ 个顶点 $e_0, \dots, e_i, \nu_i, \dots, \nu_q$ 张成 $I \times \Delta^q$ 中的一个 $q+1$ 维单形. 记

$$D_i : \Delta^{q+1} \longrightarrow I \times \Delta^q$$

为将顶点 $(e_0, e_1, \dots, e_{q+1})$ 映射到顶点 $(e_0, \dots, e_i, \nu_i, \dots, \nu_q)$ 的线性扩充, 即

$$\begin{aligned} D_i(\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{q+1} e_{q+1}) \\ = \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_i e_i + \lambda_{i+1} \nu_i + \dots + \lambda_{q+1} \nu_q. \end{aligned}$$

这样对任何 X 中的 q 维奇异单形 $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$, 合成映射

$$F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_i : \Delta^{q+1} \xrightarrow{D_i} I \times \Delta^q \xrightarrow{1 \times \sigma} I \times X \xrightarrow{F} Y$$

是 Y 中的一个 $q+1$ 维奇异单形.

定义 $H_q : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(Y)$ 为: 对任何 X 中的 q 维奇异单形 σ

$$H_q(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_i.$$

剩下的问题就是验证: 对任何 q

$$g_{\#}(\sigma) - f_{\#}(\sigma) = g \cdot \sigma - f \cdot \sigma = H_{q-1} \cdot \partial_q(\sigma) + \partial_{q+1} \cdot H_q(\sigma).$$

对于 0 维单形 σ_x ,

$$H_0(\sigma_x) = F \cdot (1 \times \sigma_x) \cdot D_0 : \Delta^1 \rightarrow I \times \{e_0\} \rightarrow I \times X \rightarrow Y$$

$$\partial_1 H_0(\sigma_x) = F \cdot (1 \times \sigma_x) \cdot D_0 \cdot F^0 - F \cdot (1 \times \sigma_x) \times D_0 \cdot F^1$$

$$F \cdot (1 \times \sigma_x) \cdot D_0 \cdot F^0(e_0) = F \cdot (1 \times \sigma_x)(v_0) = F(1, x) = g \cdot \sigma_x(e_0)$$

$$F \cdot (1 \times \sigma_x) \cdot D_0 \cdot F^1(e_0) = F \cdot (1 \times \sigma_x)(e_0) = F(0, x) = f \cdot \sigma_x(e_0)$$

$$\partial_1 H_0 = g_{\#} - f_{\#}.$$

对于 $q > 0$, 考察 $D_i : \Delta^{q+1} \rightarrow I \times \Delta^q$ 与第 j 个面 $F^j : \Delta^q \rightarrow \Delta^{q+1}$. 我们有

$$\begin{aligned} g \cdot \sigma &= F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_0 \cdot F^0 : \Delta^q \xrightarrow{F^0} \Delta^{q+1} \xrightarrow{D_0} I \times \Delta^q \xrightarrow{1 \times \sigma} I \times X \xrightarrow{F} Y \\ f \cdot \sigma &= F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_q \cdot F^{q+1} : \Delta^q \xrightarrow{F^{q+1}} \Delta^{q+1} \xrightarrow{D_q} I \times \Delta^q \xrightarrow{1 \times \sigma} I \times X \xrightarrow{F} Y \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} F^0(e_0, e_1, \dots, e_q) &= (\widehat{e}_0, e_1, e_2, \dots, e_{q+1}), \\ D_0(\widehat{e}_0, e_1, e_2, \dots, e_{q+1}) &= (\widehat{e}_0, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q) \\ F^{q+1}(e_0, e_1, \dots, e_q) &= (e_0, e_1, \dots, e_q, \widehat{e}_{q+1}), \\ D_q(e_0, e_1, \dots, e_q, \widehat{e}_{q+1}) &= (e_0, e_1, \dots, e_q, \widehat{\nu}_q) \end{aligned}$$

对于 q 维奇异单形 $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$,

$$\begin{aligned} \partial_{q+1} \cdot H_q(\sigma) &= \partial_{q+1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_i \right) \\ &= \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^{i+j} F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_i \cdot F^j \\ H_{q-1} \cdot \partial_q(\sigma) &= H_{q-1} \left(\sum_{j=0}^q (-1)^j \sigma \cdot F^j \right) \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=0}^q (-1)^{i+j} F \cdot (1 \times \sigma \cdot F^j) \cdot D_i \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=0}^q (-1)^{i+j} F \cdot (1 \times \sigma) \cdot (1 \times F^j) \cdot D_i \end{aligned}$$

在此, 我们希望 $\partial_{q+1} \cdot H_q(\sigma)$ 中的项和 $H_{q-1} \cdot \partial_q(\sigma)$ 中的项互相消去, 最后只剩下

$$F \cdot (1 \times \sigma) \cdot F^0 \cdot D_0 - F \cdot (1 \times \sigma) \cdot F^{q+1} \cdot D_q.$$

注意到: $D_i \cdot F^j : \Delta^q \xrightarrow{F^j} \Delta^{q+1} \xrightarrow{D_i} I \times \Delta^q$ 将 Δ^q 的顶点 $(e_0, e_1, \dots, e_q)$ 映射到

$$(e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_{q+1}) \xrightarrow{D_i} \begin{cases} (e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_i, \nu_i, \dots, \nu_q) & j \leq i \\ (e_0, \dots, e_i, \nu_i, \dots, \widehat{\nu}_{j-1}, \dots, \nu_q) & i < j \end{cases}$$

$(1 \times F^j) \cdot D_i : \Delta^q \xrightarrow{D_i} I \times \Delta^{q-1} \xrightarrow{(1 \times F^j)} I \times \Delta^q$ 将 Δ^q 的顶点 $(e_0, e_1, \dots, e_q)$ 映射到

$$(e_0, \dots, e_i, \nu_i, \dots, \nu_{q-1}) \xrightarrow{1 \times F^j} \begin{cases} (e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_{i+1}, \nu_{i+1}, \dots, \nu_q) & j \leq i \\ (e_0, \dots, e_i, \nu_i, \dots, \widehat{\nu}_j, \dots, \nu_q) & i < j \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} (1 \times F^j) \cdot D_i &= D_{i+1} \cdot F^j, \quad j \leq i \text{ 时} \\ (1 \times F^j) \cdot D_i &= D_i \cdot F^{j+1}, \quad j > i \text{ 时}. \end{aligned}$$

同时注意到, 当 $q \geq i \geq 1$ 时

$$(e_0, \dots, e_{i-1}, \widehat{e}_i, \nu_i, \dots, \nu_q) = (e_0, \dots, e_{i-1}, \widehat{\nu}_{i-1}, \nu_i, \dots, \nu_q)$$

因而, 我们还有

$$D_i \cdot F^i = D_{i-1} \cdot F^i$$

$$\begin{aligned}
H_{q-1} \cdot \partial_q(\sigma) &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq q-1} (-1)^{i+j} F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_{i+1} \cdot F^j \\
&+ \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_i \cdot F^{j+1}.
\end{aligned}$$

将 $\partial_{q+1} \cdot H_q(\sigma)$ 写成

$$\begin{aligned}
\partial_{q+1} \cdot H_q(\sigma) &= \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_i \cdot F^j \\
&+ \sum_{0 \leq i < j-1 \leq q} (-1)^{i+j} F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_i \cdot F^j \\
&+ \sum_{0 \leq j=i \leq q} (-1)^{2i} F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_i \cdot F^i \\
&+ \sum_{0 \leq i=j-1 \leq q} (-1)^{2i+1} F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_i \cdot F^{i+1}.
\end{aligned}$$

注意到 $\partial_{q+1} \cdot H_q(\sigma)$ 中的前两部分被 $H_{q-1} \cdot \partial_q(\sigma)$ 消去了.

$$\sum_{0 \leq j=i \leq q} (-1)^{2i} F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_i \cdot F^i + \sum_{0 \leq i=j-1 \leq q} (-1)^{2i+1} F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_i \cdot F^{i+1}$$

中的项互相消去后只剩下

$$F \cdot (1 \times \sigma) D_0 \cdot F^0 - F \cdot (1 \times \sigma) \cdot D_q \cdot F^{q+1} = g \cdot \sigma - f \cdot \sigma.$$

例1 我们知道 $E^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 = 1\}$, $I^n = I \times I \times \dots \times I$ 以及标准单形 Δ^n 都是可缩空间, 因而

$$H_q(E^n) \cong H_q(I^n) \cong H_q(\Delta^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & q > 0 \end{cases}$$

§3.2 习题

1 证明: 从 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中挖去坐标原点 $\{0\}$ 后所得空间 $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 的各维同调群与 n 维球面 S^n 的同调群同构.

2 记 x, y 是 2 维环面 T 中的两个点, 证明:

$$H_q(T - \{x\}) \cong H_q(S^1 \vee S^1), \quad H_q(T - \{x, y\}) \cong H_q(S^1 \vee S^1 \vee S^1).$$

§3.3 π_1 与 H_1 的关系*

从定义看基本群有比较好的几何意义, 而同调群非常抽象. 事实上同调群也有很好的几何意义. 本节我们介绍基本群和1维同调群的关系. 从基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 到1维同调群 $H_1(X)$ 有一个满同态, 通过这个满同态, 由 $\pi_1(X, x_0)$ 可以计算出 $H_1(X)$.

定理3.3.1 存在同态 $\chi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$. 当 X 道路连通时 χ 是满同态, $\text{Ker}\chi$ 是 $\pi_1(X, x_0)$ 的交换化子群

$$[\pi_1, \pi_1] = \{\text{所有} [\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}, \alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0) \text{ 生成的正规子群}\}.$$

因而 $H_1(X) = \pi_1(X, x_0)/\text{Ker}\chi$ 是基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 的交换化.

证明: 在§3.1 例1中我们曾提到过, 对于 X 中的一条闭路 $\sigma: I = \Delta^1 \rightarrow X$ $\partial_1(\sigma) = \sigma(e_1) - \sigma(e_0) = 0$, 因而 σ 是 $S_1(X)$ 中的一条闭链.

对于 $\pi_1(X, x_0)$ 中的任何一个道路同伦等价类 $[\sigma]$, 选取 $[\sigma]$ 的一个代表元 $\sigma: I = \Delta^1 \rightarrow X$, 定义 $\chi([\sigma])$ 为 σ 在1维同调群中代表的同调类 $[\sigma] \in H_1(X)$.

1, 首先我们证明这样的定义合理, 即: 当 $\sigma \simeq_p \tau$ 道路同伦时, 1维同调类 $[\sigma] = [\tau]$.

在§3.1习题4中有这样一个结论: 如果 $\sigma \simeq_p \tau$, 则 $\sigma - \tau$ 是一个边缘, 即: $\sigma - \tau = \partial_2(x)$. 因而当 σ, τ 都是闭链时, 作为同调类 $[\sigma] = [\tau]$. 证明方法如下:

设 $F: I \times I \rightarrow X$ 是从 σ 到 τ 的道路伦移,

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= \sigma(s), & F(s, 1) &= \tau(s) \\ F(0, t) &\equiv \sigma(0) = x_0, & F(1, t) &\equiv x_0 \end{aligned}$$

因而 F 可以通过锥形 $\Delta = I \times I / \{1\} \times I$ 映射到 X ,

$$\begin{array}{ccc} I \times I & & \\ \downarrow p & \searrow F & \\ \Delta = I \times I / \{1\} \times I & \xrightarrow{\hat{F}} & X \end{array}$$

(见图3.7)

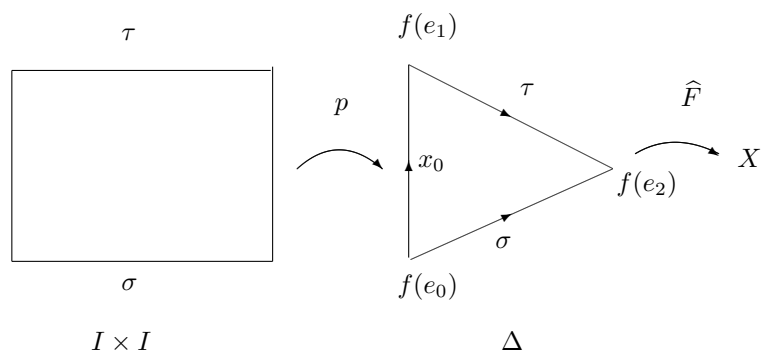


图3.7

构造从 Δ^2 到 $\Delta = I \times I / \{1\} \times I$ 的线性同胚 $f : \Delta^2 \rightarrow \Delta$ 使得

$$f(e_0) = (0, 0), \quad f(e_1) = (0, 1), \quad f(e_2) = \{1\} \times I.$$

则 $\hat{F} \cdot f : \Delta^2 \rightarrow \Delta \rightarrow X$ 是 X 中的2维奇异单形. Δ^2 到 x_0 的常值映射 $c_{x_0} : \Delta^2 \rightarrow X$ 是 X 中的另一个2维奇异单形.

$$\partial_2(\hat{F} \cdot f) = \tau - \sigma + x_0, \quad \partial_2(c_{x_0}) = x_0 - x_0 + x_0$$

其中 $x_0 : \Delta^1 \rightarrow X$ 是常值映射. 因而

$$\partial_2(c_{x_0} - \hat{F} \cdot f) = \sigma - \tau.$$

2, 证明 χ 是同态.

在§3.1 例2中我们曾经证明过如果 $\sigma(e_1) = \tau(e_0)$, 则在 X 的奇异链复形中 $\sigma + \tau - \sigma * \tau = \partial_2(\delta)$. 因而, 对于 X 中的两条闭路 σ, τ

$$\chi([\sigma] \cdot [\tau]) = \chi([\sigma * \tau]) = [\sigma * \tau] \in H_1(X)$$

而在 $H_1(X)$ 中

$$[\sigma * \tau] = [\sigma + \tau] = [\sigma] + [\tau].$$

3, 证明 χ 是满同态.

设 $z = \sum n_k \sigma_k$ 是 $S_1(X)$ 中的一条闭链, 其中 $\sigma_k : \Delta^1 = I \rightarrow X$ 是 X 中的道路, $\partial_1(z) = 0$. 在此我们首先将 z 代表的同调类 $[z]$ 的表示法做一个变换:

1) 当 $n_k > 0$ 时, 将 $n_k \sigma_k$ 表示为

$$\sigma_k + \sigma_k + \cdots + \sigma_k = n_k \sigma_k.$$

2) 当 $n_k < 0$ 时, $-\sigma_k - \sigma_k - \cdots - \sigma_k = n_k \sigma_k$.

在§3.1 习题6中我们曾经证明过如果 σ^{-1} 是 σ 的逆道路, 则 $\sigma + \sigma^{-1}$ 是一个边缘. 证明方法如下:

首先 $\sigma + \sigma^{-1} - \sigma * \sigma^{-1} = \partial_2(\delta)$ (见§3.1 例2). 同时 $\sigma * \sigma^{-1}$ 是起点、终点在 $\sigma(e_0)$ 的闭路且道路同伦与常值道路. 在§3.1 例1中我们证明过: 此时 $\sigma * \sigma^{-1} = \partial_2(x)$ 是一个边缘. 因而

$$\sigma + \sigma^{-1} = \partial_2(\delta + x), \quad -\sigma = \sigma^{-1} + \partial_2(\delta + x)$$

将 $z = \sum n_k \sigma_k$ 中的 $-\sigma_k$ 替换成 σ_k^{-1} , 他代表相同的同调类. 这样 $z = \sum n_k \sigma_k$ 代表的同调类 $[z]$ 被表示成了

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m = z$$

3) 由于 $z = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m$ 是闭链,

$$\partial_1(z) = \sigma_1(e_1) - \sigma_1(e_0) + \sigma_2(e_1) - \sigma_2(e_0) + \cdots + \sigma_m(e_1) - \sigma_m(e_0) = 0$$

其所有的终点和所有的起点两两相消. 在此我们适当调整 σ_i 的顺序使得 σ_i 的终点等于 σ_{i+1} 的起点, 而 σ_m 的终点等于 σ_1 的起点.

$$\sigma_1(e_1) = \sigma_2(e_0), \quad \sigma_2(e_1) = \sigma_3(e_0), \quad \cdots, \quad \sigma_{m-1}(e_1) = \sigma_m(e_0), \quad \sigma_m(e_1) = \sigma_1(e_0).$$

此时 $\sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_m$ 是 X 中的一条闭路, 但起点、终点在 $\sigma_1(e_0) = \sigma_m(e_1)$ 不一定是 X 的基点 x_0 . 由于 X 是道路连通的, 任意选取从 x_0 到 $\sigma_1(e_0)$ 的一条道路 γ ,

$$\gamma * \sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_m * \gamma^{-1}$$

是 X 中起点、终点在 x_0 的闭路. 他代表 $\pi_1(X, x_0)$ 中的一个道路同伦等价类. 考察

$$\chi([\gamma * \sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_m * \gamma^{-1}]) = [\gamma * \sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_m * \gamma^{-1}] \in H_1(X).$$

而在链群 $S_1(X)$ 中

$$\gamma * \sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_m * \gamma^{-1} = \gamma + \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m + \gamma^{-1} + \partial_2(y)$$

且 $\gamma + \gamma^{-1} = \partial_2(\delta + x)$. 因而作为同调类

$$[\gamma * \sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_m * \gamma^{-1}] = [\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m].$$

4, 证明 $\text{Ker}\chi = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$ 是基本群的交换化子群.

$\pi_1(X, x_0)$ 是一个非交换群, 他的交换化子群 $[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$ 是由所有的 $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ 其中 $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$ 生成的子群. 这个子群是 $\pi_1(X, x_0)$ 的正规子群, 并且一个元素

$$\gamma = \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_s^{k_s} \in [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$$

的充分必要条件是: 出现的每一个相同的 α_i 的总方次的和等于0. 比如

$$\alpha^{i_1} \beta^{j_1} \gamma^{k_1} \alpha^{i_2} \beta^{j_2} \gamma^{k_2} \cdots \alpha^{i_r} \beta^{j_r} \gamma^{k_r} \in [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$$

的充分必要条件是

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_r = 0, \quad j_1 + j_2 + \cdots + j_r = 0, \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_r = 0.$$

设 $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ 是一个闭路同伦类, $\chi([\gamma]) = 0 \in H_1(X)$, 即: γ 是一个边缘 $\gamma = \partial_2(x) = \partial_2(\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i)$. 同样将 x 表示成 $\pm \sigma_1 + \pm \sigma_2 + \cdots + \pm \sigma_m$, 则

$$\begin{aligned} & \gamma - \partial_1(\pm \sigma_1) - \partial_2(\pm \sigma_2) - \cdots - \partial_2(\pm \sigma_m) \\ &= \gamma - \pm(\sigma_1 \cdot F^0 - \sigma_1 \cdot F^1 + \sigma_1 \cdot F^2) - \cdots - \pm(\sigma_m \cdot F^0 - \sigma_m \cdot F^1 + \sigma_m \cdot F^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\sigma_i \cdot F^j : \Delta^1 \rightarrow \Delta^2 \rightarrow X$ 是 X 中的一条道路, 简记为 $\alpha_{ij} = \sigma_i \cdot F^j$, $i = 1, 2, \cdots, m, j = 0, 1, 2$. 上式可写成

$$(3.1) \quad \gamma - \pm(\alpha_{10} - \alpha_{11} + \alpha_{12}) - \pm(\alpha_{20} - \alpha_{21} + \alpha_{22}) - \cdots - \pm(\alpha_{m0} - \alpha_{m1} + \alpha_{m2}) = 0,$$

即每一个相同的 α_{ij} 包括 γ 出现的正负号的总和等于0.

对于每一个 $\sigma_i : \Delta^2 \rightarrow X$, $\alpha_{ij} = \sigma_i \cdot F^j : \Delta^1 \rightarrow X$ 选取从 x_0 到 $\sigma_i(e_0), \sigma_i(e_1), \sigma_i(e_2)$ 的道路 $\eta_{i0}, \eta_{i1}, \eta_{i2}$. 当 $\sigma_i(e_j) = \sigma_{i'}(e_{j'})$ 时选取相同的道路 $\eta_{ij} = \eta_{i'j'}$. (见图3.8)

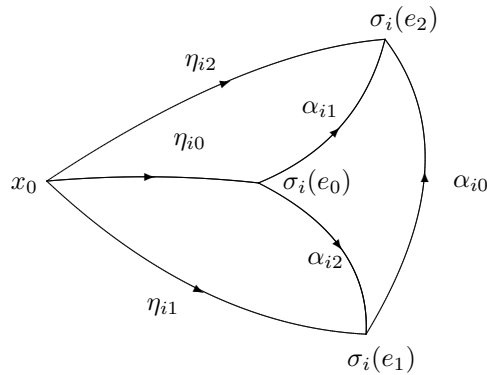


图3.8

则

$$\begin{aligned}\beta_{i0} &= \eta_{i1} * \alpha_{i0} * \eta_{i2}^{-1} \\ \beta_{i1} &= \eta_{i0} * \alpha_{i1} * \eta_{i2}^{-1} \\ \beta_{i2} &= \eta_{i0} * \alpha_{i2} * \eta_{i1}^{-1}\end{aligned}$$

是 X 中的三条起点、终点在 x_0 的闭路. 考察

$$\begin{aligned}\beta_{i0}\beta_{i1}^{-1}\beta_{i2} &= (\eta_{i1} * \alpha_{i0} * \eta_{i2}^{-1}) * (\eta_{i2} * \alpha_{i1}^{-1} * \eta_{i0}^{-1})(\eta_{i0} * \alpha_{i2} * \eta_{i1}^{-1}) \\ &\simeq_p \eta_{i1} * (\alpha_{i0} * \alpha_{i1}^{-1} * \alpha_{i2}) * \eta_{i1}^{-1}.\end{aligned}$$

注意到闭路 $\alpha_{i0} * \alpha_{i1}^{-1} * \alpha_{i2}$ 是映射 $\sigma_i : \Delta^2 \rightarrow X$ 在边界部分的限制, 可以扩充到整个 Δ^2 上. 因而 $\alpha_{i0} * \alpha_{i1}^{-1} * \alpha_{i2}$ 及

$$\beta_{i0}\beta_{i1}^{-1}\beta_{i2} \simeq_p \eta_{i1} * \alpha_{i0} * \alpha_{i1}^{-1} * \alpha_{i2} * \eta_{i1}^{-1}$$

道路同伦与常值道路 c_{x_0} . 道路同伦等价类 $[\gamma]$ 可以表示成

$$[\gamma] = [\gamma]([\beta_{i0}][\beta_{i1}^{-1}][\beta_{i2}])^{-\pm 1}([\beta_{i0}][\beta_{i1}^{-1}][\beta_{i2}])^{-\pm 1} \cdots ([\beta_{i0}][\beta_{i1}^{-1}][\beta_{i2}])^{-\pm 1}.$$

(3.1)已经说明了每个相同的 α_{ij} 包括 γ 出现的正负号的总和等于零. 而这个表达式中对应的下标及正负号与(3.1)相同, 对应的每个相同的 β_{ij} 包括 γ 出现的正负号的总和也等于零, $\gamma \in [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$

§3.4 相对同调群与正合序列

设 (X, A) 是一个拓扑空间偶, 对应的有 X 和 A 的奇异链复形

$$\begin{aligned} S_*(X), \quad S_q(X) &= \left\{ \sum_i n_i \sigma_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i : \Delta^q \rightarrow X \right\} \\ S_*(A), \quad S_q(A) &= \left\{ \sum_i n_i \sigma'_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, \sigma'_i : \Delta^q \rightarrow A \right\}. \end{aligned}$$

$S_q(A)$ 是 $S_q(X)$ 的子群且边缘算子 $\partial_q : S_q(A) \hookrightarrow S_{q-1}(A)$.

定义3.4.1 对于空间偶 (X, A) , 令 $S_q(X, A) = S_q(X)/S_q(A)$ 称为 (X, A) 的相对 q 维奇异链群. 边缘算子 $\partial_q : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$ 导出相对奇异链群的边缘算子

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\partial}_q : & S_q(X, A) & \longrightarrow S_{q-1}(X, A) \\ & \parallel & \parallel \\ & S_q(X)/S_q(A) & \longrightarrow S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A) \end{array}$$

同样定义:

- 1) $\mathbb{Z}_q(X, A) = \text{Ker} \tilde{\partial}_q$ 称为相对闭链群.
- 2) $\mathbb{B}_q(X, A) = \text{Im} \tilde{\partial}_{q+1}$ 相对边缘链群.
- 3) $H_q(X, A) = \mathbb{Z}_q(X, A)/\mathbb{B}_q(X, A)$ 称为相对同调群.

相对链群 $S_q(X, A)$ 是商群 $S_q(X)/S_q(A)$. 其元素还记为

$$\tilde{x} = \sum_i n_i \sigma_i$$

其中 $n_i \in \mathbb{Z}$ 是整数, $\sigma_i : \Delta^q \rightarrow X$ 是奇异单形, 只不过当奇异单形 σ 的像 $\sigma_i(\Delta^q) \subset A$ 全落到 A 中时认为 $\sigma_i = 0$. 因而

1, 相对闭链群 $\mathbb{Z}_q(X, A)$ 中的相对闭链 $\tilde{z} = \sum n_i \sigma_i$ 不一定满足 $\partial_q(\tilde{z}) = 0$, 只要 $\partial_q(\tilde{z}) = \sum m_j \tau_j$ 中每个 $q-1$ 维奇异单形 τ_j 的像 $\tau_j(\Delta^{q-1}) \subset A$ 全落到 A 中即可.

2, 相对边缘链群 $\mathbb{B}_q(X, A)$ 中的元 $\tilde{b} = \sum n_i \sigma_i$ 也不一定是边缘 $\sum n_i \sigma_i = \partial_{q+1}(\tilde{x})$, 只要

$$\partial_{q+1}(\tilde{x}) = \sum n_i \sigma_i + \sum k_j \sigma'_j,$$

多余的奇异单形 σ'_j 的像 $\sigma'_j(\Delta^q) \subset A$ 全落在 A 中即可.

例1 记 $E_-^1 = \{e^{2\pi i s} \mid 1/2 \leq s \leq 1\}$ 为圆 S^1 的下半圆(见图3.9)

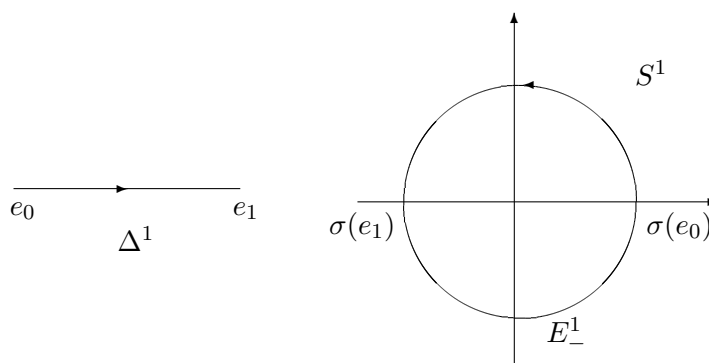


图3.9

构造1维奇异单形 $\sigma : \Delta^1 \rightarrow S^1$

$$\sigma((1-s)e_0 + se_1) = e^{\pi i s}$$

$\partial_1(\sigma) = \sigma(e_1) - \sigma(e_0) \neq 0$, 但是 $\sigma(e_1) = -1, \sigma(e_0) = 1 \in E_-^1$.

$$\sigma \in \mathbb{Z}_1(S^1, E_-^1)$$

是相对闭链. 因而 $[\sigma] \in H_1(S^1, E_-^1)$ 是相对同调群中的一个相对同调类.

类似的, 如果 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 是空间偶的映射 $f(A) \subset B$, 则 f 导出同调群的同态和相对同调群的同态

$$f_* : H_q(A) \longrightarrow H_q(B)$$

$$f_* : H_q(X) \longrightarrow H_q(Y)$$

$$f_* : H_q(X, A) \longrightarrow H_q(Y, B).$$

性质3.4.1 设 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ 都是空间偶的映射, 则

$$1, (g \cdot f)_* = g_* \cdot f_*$$

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A) & \xrightarrow{f_*} & H_q(Y, B) \\ & \searrow (g \cdot f)_* & \downarrow g_* \\ & & H_q(Z, C) \end{array}$$

2, $1_* = 1 : H_q(X, A) \rightarrow H_q(X, A)$, 因而相对同调群是同胚不变量.

相对同调群不仅是同胚不变量, 而且还是同伦不变量.

定理3.4.2

1, 如果 $f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 是同伦等价的空间偶之间的映射(从 f 到 g 的同伦 F 保持 $F(A \times I) \subset B$), 则

$$f_* = g_* : H_q(X, A) \longrightarrow H_q(Y, B).$$

2, 如果 $f_* : (X, A) \xrightarrow{\sim} (Y, B)$ 是空间偶之间的同伦等价, 则

$$f_* : H_q(X, A) \xrightarrow{\cong} H_q(Y, B)$$

是同构.

证明: 在此应当注意的是: 空间偶之间的映射 $f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 同伦等价要求伦移 $F : X \times I \rightarrow Y$ 保持 $F(A \times I) \hookrightarrow B$. 因此 $f \simeq g : X \rightarrow Y$, 同时 $f|_A \simeq g|_A : A \rightarrow B$. 由伦移 F 导出的链同伦即有链同伦 $H_q : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(Y)$ 也有链同伦 $H_q : S_q(A) \rightarrow S_{q+1}(B)$. 因此 H_q 导出链同伦

$$\tilde{H}_q : S_q(X, A) = S_q(X)/S_q(A) \rightarrow S_q(Y, B) = S_q(Y)/S_q(B)$$

同样满足

$$\begin{array}{ccccccc} g_{\#} - f_{\#} & = & \tilde{\partial}_{q+1} \cdot \tilde{H}_q & + & \tilde{H}_{q-1} \cdot \tilde{\partial}_q \\ \cdots \longrightarrow & S_{q+1}(X, A) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_{q+1}} & S_q(X, A) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_q} & S_{q-1}(X, A) & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow g_{\#} - f_{\#} & \swarrow \tilde{H}_q & \downarrow g_{\#} - f_{\#} & \swarrow H_{q-1} & \downarrow g_{\#} - f_{\#} & \\ \cdots \longrightarrow & S_{q+1}(Y, B) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_{q+1}} & S_q(Y, B) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_q} & S_{q-1}(Y, B) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

注意到, 空间偶 (X, A) 与 (Y, B) 同伦等价蕴含 X 与 Y 同伦等价, 同时子空间 A 与 B 也同伦等价. 因此

$$\begin{aligned} H_q(X) &\cong H_q(Y) \\ H_q(A) &\cong H_q(B) \\ H_q(X, A) &\cong H_q(Y, B). \end{aligned}$$

例2 令 $f : (S^1, E_-^1) \rightarrow (S^1, e^{2\pi i})$ 为

$$f(e^{2\pi it}) = \begin{cases} e^{4\pi it} & 0 \leq t \leq 1/2 \\ e^{2\pi i} & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$i : (S^1, e^{2\pi i}) \rightarrow (S^1, E_-^1)$ 为内射. 容易验证有空间偶映射的同伦等价:

$$\begin{aligned} f \cdot i &\simeq 1 : (S^1, e^{2\pi i}) \longrightarrow (S^1, E_-^1) \longrightarrow (S^1, e^{2\pi i}) \\ i \cdot f &\simeq 1 : (S^1, E_-^1) \longrightarrow (S^1, e^{2\pi i}) \longrightarrow (S^1, E_-^1) \end{aligned}$$

因而有相对同调群的同构

$$f_* : H_q(S^1, E_-^1) \xrightarrow{\cong} (S^1, e^{2\pi i}).$$

例1中的相对闭链 $\sigma : \Delta^1 \rightarrow S^1$,

$$\begin{aligned} \sigma((1-s)e_0 + se_1) &= e^{\pi is} \\ f \cdot \sigma((1-s)e_0 + se_1) &= f(e^{\pi is}) = e^{2\pi is}. \end{aligned}$$

注意到 $S_q(X, A) = S_q(X)/S_q(A)$, $j_{\#} : S_q(X) \rightarrow S_q(X, A)$ 是满同态, 映射的核 $\text{Ker} j_{\#} = S_q(A)$. 我们称

$$0 \longrightarrow S_q(A) \xrightarrow{i_{\#}} S_q(X) \xrightarrow{j_{\#}} S_q(X, A) \longrightarrow 0$$

为链群的一个正合序列。

定义3.4.2 设

$$\cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{f_{q+1}} C_q \xrightarrow{f_q} C_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{f_1} C_0 \xrightarrow{f_0} C_{-1} \longrightarrow \cdots$$

是群同态的一个序列.

- 1, 称序列在 C_q 处正合, 如果 $\text{Im} f_{q+1} = \text{Ker} f_q$.
- 2, 称整个序列是正合的如果他在每一个 C_q 处都正合。

在长正合序列中, $f_q \cdot f_{q+1} = 0$, 因而 $\text{Im} f_{q+1} \subset \text{Ker} f_q$. 如果考虑正合序列的同调群 $\text{Ker} f_q / \text{Im} f_{q+1}$, 他一定是平凡的即:

$$H_q(C_*, f_*) = \text{Ker} f_q / \text{Im} f_{q+1} = 0.$$

例3 对于空间偶 (X, A) 的链群同态

$$0 \longrightarrow S_q(A) \xrightarrow{i_{\#}} S_q(X) \xrightarrow{j_{\#}} S_q(X, A) \longrightarrow 0$$

是正合序列.

- 1) 序列在 $S_q(A)$ 处正合指 $\text{Im} 0 = \text{Ker} i_{\#}$, 即: $i_{\#}$ 是单射.
- 2) 序列在 $S_q(X)$ 处正合指 $\text{Im} i_{\#} = \text{Ker} j_{\#}$, 即: $j_{\#} : S_q(X) \rightarrow S_q(X)/S_q(A)$ 的核等于 $S_q(A)$.
- 3) 序列在 $S_q(X, A)$ 处正合指, $\text{Im} j_{\#} = \text{Ker} 0 = S_q(X, A)$, 即 $j_{\#}$ 是满同态.

利用群的正合序列求解群的结构是群的分类中的一个重要问题.

问题 如果群 A, B 已知, 而群 G 是下面正合序列中的群

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0.$$

能否确定中间的群 G 是什么?

对于交换群来说, 似乎可以确定中间的群 G 会有几种可能, 在第四章中我们还将提及这个问题. 但对于非交换群 A, B, G 来说, 知道有上面的正合序列, 且已知群 A, B 的结构时, 要确定群 G 的结构仍然是非常困难的问题.

例4 如果

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/5 \xrightarrow{f} G \longrightarrow 0$$

是群的正合序列, 则可以确定 $G \cong \mathbb{Z}/5$.

一般的, 如果

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} G \longrightarrow 0$$

是正合序列, 也可以确定 $G \cong A$, 并且无论 A 是交换群或非交换群结论都成立.

例5 如果有交换群的正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

则我们至少可以知道群 G 有两种可能, $G \cong \mathbb{Z}/4$ 或 $G \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.

当群 $G \cong \mathbb{Z}/4$ 时, $f: \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/4$ 为 $f(1) = 2$.

当群 $G \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ 时, $f: \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ 为 $f(1) = (1, 0)$ 或 $(0, 1)$.

定义3.4.3 交换群的正合序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0.$$

$\xleftarrow{\chi} \quad \xleftarrow{\rho}$

称为交换群的短正合序列.

当存在 $\chi: G \rightarrow A$ 使得

$$\chi \cdot f = 1: A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{\chi} A,$$

或存在 $\rho: B \rightarrow G$ 使得

$$g \cdot \rho = 1: B \xrightarrow{\rho} G \xrightarrow{g} B$$

时称这个短正合序列是可裂的.

引理3.4.3 如果

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0.$$

$\xleftarrow{\chi} \quad \xleftarrow{\rho}$

是可裂的短正合序列, 则 $G \cong A \oplus B$.

证明: 1, 如果存在 $\chi: G \rightarrow A$ 使得 $\chi \cdot f = 1$. 我们可以构造同态 $\phi: G \rightarrow A \oplus B$ 为: 对任何 $x \in G$,

$$\phi(x) = (\chi(x), g(x)) \in A \oplus B$$

此时, 如果 $\phi(x) = 0$ 则 $\chi(x) = 0, g(x) = 0$. 由于这个序列正合且 $g(x) = 0$, $x \in \text{Ker } g = \text{Im } f$, 存在 $a \in A$ 使得 $x = f(a)$. 而由

$$\chi(x) = \chi(f(a)) = \chi \cdot f(a) = a = 0$$

知 $a = 0$, 因而 $x = f(0) = 0$.

对任何 $(a, b) \in A \oplus B$, 由于 $g: G \rightarrow B$ 是满同态, 存在 $x \in G$ 使得 $g(x) = b$. 设 $\chi(x) = a'$, 则

$$g(x + f(a - a')) = g(x) + g \cdot f(a - a') = g(x) = b$$

且

$$\chi(x + f(a - a')) = \chi(x) + \chi \cdot f(a - a') = a' + (a - a') = a.$$

存在 $x + f(a - a') \in G$ 使得 $\phi(x + f(a - a')) = (a, b)$. ϕ 是满同态.

2, 如果存在 $\rho: B \rightarrow G$ 使得 $g \cdot \rho = 1$, 我们可以构造同态 $\psi: A \oplus B \rightarrow G$ 为: 对任何 $(a, b) \in A \oplus B$

$$\psi(a, b) = f(a) + \rho(b).$$

同样可以证明 ψ 即单且满, $A \oplus B \cong G$.

同时, 通过证明我们也可以看出来: 存在 $\chi: G \rightarrow A$ 使得 $\chi \cdot f = 1_A$ 和存在 $\rho: B \rightarrow G$ 使得 $g \cdot \rho = 1_B$ 是等价的.

例6 正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

是不可裂的, 这是因为同态 $\rho: \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}$ 只能是零同态.
而正合序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

一定是可裂的. 这是因为, 由于 g 是满同态, 存在 $x \in G$ 使得 $g(x) = 1 \in \mathbb{Z}$. 此时可以构造同态 $\rho: \mathbb{Z} \rightarrow G$ 为: 对任何 $n \in \mathbb{Z}$ $\rho(n) = nx \in G$, 他满足 $g \cdot \rho = 1_{\mathbb{Z}}$.

对于空间偶 (X, A) , 内射 $i: A \rightarrow X$ 导出链复形同态 $i_{\#}: S_q(A) \rightarrow S_q(X)$ 和同调群同态 $i_*: H_q(A) \rightarrow H_q(X)$.

商映射 $j_{\#}: S_q(X) \rightarrow S_q(X, A) = S_q(X)/S_q(A)$ 满足 $\tilde{\partial}_q \cdot j_{\#} = j_{\#} \cdot \partial_q$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & S_{q+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & S_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(X) \longrightarrow \cdots \\ & & j_{\#} \downarrow & & j_{\#} \downarrow & & j_{\#} \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & S_{q+1}(X, A) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_{q+1}} & S_q(X, A) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_q} & S_{q-1}(X, A) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

因而 $j_{\#}$ 导出同调群同态 $j_*: H_q(X) \rightarrow H_q(X, A)$.

在此 X 可以看成是空间偶 $(X, \emptyset)$, 其中 $\emptyset$ 是空集, $S_q(\emptyset) = 0$,

$$S_q(X) = S_q(X, \emptyset) = S_q(X)/S_q(\emptyset).$$

$j_{\#}: S_q(X) \rightarrow S_q(X, A)$ 可以看成是空间偶间映射 $j: (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ 导出的相对链复形之间的链映射 $j_{\#}: S_q(X, \emptyset) \rightarrow S_q(X, A)$.

由此我们得到同调群的同态

$$H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A).$$

参照相对链群 $S_q(X, A)$ 中元素的表示方法, 考察相对同调群中的相对同调类 $[\tilde{z}] \in H_q(X, A)$.

相对同调类 $[\tilde{z}]$ 的代表元 $\tilde{z} \equiv z = \sum_k n_k \sigma_k \in S_q(X)$ 是相对闭链指

$$\partial_q(z) = \sum_j m_j \tau_j$$

其中每个 $q-1$ 维奇异单形 τ_j 的像 $\tau_j(\Delta^{q-1}) \subset A$ 全落到 A 中, 因而 $\partial_q(z) = \sum_j m_j \tau_j$ 是 $S_{q-1}(A)$ 中的奇异链. 注意到

$$\partial_{q-1} \cdot \partial_q(z) = \partial_{q-1} \left(\sum_j m_j \tau_j \right) = 0$$

$\partial_q(z) = \sum_j m_j \tau_j$ 是 $S_{q-1}(A)$ 中的闭链, 他代表 A 的同调群 $H_{q-1}(A)$ 中的一个同调类

$$[\partial_q(z)] = \left[\sum_j m_j \tau_j \right] \in H_{q-1}(A).$$

定义3.4.4 定义联系同态 $\delta_q : H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$ 为: 对任何相对同调类 $[\tilde{z}] \in H_q(X, A)$, $\delta_q([\tilde{z}]) = [\partial_q(z)]$ 为 $\partial_q(z) = \sum_j m_j \tau_j$ 所代表的同调类.

引理3.4.4 对于相对同调类 $[\tilde{z}] \in H_q(X, A)$, $H_{q-1}(A)$ 中的同调类 $\delta_q([\tilde{z}] = [\partial_q(z)]$ 不依赖与代表元 z 的选取, 联系同态 $\delta_q : H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$ 的定义合理.

证明:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & S_{q+1}(A) & \xrightarrow{i_\#} & S_{q+1}(X) & \xrightarrow{j_\#} & S_{q+1}(X, A) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial_{q+1} & & \downarrow \partial_{q+1} & & \downarrow \tilde{\partial}_{q+1} \\
 0 & \longrightarrow & S_q(A) & \xrightarrow{i_\#} & S_q(X) & \xrightarrow{j_\#} & S_q(X, A) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \tilde{\partial}_q \\
 0 & \longrightarrow & S_{q-1}(A) & \xrightarrow{i_\#} & S_{q-1}(X) & \xrightarrow{j_\#} & S_{q-1}(X, A) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

1, 对于相对同调类 $[\tilde{z}] \in H_q(X, A)$, $\delta_q([\tilde{z}]) = [\partial_q(z)]$ 不依赖与 $S_q(X)$ 中代表元 z 的选取.

如果 $j_\#(z) = j_\#(z') \in S_q(X, A)$, 即 $z - z' = \sum n_k \sigma_k \in S_q(A)$, 则

$$\partial_q(z) = \partial_q(z') + \partial_q(\sum n_k \sigma_k).$$

而每个 σ_k 的像 $\sigma_k(\Delta^q) \subset A$ 全在 A 中, $\partial_q(z)$ 与 $\partial_q(z')$ 相差 $S_{q-1}(A)$ 中的一个边缘 $\partial_q(\sum n_k \sigma_k) \in \mathbb{B}_{q-1}(A)$,

$$[\partial_q(z)] = [\partial_q(z')] \in H_{q-1}(A).$$

2, 如果 $\tilde{z}$ 与 $\tilde{z}'$ 相差一个相对边缘 $\tilde{\partial}_{q+1}(\tilde{x})$, 即: 存在 $x \in S_{q+1}(X)$ 使得

$$\partial_{q+1}(x) = z - z' + \sum n_k \sigma_k$$

其中每个 σ_k 的像都在 A 中. 则 $z = \partial_{q+1}(x) + z' - \sum n_k \sigma_k$

$$\partial_q(z) = \partial_q \cdot \partial_{q+1}(x) + \partial_q(z') - \partial_q(\sum n_k \sigma_k) = \partial_q(z') - \partial_q(\sum n_k \sigma_k).$$

$\partial_q(z)$ 与 $\partial_q(z')$ 相差 $S_{q-1}(A)$ 中的一个边缘 $\partial_q(\sum n_k \sigma_k) \in \mathbb{B}_{q-1}(A)$,

$$[\partial_q(z)] = [\partial_q(z')] \in H_{q-1}(A).$$

通过联系同态 δ_q 我们得到了同调群同态的一个序列

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_q(A) &\xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(X) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H_1(X) &\xrightarrow{j_*} H_1(X, A) \xrightarrow{\delta_1} H_0(A) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X, A) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

定理3.4.5 同调群同态的序列是一个正合序列, 称为同调群的长正合序列.

证明: 定理证明的方法称为“追图法”, 读者要掌握追图法可以从证明习题5(五项引理)开始.

由于需要证明序列在每一处都正合, 整个证明比较长. 在此只给出在 $H_q(X, A)$ 处正合的证明.

对于 $H_q(X)$ 中的同调类 $[z]$, 由于 z 是 $\mathbb{Z}_q(X)$ 中的闭链, $\partial_q(z) = 0$

$$\delta_q \cdot j_*([z]) = \delta_q([z]) = [\partial_q(z)] = [0]$$

$Im j_* \subset Ker \delta_q$.

对于相对同调类 $[\tilde{z}] \in H_q(X, A)$, 相对闭链 $z \in S_q(X)$ 满足 $\partial_q(z) \in S_{q-1}(A)$. 如果

$$\delta_q([z]) = [\partial_q(z)] = 0 \in H_{q-1}(A)$$

即 $\partial_q(z) \in \mathbb{B}_{q-1}(A)$ 是 A 中的边缘, 存在 $x \in S_q(A)$ 使得 $\partial_q(z) = \partial_q(x)$. 注意到相对链群 $S_q(X, A) = S_q(X)/S_q(A)$ 是商群, 我们可以选相对同调类 $[\tilde{z}]$ 的代表元为 $z - x$. 此时 $\partial_q(z - x) = 0$, $[z - x] \in H_q(X)$ 而

$$j_*[z - x] = [z - x] = [\tilde{z}] \in H_q(X, A)$$

$Ker \delta_q \subset Im j_*$.

例6 记 E_+^n, E_-^n 为球面 S^n 的上下半球面, $E_+^n \cong E_-^n$ 都同胚与 n 维球体 E^n (当 $n = 1$ 时 $E_+^1 \cong E_-^1$ 同胚与单位区间). 他们都是可缩空间. 考察 (S^n, E_-^n) 的同调群长正合序列.

1) 当 $q - 1 > 0$ 时 $H_q(E_-^n) \cong H_{q-1}(E_-^n) = 0$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow & H_q(E_-^n) & \xrightarrow{i_*} & H_q(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_q(S^n, E_-^n) & \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(E_-^n) \rightarrow \cdots \\ & \parallel & & & & & \parallel \\ & 0 & & & & & 0 \end{array}$$

$j_* H_q(S^n) \rightarrow H_q(S^n, E_-^n)$ 是同构.

2) 在0维, 1维附近的正合序列

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow & H_1(E_-^n) & \xrightarrow{i_*} & H_1(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_1(S^n, E_-^n) & \xrightarrow{\delta_1} \rightarrow \\ & \parallel & & & & & \\ & 0 & & H_0(E_-^n) & \xrightarrow{i_*} & H_0(S^n) & \xrightarrow{j_*} H_0(S^n, E_-^n) \rightarrow 0 \end{array}$$

E^n, S^n 都是道路连通的空间, $i_* : H_0(E^n) \rightarrow H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$ 是同构. 因而 $\text{Im} \delta_1 = \text{Ker} i_* = 0$,

$$j_* : H_1(S^n) \xrightarrow{\cong} H_1(S^n, E^n)$$

是同构, $\text{Im} i_* = \text{Ker} j_* = H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$

$$H_0(S^n, E^n) \cong 0.$$

例7 记 E^2 为单位圆盘 S^1 是他的边界圆, 考察 (E^2, S^1) 的同调群的长正合序列

$$\cdots \rightarrow H_2(E^2) \xrightarrow{j_*} H_2(E^2, S^1) \xrightarrow{\delta_2} H_1(S^1) \xrightarrow{i_*} H_1(E^2) \rightarrow \cdots$$

由于 E^2 是可缩空间 $H_2(E^2) = H_1(E^2) = 0$,

$$\delta_2 : H_2(E^2, S^1) \xrightarrow{\cong} H_1(S^1).$$

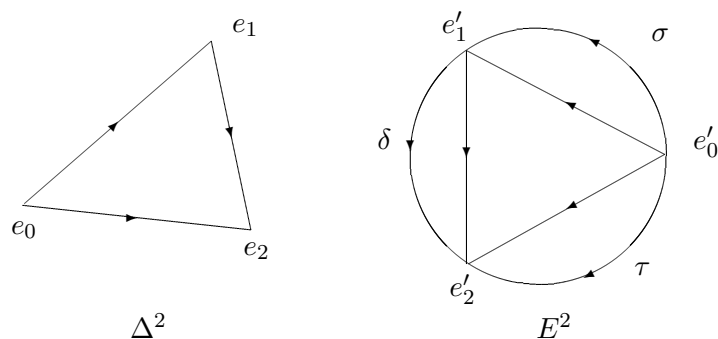


图3.10

由 π_1 与 H_1 的关系知 $H_1(S^1) \cong \pi_1(S^1, e'_0)/[\pi_1, \pi_1]$

$$\chi : \pi_1(S^1, e'_0) \xrightarrow{\cong} H_1(S^1) = \mathbb{Z},$$

$H_1(S^1)$ 的生成元是 $\chi[z]$, 其中闭路 $z : \Delta^1 \rightarrow S^1$ 绕圆逆时针方向一周.

构造 E^2 的2维奇异单形 $\mu : \Delta^2 \rightarrow E^2$. 将 Δ^2 放在圆盘内部与圆盘的边界外接, 从圆心向圆的边界做辐射得到 Δ^2 与圆盘 E^2 的同胚 μ (见图3.10).

$$\partial_2(\mu) = \sigma - \tau + \delta \in S_1(S^1)$$

因而 μ 是 $S_2(E^2, S^1)$ 中的相对闭链, $[\mu]$ 代表相对同调群 $H_2(E^2, S^1)$ 中的一个相对同调类.

考察联系同态 $\delta_2 : H_2(E^2, S^1) \rightarrow H_1(S^1)$, 我们有

$$\delta_2([\mu]) = [\partial_2(\mu)] = [\sigma - \tau + \delta] \in H_1(S^1).$$

注意到 $\tau^{-1} + \tau$ 是一个边缘, 而 $\sigma * \delta * \tau^{-1} - (\sigma + \delta + \tau^{-1})$ 也是一个边缘. 因而作为1维同调类

$$[\sigma - \tau + \delta] = [\sigma + \delta + \tau^{-1}] = [\sigma * \delta * \tau^{-1}] = [z]$$

是 $H_1(S^1)$ 的生成元. $[\mu]$ 是 $H_2(E^2, S^1) = \mathbb{Z}$ 的生成元.

例8 记 E^n 为 n 维实球体, S^{n-1} 是他的边界球面.

考察 (E^n, S^{n-1}) 在1维附近的同调群的正合序列, 我们有正合序列

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(E^n) & \xrightarrow{j_*} & H_1(E^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\delta_1} & H_0(S^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_0(E^n) \xrightarrow{j_*} H_0(E^n, S^{n-1}) \longrightarrow 0 \\ \parallel & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{array}$$

1) 当 $n > 1$ 时 S^{n-1} 是道路连通的, $H_0(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$, 0维同调群的生成元是 $[x_0]$. $H_0(E^n) = \mathbb{Z}$ 的生成元也是 $[x_0]$, 并且 $i_*([x_0]) = [x_0]$,

$$i_* : H_0(S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} H_0(E^n)$$

是同构. 因而 $Im i_* = Ker j_* = H_0(E^n) = \mathbb{Z}$,

$$j_* = 0 : H_0(E^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_0(E^n, S^{n-1})$$

是零同态, $H_0(E^n, S^{n-1}) = 0$. 同时 $Im \delta_1 = Ker i_* = 0$, 因而

$$H_1(E^n, S^{n-1}) = 0.$$

2) 当 $n = 1$ 时0维球面 $S^0 = \{x_0 = 1, x_1 = -1\}$ 是两个孤立的点, $H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 0维同调类的生成元有两个 $[x_0], [x_1]$. E^1 是道路连通的, $H_0(E^1) = \mathbb{Z}$. 0维同调群的生成元是 $[x_0] = [x_1]$.

考察 $i_* : H_0(S^0) \rightarrow H_0(E^1)$, 我们注意到

$$i_*([x_0]) = [x_0] \in H_0(E^1), \quad i_*([x_1]) = [x_1] \in H_0(E^1).$$

但在 $H_0(E^1)$ 中 $[x_0] = [x_1]$, $Ker i_* = Im \delta_1 = \mathbb{Z}$ 由 $[x_1] - [x_0] = [x_1 - x_0]$ 生成. 因而

$$H_1(E^1, S^0) \cong Im \delta_1 = Ker i_* = \mathbb{Z}.$$

令 $\sigma' : \Delta^1 \rightarrow E^1$ 为线性同胚. $\sigma \in S_1(E^1, S^0)$ 满足

$$\partial_1(\sigma') = \sigma(e_1) - \sigma(e_0) = x_1 - x_0 \in S_0(S^0)$$

因而是相对闭链, 他代表一个1维相对同调类 $[\sigma'] \in H_1(E^1, S^0)$. 考察联系同态 δ_1 , 我们有

$$\delta_1[\sigma'] = [\partial_1(\sigma')] = [x_1 - x_0] = [x_1] - [x_0]$$

$\delta_1[\sigma']$ 是 $Im \delta_1 = Ker i_*$ 的生成元. 因而 $[\sigma']$ 是 $H_1(E^1, S^0)$ 的生成元.

§3.4 习题

1 设有群的同态的短正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0,$$

1) 如果限定 G 是交换群, 试确定 G 的结构.

2) 如果 G 可以是非交换群, 试确定 G 所有可能的结构.

2 在例5的正合序列中 G 可能是非交换群吗? 可以确定 G 是4阶群. 试确定4阶群的分类.

3 假设有群的正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0.$$

试证明: G 一定是交换群且 $G \cong \mathbb{Z}/6$.

当

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/3 \longrightarrow 0.$$

是正合序列时还能确定 $G \cong \mathbb{Z}/6$ 吗? 说明理由.

4 证明: 如果 B 是自由Abel群, 则正合序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$$

一定是可裂的.

5 (五项引理) 假设下面的交换图中每一行都是正合的

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{k} & E \\ \cong \downarrow \varphi_1 & & \cong \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_0 & & \cong \downarrow \varphi_3 & & \cong \downarrow \varphi_4 \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{k'} & E' \end{array}$$

且 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ 都是同构. 证明: $\varphi_0 : C \rightarrow C'$ 是同构.

6 完成定理3.4.5的证明.

7 设 x_0 是空间 X 的基点, 证明:

1) 当 $q > 0$ 时 $H_q(X) \cong H_q(X, x_0)$.

2) 当 $q = 0$ 时 $H_0(X) \cong H_0(X, x_0) \oplus \mathbb{Z}$.

因而 $H_q(X, x_0)$ 也被称为带基点空间 (X, x_0) 的约化同调群, 记为 $\tilde{H}_q(X)$.

§3.5 切除定理

设 (X, A) 是一个空间偶, $U \subset A$ 是 X 中的一个开集. 则有内射导出的相对同调群的同态

$$j_* : H_q(X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow H_q(X, A).$$

定理3.5.1(切除定理) 如果 U 的闭包包含在 A 的内部 $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$, 则

$$j_* : H_q(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H_q(X, A)$$

是切除同构.

推论3.5.2 设 $V \subset U \subset A$, 其中 V 是 X 中的开集且 V 的闭包包含在 A 的内部 $\bar{V} \subset \overset{\circ}{A}$. 如果 $(X \setminus U, A \setminus U)$ 是 $(X \setminus V, A \setminus V)$ 的形变收缩核, 即: 存在收缩映射

$$j' : (X \setminus V, A \setminus V) \longrightarrow (X \setminus U, A \setminus U)$$

使得 $j' \cdot i = 1$ 且

$$i \cdot j' \simeq 1 : (X \setminus V, A \setminus V) \xrightarrow{j'} (X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{i} (X \setminus V, A \setminus V),$$

则 i_* 是空间偶同伦等价导出的同调群同构 j'_* 是切除同构, 因而

$$j_* : H_q(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{i_*} H_q(X \setminus V, A \setminus V) \xrightarrow{j'_*} H_q(X, A)$$

也是切除同构.

在给出切除定理的证明之前我们先来看切除定理的应用.

例1 球面的同调群为

$$H_q(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & q = 0, \\ 0 & q > 0. \end{cases} \quad H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, \\ 0 & 0 < q < n \text{ 或 } q > n, \\ \mathbb{Z} & q = n \end{cases}$$

记 $S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) | \sum x_i^2 = 1\}$ 为 n 维球面,

$$E_+^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) | \sum x_i^2 = 1, x_0 \geq 0\}$$

$$E_-^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) | \sum x_i^2 = 1, x_0 \leq 0\}$$

为球面的上、下半个球面, 他们都同胚与 n 维球体, 是可缩空间. 令

$$U = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) | \sum x_i^2 = 1, -1 \leq x_0 < -1/2\}$$

为下半个球体的下半部分. 则 $\bar{U} \subset \overset{\circ}{E_-^n}$, 因而

$$j_* : H_q(S^n \setminus U, E_-^n \setminus U) \xrightarrow{\cong} H_q(S^n, E_-^n)$$

是切除同构.

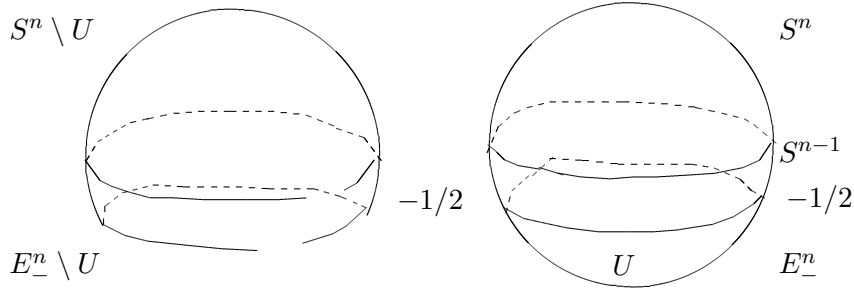


图3.11

注意到空间偶 \$(S^n \setminus U, E_-^n \setminus U)\$ 同伦等价与 \$(E_+^n, S^{n-1})\$, 其中

$$S^{n-1} = \{(0, x_1, \dots, x_n) \mid \sum x_i^2 = 1\}$$

是 \$E_+^n\$ 的边界球面. 内射

$$i : (E_+^n, S^{n-1}) \longrightarrow (S^n \setminus U, E_-^n \setminus U)$$

是同伦等价. 因而有同调群的同构

$$j_* : H_q(E_+^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} H_q(S^n \setminus U, E_-^n \setminus U) \xrightarrow{\cong} H_q(S^n, E_-^n)$$

1) 考察空间偶 \$(E_+^n, S^{n-1})\$ 的同调群的长正合序列,

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow H_q(E_+^n) & \xrightarrow{j_*} & H_q(E_+^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_{q-1}(E_+^n) \longrightarrow \cdots \\ & & \parallel & & & & \parallel \\ & & 0 & & & & 0 \end{array}$$

因而当 \$q > 1\$ 时

$$\delta_q : H_q(E_+^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} H_{q-1}(S^{n-1})$$

是同构.

同样考察 \$(S^n, E_-^n)\$ 的同调群的长正合序列

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow H_q(E_-^n) & \xrightarrow{i_*} & H_q(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_q(S^n, E_-^n) & \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(E_-^n) \longrightarrow \cdots \\ & & \parallel & & & & \parallel \\ & & 0 & & & & 0 \end{array}$$

我们得到当 \$q > 1\$ 时

$$j_* : H_q(S^n) \xrightarrow{\cong} H_q(S^n, E_-^n)$$

是同构.

结合切除同构我们有以下同调群的同构: 当 \$q > 1, n \geq 1\$ 时

$$H_{q-1}(S^{n-1}) \xleftarrow[\cong]{\delta_q} H_q(E_+^n, S^{n-1}) \xrightarrow[\cong]{j_*} H_q(S^n, E_-^n) \xleftarrow[\cong]{j_*} H_q(S^n)$$

特别的, 取 $n = 1, 2$ 我们有

$$\begin{aligned} 0 &\cong H_q(S^0) \cong H_{q+1}(S^1) \cong H_{q+2}(S^2) \cong \cdots \cong H_{q+n}(S^n) \\ \mathbb{Z} &\cong H_1(S^1) \cong H_2(S^2) \cong H_3(S^3) \cong \cdots \cong H_n(S^n) \end{aligned}$$

2) 在§3.4 例6中我们证明了: $j_* : H_1(S^n) \rightarrow H_1(S^n, E_-^n)$ 是同构. 在§3.4 例8中我们还证明了: 当 $n > 1$ 时 $H_1(E^n S^{n-1}) = 0$, 当 $n = 1$ 时 $H_1(E^1, S^0) \cong \mathbb{Z}$. 因而,

(1) 当 $n > 1$ 时

$$0 \cong H_1(E_+^n, S^{n-1}) \xrightarrow[\cong]{j_*} H_1(S^n, E_-^n) \xleftarrow[\cong]{j_*} H_1(S^n)$$

因而当 $n > q > 0$ 时, $n - q + 1 > 1$

$$0 \cong H_1(E_+^{n-q+1}, S^{n-q}) \cong H_1(S^{n-q+1}) \cong H_2(S^{n-q+2}) \cong H_q(S^n)$$

(2) 当 $n = 1$ 时

$$\mathbb{Z} \cong H_1(E_+^1, S^0) \xrightarrow[\cong]{j_*} H_1(S^1, E_-^1) \xleftarrow[\cong]{j_*} H_1(S^1)$$

为证明切除定理, 我们需要首先引进重心重分这个概念.

$\mathbb{R}^\infty$ 中的 $q + 1$ 个点 $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q$ 都会都会张成一个单形

$$[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q] = \{\lambda_0 \nu_0 + \lambda_1 \nu_1 + \cdots + \lambda_q \nu_q \mid \lambda_i \geq 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_q = 1\},$$

这个单形的重心定义为

$$b^q = \frac{1}{q+1} \nu_0 + \frac{1}{q+1} \nu_1 + \cdots + \frac{1}{q+1} \nu_q.$$

q 维标准单形 Δ^q 到 $\mathbb{R}^\infty$ 中单形 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$ 的线性映射

$$\tau : \Delta^q = [e_0, e_1, \dots, e_q] \longrightarrow [\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$$

称为一个 q 维线性单形, 仍记为 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$.

线性单形 $[b, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{q-1}]$ 被简记为 $B([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{q-1}])$. 对于同一个顶点 b , 线性单形的线性组合

$$\sum n_i [b, \nu_{0i}, \nu_{1i}, \dots, \nu_{q-1i}]$$

简记为 $B(\sum n_i [\nu_{0i}, \nu_{1i}, \dots, \nu_{q-1i}])$.

定义3.5.1

1) 0维线性单形 $[\nu_0]$ 的重心重分 $Sd[\nu_0]$ 是他自身 $[\nu_0]$.

2) 对于1维单形 $[\nu_0, \nu_1]$, 他的重心为

$$b^1 = \frac{1}{2} \nu_0 + \frac{1}{2} \nu_1.$$

$(b^1, \nu_1), (b^1, \nu_0)$ 分别张成 $[\nu_0, \nu_1]$ 中的两个1维单形 $[b^1, \nu_0], [b^1, \nu_1] \subset [\nu_0, \nu_1]$.

1维线性单形 $[\nu_0, \nu_1]$ 的重心重分 $Sd([\nu_0, \nu_1])$ 定义为

$$Sd([\nu_0, \nu_1]) = [b^1, \nu_1] - [b^1, \nu_0] = B^1([\nu_1] - [\nu_0]) = B^1(\partial_1([\nu_0, \nu_1])).$$

3) 归纳假设对 $q-1$ 维线性单形 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{q-1}]$ 已经构造了重心重分 Sd . 对于 q 维线性单形 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$, 他的边缘是一些 $q-1$ 维线性单形的线性组合, 已有重心重分. 记 q 维单形 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$ 的重心为 b^q , 定义

$$Sd[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q] = B^q(Sd \cdot \partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q])).$$

例1 对于2维线性单形 $1: [e_0, e_1, e_2] \rightarrow [e_0, e_1, e_2]$,

$$\partial_2([e_0, e_1, e_2]) = [e_1, e_2] - [e_0, e_2] + [e_0, e_1].$$

1维单形 $[e_1, e_2]$, $[e_0, e_2]$, $[e_0, e_1]$ 的重心分别为

$$b_0^1 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2, \quad b_1^1 = \frac{1}{2}e_0 + \frac{1}{2}e_2, \quad b_2^1 = \frac{1}{2}e_0 + \frac{1}{2}e_1$$

在此对线性单形 $[e_0, e_1, e_2]$ 的三个1维面

$$\begin{aligned} [e_0, e_1, e_2] \cdot F^0 &= [e_1, e_2], & [e_0, e_1, e_2] \cdot F^1 &= [e_0, e_2], \\ [e_0, e_1, e_2] \cdot F^2 &= [e_0, e_1] \end{aligned}$$

已经做了重心重分

$$\begin{aligned} Sd([e_1, e_2]) &= B_0^1(\partial_1([e_1, e_2])) = B_0^1([e_2] - [e_1]) = [b_0^1, e_2] - [b_0^1, e_1] \\ Sd([e_0, e_2]) &= B_1^1(\partial_1([e_0, e_2])) = B_1^1([e_2] - [e_0]) = [b_1^1, e_2] - [b_1^1, e_0] \\ Sd([e_0, e_1]) &= B_2^1(\partial_1([e_0, e_1])) = B_2^1([e_1] - [e_0]) = [b_2^1, e_1] - [b_2^1, e_0]. \end{aligned}$$

2维单形 $[e_0, e_1, e_2]$ 的重心为

$$b^2 = \frac{1}{3}e_0 + \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2.$$

由定义知2维线性单形 $[e_0, e_1, e_2]$ 的重心重分为

$$\begin{aligned} & Sd([e_0, e_1, e_2]) \\ &= B^2(Sd \cdot \partial_2([e_0, e_1, e_2])) \\ &= B^2(Sd([e_1, e_2]) - Sd([e_0, e_2]) + Sd([e_0, e_1])) \\ &= B^2([b_0^1, e_2] - [b_0^1, e_1] - ([b_1^1, e_2] - [b_1^1, e_0]) + ([b_2^1, e_1] - [b_2^1, e_0])) \\ &= ([b^2, b_0^1, e_2] - [b^2, b_0^1, e_1]) - ([b^2, b_1^1, e_2] - [b^2, b_1^1, e_0]) + ([b^2, b_2^1, e_1] - [b^2, b_2^1, e_0]). \end{aligned}$$

一般的, q 维线性单形的重心重分 $Sd([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q])$ 是 $q!$ 项的线性组合, (见图3.12)

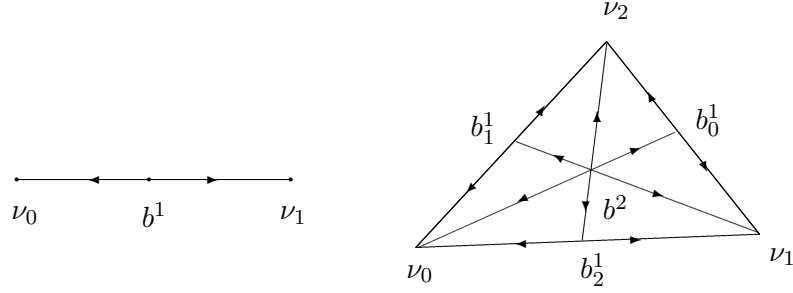


图3.12

定义3.5.2 设 $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ 是 X 的一个奇异单形. 定义 σ 的重心重分 $Sd(\sigma)$ 为

$$Sd(\sigma) = \sigma_{\#}(Sd([e_0, e_1, \dots, e_q])) = \sigma \cdot (Sd([e_0, e_1, \dots, e_q])).$$

其中 $[e_0, e_1, \dots, e_q]$ 为线性单形 $1 : \Delta^q \rightarrow [e_0, e_1, \dots, e_q]$.

定义奇异链复形的重心重分 $Sd : S_q(X) \rightarrow S_q(X)$ 为 $Sd(\sigma)$ 的线性扩充.

注意到 $Sd([e_0, e_1, \dots, e_q])$ 是一些线性单形 $[b^q, b^{q-1}, \dots, b^1, e_{i_0}]$ 的线性组合,

$$\sigma \cdot [b^q, b^{q-1}, \dots, b^1, e_{i_0}] : [e_0, e_1, \dots, e_q] \rightarrow [b^q, b^{q-1}, \dots, b^1, e_{i_0}] \xrightarrow{\sigma} X$$

是 X 中的 q 维奇异单形.

命题3.5.3 重心重分 $Sd \simeq 1 : S_*(X) \rightarrow S_*(X)$ 是一个与单位映射链同伦的链映射, 即:

- 1) $\partial_q \cdot Sd = Sd \cdot \partial_q$.
- 2) 存在映射 $\{T_q : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X)\}$ 使得

$$1 - Sd = \partial_{q+1} \cdot T_q + T_{q-1} \cdot \partial_q.$$

证明: 1) 注意到对于线性单形 $B^q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{q-1}])$

$$\begin{aligned} \partial_q(B^q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{q-1}])) &= \partial_q([b^q, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{q-1}]) \\ &= [\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{q-1}] - B^q(\partial_{q-1}([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{q-1}])) \\ Sd([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) &= B^q(Sd \cdot \partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q])) \\ \partial_q \cdot Sd([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) &= Sd \cdot \partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) \\ &\quad - B^q(\partial_{q-1} \cdot Sd \cdot \partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q])). \end{aligned}$$

对于0维线性单形 $[\nu_0]$, $Sd([\nu_0]) = [\nu_0]$, 因而

$$Sd = 1 : S_0(X) \longrightarrow S_0(X).$$

对于1维线性单形 $[\nu_0, \nu_1]$

$$\begin{aligned}\partial_1 \cdot Sd([\nu_0, \nu_1]) &= Sd \cdot \partial_1([\nu_0, \nu_1]) - B^1(\partial_0 \cdot Sd \cdot \partial_1([\nu_0, \nu_1])) \\ &= Sd \cdot \partial_1([\nu_0, \nu_1]).\end{aligned}$$

归纳假设对于 $q-1$ 维线性单形 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{q-1}]$,

$$\partial_{q-1} \cdot Sd([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{q-1}]) = Sd \cdot \partial_{q-1}([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{q-1}])$$

成立. 则对 q 维线性单形

$$\begin{aligned}\partial_q \cdot Sd([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) &= Sd \cdot \partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) - B^q(\partial_{q-1} \cdot Sd \cdot \partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q])) \\ &= Sd \cdot \partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) - B^q(Sd \cdot \partial_{q-1} \cdot \partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q])) \\ &= Sd \cdot \partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]).\end{aligned}$$

对于 q 维奇异单形 $\sigma: \Delta^q \rightarrow X$, $Sd(\sigma) = \sigma_{\#}(Sd([e_0, e_1, \dots, e_q]))$. 因而

$$\partial_q \cdot Sd(\sigma) = \sigma_{\#}(\partial_q \cdot Sd([e_0, e_1, \dots, e_q])) = Sd \cdot \partial_q(\sigma).$$

2) 下面我们构造从 Sd 到单位映射的链同伦 $T_q: S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X)$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & S_{q+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & S_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(X) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow 1-Sd & \swarrow T_q & \downarrow 1-Sd & \swarrow T_{q-1} & \downarrow 1-Sd \\ \cdots & \longrightarrow & S_{q+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & S_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(X) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

0维单形 $[\nu_0]$ 的重心是 $b^0 = [\nu_0]$. 对于0维线性单形 $[e_0] \rightarrow [\nu_0]$ 定义 $T_0([\nu_0])$ 为单形 $[\nu_0]$ 中的1维常值线性单形

$$T_0([\nu_0]) = [\nu_0, \nu_0] \subset [\nu_0] \quad \text{即:} \quad T_0([\nu_0]): [e_0, e_1] \longrightarrow [\nu_0, \nu_0]$$

记为 $T_0([\nu_0]) = B^0([\nu_0])$.

对于0维奇异单形 $\sigma: \Delta^0 \rightarrow X$, 定义

$$T_0(\sigma) = \sigma_{\#}(T_0([e_0])) = \sigma \cdot (T_0([e_0])).$$

此时

$$\partial_1 \cdot T_0(\sigma \cdot [e_0]) = \sigma \cdot \partial_1([e_0, e_0]) = \sigma \cdot ([e_0] - [e_0]) = 0 = (1 - Sd)(\sigma \cdot [e_0]).$$

归纳的假设对于 $\leq q-1$ 维线性单形, $T_{q-1}([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{q-1}])$ 已经给定且满足

$$(1 - Sd)([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{q-1}]) = (\partial_q \cdot T_{q-1} + T_{q-2} \cdot \partial_{q-1})([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{q-1}]).$$

对于 q 维单形 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$, 记他的重心为 b^q . 对于线性单形 $[e_0, e_1, \dots, e_q] \rightarrow [\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$ 定义

$$T_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) = B^q((1 - T_{q-1} \cdot \partial_q)([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q])).$$

由于 $\partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q])$ 是一些 $q-1$ 维线性单形的线性组合,

$$\begin{aligned}
 & (1 - Sd)(\partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q])) \\
 &= (\partial_q \cdot T_{q-1} - T_{q-2} \cdot \partial_{q-1})(\partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{q-1}])) \\
 &= \partial_q \cdot T_{q-1} \cdot \partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) \\
 (3.5.4) \quad & Sd \cdot \partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) \\
 &= \partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) - \partial_q \cdot T_{q-1} \cdot \partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q])
 \end{aligned}$$

由此知

$$\begin{aligned}
 & \partial_{q+1} \cdot T_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) \\
 &= \partial_{q+1} \cdot B^q((1 - T_{q-1} \cdot \partial_q)([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q])) \\
 &= (1 - T_{q-1} \cdot \partial_q)([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) \\
 &\quad - B^q(\partial_q \cdot (1 - T_{q-1} \cdot \partial_q)([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q])) \\
 &= (1 - T_{q-1} \cdot \partial_q)([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) \\
 &\quad - B^q(Sd \cdot \partial_q([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q])) \quad \text{由(3.5.4)} \\
 &= (1 - T_{q-1} \cdot \partial_q)([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) - Sd([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]).
 \end{aligned}$$

因而对于 q 维线性单形

$$(1 - Sd)([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) = (\partial_{q+1} \cdot T_q + T_{q-1} \cdot \partial_q)([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]).$$

注意到 b^q 是几何单形 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$ 的重心, $(1 - T_{q-1} \cdot \partial_q)([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q])$ 是一些 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$ 中的线性单形的线性组合. 因而

$$B^q((1 - T_{q-1} \cdot \partial_q)([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]))$$

是一些从 Δ^{q+1} 映射到 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$ 的线性单形的线性组合. 对于 q 维奇异单形 $\sigma: [e_0, e_1, \dots, e_q] \rightarrow X$ 定义

$$Sd(\sigma) = \sigma_{\#}(Sd([e_0, e_1, \dots, e_q])) = \sigma \cdot (Sd([e_0, e_1, \dots, e_q]))$$

他满足

$$\begin{aligned}
 (1 - Sd)(\sigma) &= \sigma_{\#}((1 - Sd)([e_0, e_1, \dots, e_q])) \\
 &= \sigma_{\#}((\partial_{q+1} \cdot T_q + T_{q-1} \cdot \partial_q)([e_0, e_1, \dots, e_q])) \\
 &= (\partial_{q+1} \cdot T_q + T_{q-1} \cdot \partial_q)(\sigma).
 \end{aligned}$$

有了重心重分的概念后我们来证明切除定理:

由于 U 的闭包包含在 A 的内部 $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$, $\{X \setminus \bar{U}, \overset{\circ}{A}\}$ 构成 X 的一个开覆盖. 对任何奇异单形 $\sigma: \Delta^q \rightarrow X$, 存在Lebesgue数 $\varepsilon > 0$ 使得对任何 $x, y \in \Delta^q$, 当 $\rho(x, y) < \varepsilon$ 时 $\sigma(x), \sigma(y)$ 同在 $X \setminus \bar{U}$ 中或同在 $\overset{\circ}{A}$ 中.

对于 $\mathbb{R}^\infty$ 中的单形 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$, 设其直径是 ρ , $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$ 的重心重分中每一项 $[b^q, \dots, b^1, \nu_{i_0}]$ 的直径 $\leq \frac{q}{q+1}\rho$. 对每一个 $[b^q, \dots, b^1, \nu_{i_0}]$ 再做重心重

分, 其每一项的直径 $\leq \left(\frac{q}{q+1}\right)^2 \rho$. 因而对于线性单形 $[e_0, e_1, \dots, e_q]$ 存在 m 使得对 $[e_0, e_1, \dots, e_q]$ 做 m 次重心重分后

$$Sd^m([e_0, e_1, \dots, e_q]) = \sum \pm [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_q]$$

中每一项 $[\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_q]$ 的直径小于 ε . 奇异单形 σ 做 m 次重心重分后

$$Sd^m(\sigma) = \sum \pm \sigma \cdot [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_q]$$

中每一项 $\sigma \cdot [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_q]$ 的像同在 $X \setminus \bar{U}$ 中或同在 $\overset{\circ}{A}$ 中.

设 $z = \sum n_i \sigma_i$ 是 $S_q(X, A)$ 中的相对闭链, 由于是有限个奇异单形的线性组合, 存在 m 使得对 z 做 m 次重心重分后

$$Sd^m(\sum n_i \sigma_i) = \sum n_i (\sum \pm \sigma_i \cdot [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_q])$$

中的每一项 $\sigma_i \cdot [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_q]$ 的像同在 $X \setminus \bar{U}$ 中或同在 $\overset{\circ}{A}$ 中.

由

$$\begin{aligned} 1 - Sd &= \partial_{q+1} \cdot T_q + T_{q-1} \cdot \partial_q \\ Sd - Sd^2 &= Sd \cdot \partial_{q+1} \cdot T_q + Sd \cdot T_{q-1} \cdot \partial_q \\ &= \partial_{q+1} \cdot (Sd \cdot T_q) + (Sd \cdot T_{q-1}) \cdot \partial_q \\ &\dots \end{aligned}$$

$$Sd^{m-1} - Sd^m = \partial_{q+1} \cdot (Sd^{m-1} \cdot T_q) + (Sd^{m-1} \cdot T_{q-1}) \cdot \partial_q$$

知

$$\begin{aligned} 1 - Sd^m &= \partial_{q+1} \cdot (1 + Sd + \dots + Sd^{m-1}) \cdot T_q + (1 + Sd + \dots + Sd^m) \cdot T_{q-1} \cdot \partial_q. \end{aligned}$$

Sd^m 与单位映射链同伦, z 与 $Sd^m(z)$ 相差一个相对边缘. 在相对同调群中

$$[z] = [Sd^m(z)] = [Sd^m(\sum n_i \sigma_i)] \in H_q(X, A).$$

由于 $Sd^m(\sum n_i \sigma_i)$ 中的每一项 $\sigma_i \cdot [\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_q]$ 的像同在 $X \setminus \bar{U}$ 中或同在 $\overset{\circ}{A}$ 中. 在消去像在 A 中的奇异单形后我们认为 $Sd^m(\sum n_i \sigma_i)$ 是 $X \setminus U$ 中的奇异单形的线性组合, 他是 $S_q(X \setminus U, A \setminus U)$ 中的相对闭链. 存在相对同调类 $[Sd^m(z)] \in H_q(X \setminus U, A \setminus U)$ 使得 $j_*[Sd^m(z)] = [z]$. $j_* : H_q(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_q(X, A)$ 是满同态.

假设有相对同调类 $[z] \in H_q(X \setminus U, A \setminus U)$ 使得 $j_*([z]) = 0 \in H_q(X, A)$, 即存在 $x = \sum m_j \tau_j \in S_{q+1}(X)$ 使得

$$\partial_{q+1}(x) = \partial_{q+1}(\sum m_j \tau_j) = z + y_A$$

其中 y_A 是 $S_q(A)$ 中的奇异链. 同样对 x 做重心重分并将 $Sd^m(x)$ 表示成 $x_{X \setminus U} + x_A$, 其中 $x_{X \setminus U}$ 是 $X \setminus U$ 中的奇异链, x_A 是 A 中的奇异链. 则

$$\begin{aligned} \partial_{q+1} \cdot Sd^m(x) &= \partial_{q+1}(x_{X \setminus U} + x_A) \\ &= Sd^m(z) + Sd^m(y_A) \end{aligned}$$

同样 $Sd^m : S_q(X \setminus U) \rightarrow S_q(X \setminus U)$ 也与单位映射链同伦. $Sd^m(z)$ 与 z 相差 $S_q(X \setminus U, A \setminus U)$ 中的一个相对边缘

$$Sd^m(z) = z + \partial_{q+1}(x_1) + y_1$$

其中 $x_1 \in S_{q+1}(X \setminus U)$, $y_1 \in S_q(A \setminus U)$. 因而

$$\partial_{q+1}(x_{X \setminus U} - x_1) = z + y_1 + (Sd^m(y_A) - \partial_{q+1}(x_A)).$$

注意到 $x_{X \setminus U}, x_1, z, y_1$ 都是 $X \setminus U$ 中的奇异链, y_A, x_A 是 A 中的奇异链. $(Sd^m(y_A) - \partial_{q+1}(x_A))$ 一定是 $A \cap (X \setminus U) = A \setminus U$ 中的奇异链. $[z] = 0 \in H_q(X \setminus U, A \setminus U)$, j_* 是单同态.

§3.5 习题

- 1 记 ΣX 为拓扑空间 X 的双角锥, 试仿照例1的方法证明: 当 $q > 1$ 时, $H_{q-1}(X) \cong H_q(\Sigma X)$.
- 2 设 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$ 是一个线性单形,

$$Sd([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) = \sum \pm [b^q, b^{q-1}, \dots, b^1, \nu_{i_0}],$$

$[b^q, b^{q-1}, \dots, b^1, \nu_{i_0}]$ 是 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$ 的重心重分中的一项. 由定义知 b^q 是几何单形 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$ 的重心.

试用归纳法证明: 线性单形 $[b^q, b^{q-1}, \dots, b^1, \nu_{i_0}]$ 中的第 $r+1$ 个顶点 b^r 是几何单形 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$ 的某个 r 维面 $[\nu_{i_0}, \nu_{i_1}, \dots, \nu_{i_r}]$ 的重心, 而第 r 个顶点 b^{r-1} 是 $[\nu_{i_0}, \nu_{i_1}, \dots, \nu_{i_r}]$ 的 $r-1$ 维面 $[\nu_{i_0}, \dots, \widehat{\nu_{i_j}}, \dots, \nu_{i_r}]$ 的重心.

因而 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$ 的重心重分中的一项也可以记为

$$(\nu_{i_0}) \subset (\nu_{i_0}, \nu_{i_1}) \subset \dots \subset (\nu_{i_0}, \nu_{i_1}, \dots, \nu_{i_r}) \subset \dots \subset (\nu_{i_0}, \nu_{i_1}, \dots, \nu_{i_q})$$

其中 $(\nu_{i_0}, \nu_{i_1}, \dots, \nu_{i_r})$ 代表单形 $[\nu_{i_0}, \nu_{i_1}, \dots, \nu_{i_r}]$ 的重心.

- 3 设 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$ 是 $\mathbb{R}^\infty$ 中的一个单形, 他的直径

$$\begin{aligned} \rho([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]) &= \max\{\rho(x, y) | x, y \in [\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]\} \\ &= \max\{\rho(\nu_i, \nu_j)\}. \end{aligned}$$

设 $[b^q, b^{q-1}, \dots, b^1, \nu_{i_0}]$ 是 $[\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q]$ 的重心重分中的一项, 证明: $[b^q, b^{q-1}, \dots, b^1, \nu_{i_0}]$ 的直径

$$\rho([b^q, b^{q-1}, \dots, b^1, \nu_{i_0}]) \leq \frac{q}{q+1} \rho([\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_q])$$

- 4 试利用§3.4例6中的结论及例1中的结论给出 $H_2(S^2) \cong H_2(S^2, E_-^2) \cong \mathbb{Z}$ 的生成元.
- 5 记 $S^m \vee S^n$ 为两个球面的一点并,
 - 1), 利用切除定理求 $(S^m \vee S^n, S^n)$ 的相对同调群 $H_q(S^m \vee S^n, S^n)$
 - 2), 求 $S^m \vee S^n$ 的各维同调群 $H_q(S^1 \vee S^1)$.
- 6 设 X, Y 是两个道路连通的拓扑空间, $x_0 \in X, y_0 \in Y$ 都有可缩的邻域 $x_0 \in U \subset X, y_0 \in V \subset Y$. 证明: 当 $q > 0$ 时

$$H_q(X \vee Y) \cong H_q(X) \oplus H_q(Y)$$

§3.6 Mayer-Vietoris序列

利用同伦不变性、正合序列、切除定理计算拓扑空间的同调群是代数拓扑中的重要方法. 本节我们介绍另外一个重要的计算空间同调群的方法—Mayer-Vietoris序列, 他可以看做是: 将拓扑空间 X 分成两个子空间 X_1, X_2 的并, 通过子空间 X_1, X_2 及 $X_1 \cap X_2$ 的同调群计算 X 的同调群的方法.

设 X_1, X_2 是空间 X 的两个开集满足 $X_1 \cup X_2 = X$. 令 $U = X \setminus X_1 = X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)$, 则 U 是 X 中的闭集 $\bar{U} = U \subset X_2 = \overset{\circ}{X}_2$.

$$j : (X \setminus U, X_2 \setminus U) = (X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X, X_2)$$

导出切除同构

$$j_1 : H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\cong} H_q(X, X_2).$$

同理易证

$$j_2 : H_q(X_2, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\cong} H_q(X, X_1)$$

也是切除同构.

定义3.6.1 称 (X, X_1, X_2) 是一个正合三元组, 如果 $X_1 \cap X_2 = A$ 且

$$\iota_1 : H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_q(X, X_2)$$

$$\iota_2 : H_q(X_2, X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_q(X, X_1)$$

都是切除同构.

显然, 如果 X_1, X_2 都是 X 的开集且 $X_1 \cup X_2 = X$, 则 (X, X_1, X_2) 是正合三元组.

例1 对于球面 S^n 的上下两个半球 E_+^n, E_-^n , $E_+^n \cup E_-^n = S^n$, $E_+^n \cap E_-^n = S^{n-1}$. (S^n, E_+^n, E_-^n) 是正合三元组.

例2 将环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 分成左右两半 X_1, X_2 , 每一半都同胚与圆柱面 $S^1 \times I$ (见图3.13)

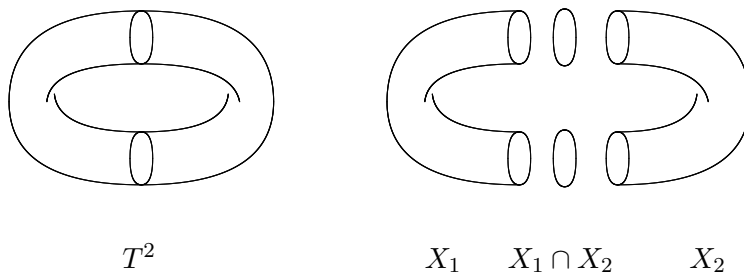


图3.13

此时的 (T^2, X_1, X_2) 也是正合三元组.

设 (X, X_1, X_2) 是一个正合三元组, 记 $X_1 \cap X_2 = A$. 则空间偶 (X, X_2) 和 (X_1, A) 的同调群的长正合序列构成一个正合序列的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_q(A) & \xrightarrow{i_{1*}} & H_q(X_1) & \xrightarrow{j_*} & H_q(X_1, A) & \xrightarrow{\delta} & H_{q-1}(A) & \xrightarrow{i_{1*}} & H_{q-1}(X_1) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow i_{2*} & & \downarrow j_{1*} & & \cong \downarrow \iota_{1*} & & \downarrow i_{2*} & & \downarrow j_{1*} & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_q(X_2) & \xrightarrow{j_{2*}} & H_q(X) & \xrightarrow{j'_*} & H_q(X, X_2) & \xrightarrow{\delta} & H_{q-1}(X_2) & \xrightarrow{j_{2*}} & H_{q-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

同样 (X, X_1) 和 (X_2, A) 的同调群的长正合序列构成一个正合序列的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_q(A) & \xrightarrow{i_{2*}} & H_q(X_2) & \xrightarrow{j_*} & H_q(X_2, A) & \xrightarrow{\delta} & H_{q-1}(A) & \xrightarrow{i_{2*}} & H_{q-1}(X_2) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow i_{1*} & & \downarrow j_{2*} & & \cong \downarrow \iota_{2*} & & \downarrow i_{1*} & & \downarrow j_{2*} & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_q(X_1) & \xrightarrow{j_{1*}} & H_q(X) & \xrightarrow{j'_*} & H_q(X, X_1) & \xrightarrow{\delta} & H_{q-1}(X_1) & \xrightarrow{j_{1*}} & H_{q-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

其中

$$\begin{aligned} \iota_{1*} : H_q(X_1, A) &\longrightarrow H_q(X, X_2) \\ \iota_{2*} : H_q(X_2, A) &\longrightarrow H_q(X, X_1) \end{aligned}$$

是切除同构.

现在我们取出第一个交换图的一部分

$$\begin{array}{ccc} H_q(X_1, A) & \xrightarrow{\delta} & H_{q-1}(A) \\ \cong \downarrow \iota_{1*} & & \\ H_q(X) & \xrightarrow{j'_*} & H_q(X, X_2) \end{array}$$

并定义

$$\varphi = \delta \cdot \iota_{1*}^{-1} \cdot j'_* : H_q(X) \longrightarrow H_{q-1}(A).$$

定理3.6.1(Mayer-Vietoris序列) 如果 (X, X_1, X_2) 是正合三元组, 记 $X_1 \cap X_2 = A$. 则有同调群的长正合序列

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} H_q(X) \xrightarrow{\varphi} H_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots \\ \cdots &\longrightarrow H_0(A) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} H_0(X) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

其中 $(i_{1*}, i_{2*}) : H_q(A) \rightarrow H_q(X_1) \oplus H_q(X_2)$ 为: 对于 $H_q(A)$ 中的同调类 $[a]$

$$(i_{1*}, i_{2*})([a]) = (i_{1*}([a]), i_{2*}([a])) \in H_q(X_1) \oplus H_q(X_2)$$

$j_{1*} - j_{2*} : H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \rightarrow H_q(X)$ 为: 对于 $H_q(X_1) \oplus H_q(X_2)$ 中的元 $([z_1], [z_2])$

$$(j_{1*} - j_{2*})([z_1], [z_2]) = j_{1*}([z_1]) - j_{2*}([z_2]) \in H_q(X).$$

证明: Mayer-Vietoris正合序列完全是一个代数的定理, 参见习题1. 定理的证明方法仍然是追图法(diagram chase). 在此我们只给出在 $H_q(X)$ 处正合的证明, 其他部分请读者自行证明.

1) 对任何 $([z_1], [z_2]) \in H_q(X_1) \oplus H_q(X_2)$,

$$\begin{aligned}\varphi \cdot (j_{1*} - j_{2*})([z_1], [z_2]) &= \varphi(j_{1*}([z_1]) - j_{2*}([z_2])) \\ &= \delta \cdot \iota_{1*}^{-1} \cdot j'_* \cdot j_{1*}([z_1]) - \delta \cdot \iota_{1*}^{-1} \cdot j'_* \cdot j_{2*}([z_2])\end{aligned}$$

由第二行的正合性知 $j'_* \cdot j_{2*} = 0$, 因而 $\delta \cdot \iota_{1*}^{-1} \cdot j'_* \cdot j_{2*}([z_2]) = 0$.

由图表可交换知 $j'_* \cdot j_{1*} = \iota_{1*} \cdot j_*$, 因而

$$\begin{aligned}\delta \cdot \iota_{1*}^{-1} \cdot j'_* \cdot j_{1*}([z_1]) \\ &= \delta \cdot \iota_{1*}^{-1} \cdot \iota_{1*} \cdot j_*([z_1]) \\ &= \delta \cdot j_*([z_1]) = 0\end{aligned}$$

由此知 $\varphi \cdot (j_{1*} - j_{2*})([z_1], [z_2]) = 0$.

2) 对于任何 $[z] \in H_q(X)$, 如果

$$\varphi([z]) = \delta \cdot \iota_{1*}^{-1} \cdot j'_*([z]) = 0,$$

则由第一行的正合性知 $\iota_{1*}^{-1} \cdot j'_*([z]) \in \text{Ker} \delta = \text{Im} j_*$. 存在 $[z_1] \in H_q(X_1)$ 使得

$$j_*([z_1]) = \iota_{1*}^{-1} \cdot j'_*([z])$$

考察 $[z] - j_{1*}([z_1]) \in H_q(X)$, 他满足

$$\begin{aligned}j'_*([z] - j_{1*}([z_1])) &= j'_*([z]) - j'_* \cdot j_{1*}([z_1]) \\ &= j'_*([z]) - \iota_{1*} \cdot j_*([z_1]) \\ &= \iota_{1*} \cdot \iota_{1*}^{-1} \cdot j'_*([z]) - \iota_{1*} \cdot j_*([z_1]) \\ &= \iota_{1*} (\iota_{1*}^{-1} \cdot j'_*([z]) - j_*([z_1])) = 0.\end{aligned}$$

由第二行的正合性知 $[z] - j_{1*}([z_1]) \in \text{Ker} j'_* = \text{Im} j_{2*}$, 存在 $[z_2] \in H_q(X_2)$ 使得 $j_{2*}([z_2]) = [z] - j_{1*}([z_1])$,

$$[z] = (j_{1*} - j_{2*})([z_1], -[z_2]) \in \text{Im}(j_{1*} - j_{2*}).$$

例3 如例1, 将 n 维球面 S^n 分成上下两个半球 E_+^n, E_-^n 的并, 其中 $n > 1$. (S^n, E_+^n, E_-^n) 是正合三元组, $E_+^n \cap E_-^n = S^{n-1}$. 由同调群的Mayer-Vietoris序列

$$H_q(E_+^n) \oplus H_q(E_-^n) \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} H_q(S^n) \xrightarrow{\varphi} H_{q-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_{q-1}(E_+^n) \oplus H_{q-1}(E_-^n)$$

知: 当 $q-1 > 0$ 时 $\varphi: H_q(S^n) \rightarrow H_{q-1}(S^{n-1})$ 是同构.

在此应小心处理在 $q=1$ 处的正合序列

$$\begin{array}{ccccc}H_1(E_+^n) \oplus H_1(E_-^n) & \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} & H_1(S^n) & \xrightarrow{\varphi} & H_0(S^{n-1}) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_0(E_+^n) \oplus H_0(E_-^n) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 \oplus 0 & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\end{array}$$

此时 $(i_{1*}, i_{2*}) : H_0(S^{n-1}) \rightarrow H_0(E_+^n) \oplus H_0(E_-^n)$ 是单同态, 因而 $H_1(S^n) = 0$.

例4 如例2, 将环面 T^2 分成 X_1, X_2 两部分, $X_1 \cup X_2 = T^2$, $X_1 \cap X_2 = S^1 \amalg S^1$ 是两个不相交的圆, (T^2, X_1, X_2) 是正合三元组.

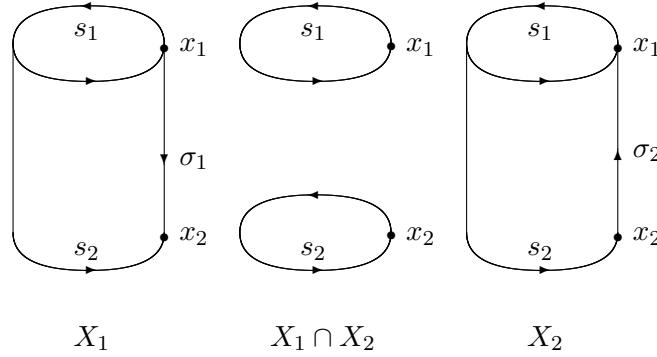


图3.13

考察 (T^2, X_1, X_2) 的 Mayer-vietoris 序列,

$$\begin{array}{ccccc} H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) & \xrightarrow{j_1 - j_2} & H_1(T^2) & \xrightarrow{\varphi} & H_0(S^1 \amalg S^1) \xrightarrow{(i_1, i_2)} H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) \\ \parallel & & & & \parallel \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{array}$$

$H_0(S^1 \amalg S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, 生成元是 $[x_1], [x_2]$.

$H_0(X_1) \cong H_0(X_2) \cong \mathbb{Z}$, 生成元是 $[x_1]$ 且有关系 $[x_1] = [x_2]$.

$(i_1, i_2)([x_1]) = ([x_1], [x_1]) = (i_1, i_2)([x_2])$, 因而

$$\text{Im } \varphi = \text{Ker}(i_1, i_2) \cong \mathbb{Z}$$

由 $[x_2] - [x_1]$ 生成.

考察 Mayer-Vietoris 序列的前边部分

$$\begin{array}{ccccc} H_1(S^1 \amalg S^1) & \xrightarrow{(i_1, i_2)} & H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) & \xrightarrow{j_1 - j_2} & H_1(T^2) \xrightarrow{\varphi} H_0(S^1 \amalg S^1) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{array}$$

记 $H_1(S^1 \amalg S^1)$ 的两个生成元为 $[s_1], [s_2]$, 他们分别是绕各圆逆时针方向的一周代表的同调类.

$(i_1, i_2)([s_1]) = ([s_1], [s_1])$, $(i_1, i_2)([s_2]) = ([s_2], [s_2])$. 可以证明: 在 X_1 及 X_2 的 1 维同调群中, 绕上、下两个圆逆时针方向一周代表的是同一个同调类, 即:

在 $H_1(X_1)$ 中 $[s_1] = [s_2]$, 在 $H_1(X_2)$ 中也有 $[s_1] = [s_2]$. 因而

$\text{Ker}(j_1 - j_2) \cong \mathbb{Z}$, 由 $H_1(X_1) \oplus H_1(X_2)$ 中的 $([s_1], [s_1])$ 生成

$\text{Ker}(i_1, i_2) \cong \mathbb{Z}$ 由 $H_1(S^1 \amalg S^1)$ 中的 $[s_1] - [s_2]$ 生成.

在计算出 $\text{Ker}(j_1 - j_2)$ 为由 $([s_1], [s_1])$ 生成的自由Abel群之后, 我们计算 $j_1 - j_2 : H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \rightarrow H_1(T^2)$ 的像 $\text{Im}(j_1 - j_2)$. 由代数基本定理知

$$\text{Im}(j_1 - j_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \text{Ker}(j_1 - j_2) \cong \mathbb{Z}$$

将 $H_1(X_1) \oplus H_1(X_2)$ 的生成元改写成 $([s_1], [s_1]), ([s_1], 0)$. $(j_1 - j_2)([s_1], [s_1]) = 0$, $\text{Im}(j_1 - j_2)$ 由

$$(j_1 - j_2)([s_1], 0) = j_1([s_1]) = [s_1]$$

生成.

由 $\text{Ker}\varphi = \text{Im}(j_1 - j_2) \cong \mathbb{Z}$, $\text{Im}\varphi = \text{Ker}(i_1, i_2) \cong \mathbb{Z}$ 得到短正合列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}\varphi & \longrightarrow & H_1(T^2) & \longrightarrow & \text{Im}\varphi \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & \parallel \\ & & \mathbb{Z} & & & & \mathbb{Z} \end{array}$$

并且由 $\text{Im}\varphi = \mathbb{Z}$ 是自由Abel群知: 这个短正合序列是可裂的, 因此

$$H_1(T^2) \cong \text{Ker}\varphi \oplus \text{Im}\varphi \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

首先 $\text{Ker}\varphi = \text{Im}(j_1 - j_2)$ 为由 $j_1([s_1]) = [s_1]$ 生成的自由Abel群. 为写出 $H_1(T^2)$ 的另一个生成元, 记 σ_1 为 X_1 中从 x_1 到 x_2 的道路, σ_2 为 X_2 中从 x_2 到 x_1 的道路. 在 $T^2 = X_1 \cup X_2$ 中 $\sigma_1 * \sigma_2$ 是起点、终点在 x_0 的一条闭路, 因而 $[\sigma_1 + \sigma_2]$ 代表 $H_1(T^2)$ 中的一个同调类.

记 $A = X_1 \cap X_2 = S^1 \amalg S^1$, 考察由交换图

$$\begin{array}{ccc} H_q(X_1, A) & \xrightarrow{\delta} & H_{q-1}(A) \\ & \cong \downarrow \iota_{1*} & \\ H_q(X) & \xrightarrow{j'_*} & H_q(X, X_2) \end{array}$$

定义的

$$\varphi = \delta \cdot \iota_{1*}^{-1} \cdot j'_* : H_q(X) \longrightarrow H_{q-1}(A).$$

$j'_*([\sigma_1 + \sigma_2]) = [\sigma_1] \in H_1(X, X_2)$, 在 $S_1(X, X_2) = S_1(X)/S_1(X_2)$ 中 σ_2 被看做是零.

$\partial(\sigma_1) = x_2 - x_1 \in S_0(A)$, 因而 σ_1 是 $S_1(X_1, A)$ 中的相对闭链且 $\iota_1([\sigma_1]) = [\sigma_1] = j'_*([\sigma_1 + \sigma_2])$. 因而

$$\iota_1^{-1} \cdot j'_*([\sigma_1 + \sigma_2]) = [\sigma_1].$$

由 $\partial_1(\sigma_1) = x_2 - x_1$ 知

$$\delta([\sigma_1]) = [x_2] - [x_1] = \delta \cdot \iota_1^{-1} \cdot j'_*([\sigma_1 + \sigma_2]) = \varphi([\sigma_1 + \sigma_2])$$

是 $\text{Im}\varphi = \text{Ker}(i_1, i_2)$ 的生成元. $[\sigma_1 + \sigma_2]$ 是 $H_1(T^2)$ 的另一个生成元.

考察 Mayer-Vietoris 序列在 $H_2(T^2)$ 处的正合性, 我们有

$$\begin{array}{ccccc} H_2(X_1) \oplus H_2(X_2) & \xrightarrow{j_1 - j_2} & H_2(T^2) & \xrightarrow{\varphi} & H_1(S^1 \amalg S^1) \xrightarrow{(i_1, i_2)} H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) \\ \parallel & & & & \parallel \\ 0 & & & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \qquad \qquad \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{array}$$

前面已经计算出了 $\text{Ker}(i_1, i_2) \cong \mathbb{Z}$, 由 $H_1(S^1 \amalg S^1)$ 中的 $[s_1] - [s_2]$ 生成. 因而 $H_2(T^2) \cong \text{Im} \varphi = \text{Ker}(i_1, i_2) \cong \mathbb{Z}$.

§3.6 习题

- 1 证明: (S^n, E_+^n, E_-^n) 是正合三元组.
- 2 (Barratt-Whitehead 引理) 给定交换群同态的交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{i+1} & \longrightarrow & A_i & \xrightarrow{f_i} & B_i & \xrightarrow{g_i} & C_i & \xrightarrow{h_i} & A_{i-1} & \longrightarrow & B_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \gamma_{i+1} \downarrow & & \alpha_i \downarrow & & \beta_i \downarrow & & \gamma_i \downarrow \cong & & \alpha_{i-1} \downarrow & & \beta_{i-1} \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C'_{i+1} & \longrightarrow & A'_i & \xrightarrow{f'_i} & B'_i & \xrightarrow{g'_i} & C'_i & \xrightarrow{h'_i} & A'_{i-1} & \longrightarrow & B'_{i-1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

如果没一行都是正合的且每个 $\gamma_i : C_i \rightarrow C'_i$ 都是同构, 则有长正合序列

$$\cdots \longrightarrow A_i \xrightarrow{\Phi_i} A'_i \oplus B_i \xrightarrow{\Psi_i} B'_i \xrightarrow{\Gamma_i} A_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

- 3 设 A, B 是 n 维球面 S^n 的两个道路连通的开集, $n > 1$ 且 $A \cup B = S^n$. 试利用 0 维同调群证明: A 与 B 的交 $A \cap B$ 是道路连通的.
- 4 试利用 Mayer-Vietoris 序列证明

$$H_q(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, \\ \mathbb{Z} & q = 1, \\ 0 & q > 1. \end{cases}$$

- 5 记 $i_1 : S^1 \rightarrow S^1 \times I, i_2 : S^1 \rightarrow S^1 \times I$ 分别为将 S^1 嵌入到 $S^1 \times I$ 的底部圆和顶部圆的映射, 证明

$$i_{1*} = i_{2*} : H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^1 \times I).$$

- 6 如例 2, 例 4, 将环面 T^2 分成 $X_1 \cup X_2$ (见图 3.14)

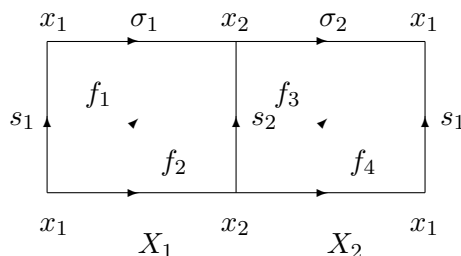


图 3.14

- (a) 试证明在 $H_1(X_1)$ 和 $H_1(X_2)$ 中都有 $[s_1] = [s_2]$.
- (b) 记 $f_1, -, f_4$ 为按箭头方向将 2 维标准单形 Δ^2 映射到 T^2 的 4 个映射, 证明: $f_1 - f_2 + f_3 - f_4$ 是 $S_2(T^2)$ 中的一个 2 维闭链.
- (c) 利用 Mayer-Vietoris 序列证明: $[f_1 - f_2 + f_3 - f_4]$ 是 $H_2(T^2)$ 的生成元.

- 7 求Klein瓶 K 的同调群 $H_q(K)$.
- 8 设 M, N 是两个紧致无边的 n 维流形, 分别从 M, N 中挖去球体 $B_1 \subset M, B_2 \subset N$ 的内部, 再沿同胚的球体的边界 $\partial B_1 \cong \partial B_2$ 将两个流形粘和在一起得到的闭流形称为 M 与 N 的连通和, 记为 $M \sharp N$.
 - 1) 求两个环面连通和的同调群 $H_q(T^2 \sharp T^2)$.
 - 2) 求一个环面与一个Klein瓶的连通和的同调群。
 - 3) 求两个Klein瓶的连通和的同调群.

§3.7 同调群的应用

在知道了奇异同调群的概念和性质之后, 我们来看同调群的应用.

我们知道 n 维球面的同调群 $H_q(S^n)$ 在 $q = 0, n$ 时是 $\mathbb{Z}$, 在其他情况下都是0.

例1 $n \neq m$ 时 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 不与 m 维欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 同胚.

这是因为, 如果同胚, 设 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的同胚映射并且设 $f(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m$. 则

$$f : \mathbb{R}^n - \{0\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m - \{x_0\}$$

也是同胚映射, 它导出各维同调群的同构映射

$$f_* : H_q(\mathbb{R} - \{0\}) \xrightarrow{\cong} H_q(\mathbb{R}^m - \{x_0\}).$$

但是 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 同伦等价与 S^{n-1} , 而 $\mathbb{R}^m - \{x_0\}$ 同伦等价与 S^{m-1} . 因而 $H_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) = \mathbb{Z}$ 而 $H_{n-1}(\mathbb{R}^m - \{x_0\}) = 0$, 矛盾.

对于球面到自身的映射 $f : S^n \rightarrow S^n$ (其中 $n > 0$). 显然当 $q \neq 0, n$ 时

$$f_* : H_q(S^n) \xrightarrow{\cong} H_q(S^n) = 0$$

都是同构, 而在0维同调群 $f_* : H_0(S^n) \xrightarrow{\cong} H_0(S^n)$ 也是同构. 唯一会有变化的是导出的 n 维同调群的同态

$$f_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n) = \mathbb{Z}.$$

定义3.7.1 设 $[a]$ 是 $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ 的生成元, $f : S^n \rightarrow S^n$ 是一个映射. 则存在整数 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$f_*([a]) = k[a] \in H_n(S^n).$$

k 称为映射 $f : S^n \rightarrow S^n$ 的映射度, 记为 $\deg(f) = k$.

显然映射度有以下简单的性质

性质3.7.1

- (1) 单位映射 $1 : S^n \rightarrow S^n$ 的映射度 $\deg(1) = 1$.
- (2) 如果 $f \simeq g : S^n \rightarrow S^n$, 则他们的映射度相等 $\deg(f) = \deg(g)$.
- (3) 如果 $f : S^n \xrightarrow{\cong} S^n$ 是 S^n 到自身的同伦等价, 则 $\deg(f) = \pm 1$.
- (4) 常值映射 $C_{x_0} : S^n \rightarrow S^n$ 映射度 $\deg(C_{x_0}) = 0$.

证明: (1), (2), (3)都是显然的.

(4) 设 $a = \sum_i k_i \sigma_i$ 是一个 n 维闭链, 它代表的同调类 $[a]$ 是 $H_n(S^n)$ 的生成元.

记 $\sigma_{x_0} : \Delta^n \rightarrow S^n$ 为 n 维标准单形到球面的常值映射, 则对于常值映射 C_{x_0}

$$C_{x_0*} \left(\sum_i k_i \sigma_i \right) = \sum_i k_i (C_{x_0} \cdot \sigma_i) = \left(\sum_i k_i \right) \sigma_{x_0}.$$

在 n 是奇数时常值映射 σ_{x_0} 是一个上边缘, 在 n 是偶数是 $\sum_i k_i = 0$. 因

$$\text{而 } C_{x_0*}([a]) = \left[\left(\sum_i k_i \right) \sigma_{x_0} \right] = 0.$$

例2 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ 为单位圆, 两个映射 $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ 分别定义为 $f(x, y) = (-x, -y)$, $g(x, y) = (-x, y)$. 则 f 的映射度为1, 而 g 的映射度为-1.

有从单位映射1到 f 的同伦等价 $H : S^1 \times I \rightarrow S^1$

$$H((x, y), t) = (x, y) \begin{pmatrix} \cos \pi t & \sin \pi t \\ -\sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix}$$

因而 $\deg(f) = \deg(1) = 1$.

$H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, 选 $H_1(S^1)$ 的生成元为 $[\sigma_1 + \sigma_2]$, 其中 $\sigma_1 : \Delta^1 \rightarrow S^1$ 为沿上半圆从 $(1, 0)$ 到 $(-1, 0)$ 的道路, $\sigma_2 : \Delta^1 \rightarrow S^1$ 为沿下半圆从 $(-1, 0)$ 返回 $(1, 0)$ 的道路 (见图3.15).

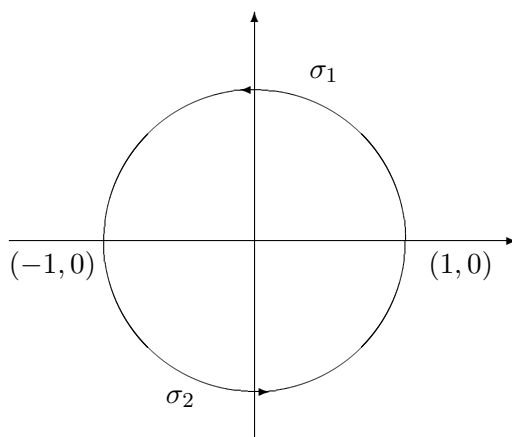


图3.15

容易看出 $g \cdot \sigma_1 = \sigma_2^{-1}$ 为 σ_2 的逆道路, $f \cdot \sigma_2 = \sigma_1^{-1}$ 为 σ_1 的逆道路. 因而

$$f_*([\sigma_1 + \sigma_2]) = [\sigma_2^{-1} + \sigma_1^{-1}] = [-\sigma_2 - \sigma_1]$$

f 的映射度为-1.

命题3.7.2 球面的双角锥 $\Sigma S^n = S^n \times [-1, 1] / (S^n \times \{-1\}, S^n \times \{1\})$ 同胚与 $n+1$ 维球面. 对于映射 $f : S^n \rightarrow S^n$, 其双角锥映射 $\Sigma f : \Sigma S^n \rightarrow \Sigma S^n$ 定义为: 对于 ΣS^n 上的点 $[(x_0, x_1, \dots, x_n), t]$, 其中 $[(x_0, x_1, \dots, x_n), t]$ 为 $S^n \times [-1, 1]$ 中点 $((x_0, x_1, \dots, x_n), t)$ 在商空间 ΣS^n 中的等价类,

$$\Sigma f([(x_0, x_1, \dots, x_n), t]) = [f(x_0, x_1, \dots, x_n), t].$$

如果 f 的映射度 $\deg(f) = k$, 则 $\Sigma f : \Sigma S^n \rightarrow \Sigma S^n \cong S^{n+1}$ 的映射度也是 k .

证明: 记双角锥 ΣS^n 的上、下锥为 CS_+^n 和 CS_-^n . 则 $(\Sigma S^n, CS_+^n, CS_-^n)$ 为正合三元组且 $CS_+^n \cap CS_-^n = S^n$.

$$\Sigma f : (\Sigma S^n, CS_+^n, CS_-^n) \longrightarrow (\Sigma S^n, CS_+^n, CS_-^n)$$

是正合三元组的映射且 $\Sigma f|_{S^n} = f : S^n \rightarrow S^n$, 它导出 Mayer-Vietoris 序列的同态交换图

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(\Sigma S^n) & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & H_n(S^n) & \xrightarrow{(i_1, i_2)} & H_n(CS_+^n) \oplus H_n(CS_-^n) \longrightarrow \cdots \\ & & \Sigma f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(\Sigma S^n) & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & H_n(S^n) & \xrightarrow{(i_1, i_2)} & H_n(CS_+^n) \oplus H_n(CS_-^n) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

设 $[a_{n+1}]$ 是 $H_{n+1}(\Sigma S^n)$ 的生成元, 满足 $\varphi([a_{n+1}]) = [a]$ 是 $H_n(S^n)$ 的生成元, 则

$$\varphi \cdot \Sigma f_*([a_{n+1}]) = f_* \cdot \varphi([a_{n+1}]) = k[a] = k\varphi([a_{n+1}])$$

Σf 的映射度也为 k .

例3 球面到自身的反射映射 $f_n(x_0, x_1, \cdots, x_n) = (-x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 的映射度为 -1 . 对径映射 $g(x_0, x_1, \cdots, x_n) = (-x_0, -x_1, \cdots, -x_n)$ 的映射度为 $(-1)^{n+1}$.

从 S^{n+1} 到 ΣS^n 有同胚映射 $\psi : S^{n+1} \rightarrow \Sigma S^n$

$$\psi(x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = \left[\frac{(x_0, x_1, \cdots, x_n)}{\sqrt{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}}, x_{n+1} \right]$$

当 $x_0 = x_1 = \cdots = x_n = 0$ 时取 $\frac{(x_0 + x_1 + \cdots + x_n)}{\sqrt{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}} = (0, 0, \cdots, 1)$.

例2中已经证明: 当 $n = 1$ 时 $f_1(x_0, x_1) = (-x_0, x_1)$ 的映射度是 -1 . 归纳假设 f_n 的映射度为 -1 , 则由交换图

$$\begin{array}{ccc} S^{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & S^{n+1} \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \Sigma S^n & \xrightarrow{\Sigma f_n} & \Sigma S^n \end{array}$$

知 $f_{n+1} = \psi^{-1} \cdot \Sigma f_n \cdot \psi$ 的映射度等于 Σf_n 的映射度, 等于 -1 .

对于偶数维球面 S^{2n} , 有从反射映射到对径映射的同伦等价 $H : S^{2n} \times I \rightarrow S^{2n}$,

$$\begin{aligned} & H((x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1}, x_{2n}), t) \\ &= \left(-x_0, (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \cos \pi t & \sin \pi t \\ -\sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix}, \cdots, (x_{2n-1}, x_{2n}) \begin{pmatrix} \cos \pi t & \sin \pi t \\ -\sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

容易看出对于奇数维球面, 有从单位映射到对径映射的同伦等价. 因而对径映射的映射度为 $(-1)^{n+1}$.

在生活中人们总说: 地球上一定有一点没有风, 人的头上都长“旋”. 一个毛球上的绒毛总是理不顺的. 其实这些说的都是:

定理3.7.3 2维球面上不存在处处非平凡的切向量场

证明: 设 S^2 为3维空间中的单位球面, 如果 S^2 上有处处非平凡的切向量场, 即存在处处非零的连续函数 $\nu : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 使得对任何 $(x, y, z) \in S^2$, $\nu(x, y, z)$ 与 (x, y, z) 正交. 在此可以通过对 $\nu(x, y, z)$ 单位化假设 $\nu(x, y, z)$ 是单

位向量. $\nu(x, y, z)$ 可以看成是 S^2 上的一点, $\nu : S^2 \rightarrow S^2$ 是连续映射. 由于 $\nu(x, y, z)$ 与 (x, y, z) 正交, 它即不是 (x, y, z) 的对径点也不是 $(-x, -y, -z)$ 的对径点.

有从单位映射 1 到 ν 的同伦等价 $H : S^2 \times I \rightarrow S^2$

$$H((x, y, z), t) = \frac{(1-t)(x, y, z) + t\nu(x, y, z)}{\|(1-t)(x, y, z) + t\nu(x, y, z)\|}$$

同时有从 ν 到对径映射的同伦等价 G

$$G((x, y, z), t) = \frac{(1-t)\nu(x, y, z) + t(-x, -y, -z)}{\|(1-t)\nu(x, y, z) + t(-x, -y, -z)\|}$$

因而 S^2 上的单位映射与对径映射同伦等价. 但 S^2 上对径映射的映射度为 -1 , 矛盾.

仿照定理 3.7.3 的证明, 读者可以自行证明: 任何偶数维球面上都不存在处处非零的切向量场. 同样, 读者也可以作出奇数维球面上处处非零的切向量场 $\nu : S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}$ 使得 $\nu(x)$ 与 x 正交. 一个更难的问题是奇数维球面上最大能有几个两两正交的非零切向量场?

§3.7 习题

- 1 证明: 对任何拓扑空间 X ,
 - 1) 当 n 是奇数时, n 维常值奇异单形 $\sigma_{x_0} : \Delta^n \rightarrow X$ 是一个上边缘.
 - 2) 当 n 是偶数时, n 维常值奇异单形 $\sigma_{x_0} : \Delta^n \rightarrow X$ 不是上闭链.
 因而性质 3.7.1 (4) 成立.
- 2 证明: n 维球面 S^n 不是 $n+1$ 维实球体 D^{n+1} 的收缩核.
- 3 证明高维的 Brouwer 不动点定理, 即: 任何 D^n 到自身的映射一定有不动点.
- 4 设 f, g 都是球面 S^n 到自身的映射, 证明: $\deg(f \cdot g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.
- 5 n 维球面 S^n 可以被分成上、下两个半球 E_+^n, E_-^n , 而上、下两个半球都同胚与 n 维标准单形 Δ^n . 令

$$\sigma_1 : \Delta^n \rightarrow E_+^n \hookrightarrow S^n \quad \sigma_2 : \Delta^n \rightarrow E_-^n \hookrightarrow S^n$$

为自然的同胚映射. 由于 Δ^n 的边界

$$\partial(\Delta^n) \cong S^{n-1} \cong E_+^n \cap E_-^n$$

$\partial_n(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$, $\sigma_1 - \sigma_2 \in S_n(S^n)$ 是一个 n 维闭链.

- 1) 证明: $[\sigma_1 - \sigma_2]$ 是 $H_n(S^n)$ 的生成元.
- 2) 证明: 反射映射 $f(x_0, x_1, \dots, x_n) = (-x_0, x_1, \dots, x_n)$ 的映射度为 -1 .
- 6 设 $h : S^n \rightarrow S^n$ 没有不动点, 证明: h 的映射度等于 $(-1)^n$ (h 同伦等价与对径映射).
- 7 证明: 偶数维球面 S^{2n} 上都不存在处处非零的切向量场.
- 8 试构造奇数维球面 S^{2n+1} 上的一个处处非零的切向量场.
- 9 试构造 S^3 上的三个两两正交的非零切向量场

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3 : S^3 \rightarrow S^3$$

使得对任何 $x \in S^3$, $x, \nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x)$ 两两正交.

第四章 一般系数同调群

§4.1 链复形及其同调群

在第三章 奇异同调群中, 定义奇异同调群的关键是对任何拓扑空间 X 找到一簇交换群 $S_q(X)$ 和群同态 $\partial_q : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$ 满足 $\partial_q \partial_{q-1} = 0$. 这样拓扑空间的同调群 $H_q(X) = \text{Ker} \partial_q / \text{Im} \partial_{q+1}$. 将它们抽象出来就是链复形与上链复形的概念.

为统一记号, 在以下几章中我们总假定 R 是一个交换幺环, 比如 $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/m$ 等. 首先我们来复习一下抽象代数中关于模的一些基本概念和结论.

定义4.1.1 设 R 是一个交换幺环, M 是一个 Abel 群. 如果存在映射 $\varphi : R \times M \rightarrow M$ (对于 $r \in R, a \in M, \varphi(r, a)$ 记为 $r \cdot a$ 称为数乘) 使得对任何 $r_1, r_2 \in R, a, b \in M$ 满足:

- 1), $(r_1 + r_2) \cdot a = r_1 \cdot a + r_2 \cdot a$,
- 2), $(r_1 r_2) \cdot a = r_1 \cdot (r_2 \cdot a)$,
- 3), $r \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b$,
- 4), $1 \cdot a = a$

则称 M 是一个 R 模.

回忆高等代数里线性空间 V 的概念我们会注意到: 线性空间的定义中的前4条是在讲 V 是一个 Abel 群, 而后4条实际就是模的概念中的1-4条. 因而: 当环 R 是域时, 域 R 上的模就是域 R 上的线性空间.

例1 设 M 是一个 Abel 群. 自然地定义数乘 $\varphi : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$ 为: 对于 $n \in \mathbb{Z}, a \in M$

- 1, 当 $n > 0$ 时 $n \cdot a = a + a + \cdots + a$ 为 n 个 a 的和,
- 2, 当 $n < 0$ 时 $n \cdot a = -a - a - \cdots - a$.

因而任何 Abel 群都有自然的 $\mathbb{Z}$ 模结构.

约定: 交换幺环 R 由加法结构给出自然的 $\mathbb{Z}$ 模结构.

同时我们也应当注意到: 对于一般的环 R , 一般的 Abel 群 M 不一定有 R 模结构. 比如: $\mathbb{Z}$ 上就没有 $\mathbb{Z}/2$ 模结构.

定义4.1.2 设 R 是一个交换幺环, $\{C_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ 是一簇 R 模. 如果对每个 $q \in \mathbb{Z}$ 都有 R -模同态 $\partial_q : C_q \rightarrow C_{q-1}$ 使得 $\partial_q \cdot \partial_{q+1} = 0$, 则称 $\{C_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ 连同模同态 ∂_q 为一个链复形, 记为 $C = \{C_q, \partial_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$;

$$C : \cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} \longrightarrow \cdots$$

如果同态映射的方向相反, 即 $\delta_q : C_q \rightarrow C_{q+1}$ 且满足 $\delta_q \cdot \delta_{q-1} = 0$, 则称 $C = \{C_q, \delta_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ 为一个上链复形.

$$C : \cdots \longleftarrow C_{q+1} \xleftarrow{\delta_{q+1}} C_q \xleftarrow{\delta_q} C_{q-1} \longleftarrow \cdots \longleftarrow C_1 \xleftarrow{\delta_1} C_0 \xleftarrow{\delta_0} C_{-1} \longleftarrow \cdots$$

一般情况下我们总假定当 $i < 0$ 时 $C_i = 0$, 这样的(上)链复形又称为连通的(上)链复形.

链复形和上链复形的性质基本是一致的, 所不同的只是映射的方向. 在本章中我们只讨论链复形. 请读者自己补上上链复形相应的结论.

定义4.1.3 设 $C = \{C_q, \partial_q\}$ 是一个链复形

$$C : \cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_q} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} \longrightarrow \cdots$$

定义 C_q 的子群

$\mathbb{Z}_q(C) = \text{Ker} \partial_q$ 为链复形 C 的 q 维闭链群.

$\mathbb{B}_q(C) = \text{Im} \partial_{q+1}$ 为链复形 C 的 q 维边缘链群.

定义商群 $H_q(C) = \mathbb{Z}_q(C) / \mathbb{B}_q(C)$ 为链复形 C 的 q 维同调群.

$\mathbb{Z}_q(C)$ 中的一个元素 z 称为链复形 C 中的一个闭链, 它满足 $\partial_q(z) = 0$, $\mathbb{B}_q(C)$ 中的一个元素 b 称为链复形 C 的一个边缘, 它是 C_{q+1} 中某个元素 x 在边缘同态下的像 $b = \partial_{q+1}(x)$. 同调群 $H_q(C)$ 当中的元素 $[z]$ 是一个等价类, 称为同调类, z 是这个同调类其中的一个代表元. 当两个闭链 z, z' 相差一个边缘时即: $z - z' = \partial_{q+1}(x)$ 时称这两个闭链 z 与 z' 是同调的, 此时等价类 $[z] = [z']$.

例2 拓扑空间 X 的奇异链群 $S_q(X) = \{\sum_i k_i \sigma_i | k_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i : \Delta^q \rightarrow X\}$ 连同边缘同态 $\partial_q : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$ 构成一个链复形, 记为 $S(X) = \{S_q(X), \partial_q\}$, 称为拓扑空间 X 的奇异链复形. $S(X)$ 的同调群即 X 的(整系数非约化)奇异同调群.

定义4.1.4 设 $C = \{C_q, \partial_q\}$, $D = \{D_q, \partial'_q\}$ 是环 R 上的两个链复形. 如果对每个 $q \in \mathbb{Z}$ 都存在 R 模同态 $f_q : C_q \rightarrow D_q$, 它们满足 $\partial'_q \cdot f_q = f_{q-1} \cdot \partial_q$, 则称 $f = \{f_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ 为链复形 C 到 D 的一个链映射, 记为 $f : C \rightarrow D$, 即有以下同态的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_{q+1} & & \downarrow f_q & & \downarrow f_{q-1} & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\ \cdots & \longrightarrow & D_{q+1} & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & D_q & \xrightarrow{\partial'_q} & D_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_1 \xrightarrow{\partial'_1} D_0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

引理4.1.1 链映射 $f : C \rightarrow D$ 导出闭链群, 边缘链群的同态

$$f_{\#} : \mathbb{Z}_q(C) \rightarrow \mathbb{Z}_q(D), \quad f_{\#} : \mathbb{B}_q(C) \rightarrow \mathbb{B}_q(D)$$

和同调群的同态 $f_* : H_q(C) \rightarrow H_q(D)$.

证明: 由 $\partial'_q \cdot f_q = f_{q-1} \cdot \partial_q$ 易知 $f_q(\mathbb{Z}_q(C)) \subset \mathbb{Z}_q(D)$, $f_q(\mathbb{B}_q(C)) \subset \mathbb{B}_q(D)$. 闭链群, 边缘链群同态 $f_{\#}$ 为 f_q 分别在闭链群, 边缘链群 $\mathbb{Z}_q(C)$, $\mathbb{B}_q(C)$ 上的限制. 而同调群同态 $f_* : H_q(C) \rightarrow H_q(D)$ 为 $f_{\#}$ 导出的商群同态, 即: 对于 $H_q(C)$ 的同调类 $[z]$, $f_*([z]) = [f_{\#}(z)]$

引理4.1.2 如果 $f : C \rightarrow D$, $g : D \rightarrow E$ 都是链映射, 则 $g \cdot f = \{g_q \cdot f_q\}_{q \in \mathbb{Z}} : C \rightarrow E$ 也是链映射. 导出的同调群的同态满足 $(g \cdot f)_* = g_* \cdot f_*$, 即有同

调群同态交换图

$$\begin{array}{ccc} H_q(C) & \xrightarrow{f_*} & H_q(D) \\ & \searrow (g \cdot f)_* & \downarrow g_* \\ & & H_q(E). \end{array}$$

定义4.1.5 设 $f, g : C \rightarrow D$ 都是从 C 到 D 的链映射, 如果存在一族同态 $H = \{H_q : C_q \rightarrow D_{q+1}\}_{q \in \mathbb{Z}}$ 使得对任何 $q \in \mathbb{Z}$

$$f_q - g_q = \partial_{q+1} \cdot H_q + H_{q-1} \cdot \partial_q,$$

则称链映射 f 链同伦与 g , 记为 $f \stackrel{H}{\simeq} g$, 即有如下的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{q+1} - g_{q+1} & \nearrow H_q & \downarrow f_q - g_q & \nearrow H_{q-1} & \downarrow f_{q-1} - g_{q-1} \\ \cdots & \longrightarrow & D_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & D_q & \xrightarrow{\partial_q} & D_{q-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

对于链复形 C, D 如果存在链映射 $f : C \rightarrow D$ 和 $g : D \rightarrow C$ 使得 $g \cdot f \stackrel{H}{\simeq} 1_C$, $f \cdot g \stackrel{G}{\simeq} 1_D$

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & D \\ & \searrow \simeq 1_C & \downarrow g \\ & & C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{g} & C \\ & \searrow \simeq 1_D & \downarrow f \\ & & D \end{array}$$

则称链复形 C 与 D 是同伦等价的, 记为 $f : C \xrightarrow{\simeq} D$.

引理4.1.3 对于链复形 C, D

- (1) 如果 $f \stackrel{H}{\simeq} g : C \rightarrow D$ 是链同伦的两个链映射, 则它们导出的同调群的同态相同 $f_* = g_* : H_q(C) \rightarrow H_q(D)$.
- (2) 如果 $f : C \xrightarrow{\simeq} D$ 是链同伦等价的两个链复形, 则它们的同调群同构 $f_* : H_q(C) \xrightarrow{\simeq} H_q(D)$ 且 f 导出同调群的同构映射.

证明 (1) 如果 $f \stackrel{H}{\simeq} g : C \rightarrow D$ 是链同伦的两个链映射. 对任何同调类 $[z] \in H_q(C)$, 由定义知

$$\begin{aligned} f_*([z]) - g_*([z]) &= [f_q(z) - g_q(z)] = [(f_q - g_q)(z)] \\ &= [H_{q-1}\partial_q(z) + \partial_{q+1}H_q(z)] = [\partial_{q+1}H_q(z)] = 0, \end{aligned}$$

其中由于 z 是闭链, $\partial_q(z) = 0$, $f_q(z) - g_q(z)$ 是一个边缘.

(2) 设 $f : C \xrightarrow{\cong} D$ 的链同伦逆为 $g : D \rightarrow C$, 即 $g \cdot f \xrightarrow{H} id_C$, $f \cdot g \xrightarrow{G} id_D$. 则 $g_* \cdot f_* = 1$, $f_* \cdot g_* = 1$

$$\begin{array}{ccc} H_q(C) & \xrightarrow{f_*} & H_q(D) \\ & \searrow 1 & \downarrow g_* \\ & & H_q(C) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H_q(D) & \xrightarrow{g_*} & H_q(C) \\ & \searrow 1 & \downarrow f_* \\ & & H_q(D), \end{array}$$

$f_* : H_q(C) \xrightarrow{\cong} H_q(D)$ 是同构.

例3 设 $S(X) = \{S_q(X), \partial_q\}$, $S(Y) = \{S_q(Y), \partial_q\}$ 分别是拓扑空间 X, Y 的奇异链复形. 如 $f : X \rightarrow Y$ 是连续映射, 则 f 导出链映射 $f_{\#} : S(X) \rightarrow S(Y)$. 而链映射 $f_{\#}$ 诱导出同调群的同态 $f_* : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$.

如果 $f \xrightarrow{F} g : X \rightarrow Y$ 是同伦等价的两个映射. 通过伦移 $G : X \times I \rightarrow Y$ 作出了 $f_{\#}$ 到 $g_{\#}$ 的链同伦 $f_{\#} \xrightarrow{H} g_{\#}$, $H = \{H_q : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(Y)\}$. 因而 $f_* = g_* : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$.

更进一步, 如果 $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ 是空间的同伦等价映射, $g : Y \rightarrow X$ 是 f 的同伦逆映射. 则 f 导出同调群的同构 $f_* : H_q(X) \xrightarrow{\cong} H_q(Y)$.

定义4.1.5 设 C, D, E 是三个链复形, $f : C \rightarrow D$, $g : D \rightarrow E$ 是链映射. 称

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

为链复形的短正合序列, 如果对任何 $q \in \mathbb{Z}$

$$0 \longrightarrow C_q \xrightarrow{f_q} D_q \xrightarrow{g_q} E_q \longrightarrow 0$$

都是 R -模的短正合序列, 即有以下的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{f_{q+1}} & D_{q+1} & \xrightarrow{g_{q+1}} & E_{q+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \partial''_{q+1} \downarrow & & \partial_{q+1} \downarrow & & \partial'_{q+1} \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C_q & \xrightarrow{f_q} & D_q & \xrightarrow{g_q} & E_q \longrightarrow 0 \\
 & & \partial''_q \downarrow & & \partial_q \downarrow & & \partial'_q \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C_{q-1} & \xrightarrow{f_{q-1}} & D_{q-1} & \xrightarrow{g_{q-1}} & E_{q-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \partial''_{q-1} \downarrow & & \partial_{q-1} \downarrow & & \partial'_{q-1} \downarrow \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 0 & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{f_1} & D_1 & \xrightarrow{g_1} & E_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \partial''_1 \downarrow & & \partial_1 \downarrow & & \partial'_1 \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C_0 & \xrightarrow{f_0} & D_0 & \xrightarrow{g_0} & E_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

使其中的每一行都是正合序列.

引理4.1.4 链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

导出同调群的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_q(C) \xrightarrow{f_*} H_q(D) \xrightarrow{g_*} H_q(E) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(C) \longrightarrow \cdots$$

证明: 这个引理的证明很长, 证明的方法被称为“追图法”, 即根据交换图追到你想要的结果. 在此, 只给出联系同态 $\partial: H_q(E) \rightarrow H_{q-1}(C)$ 的构造办法, 其余部分请读者自行证明.

对于 $H_q(E)$ 中的任何一个同调类 $[e_q]$, 其中 $e_q \in E_q$ 是一个闭链. 这时你的任务是从 E_q 中的元素 e_q , 按照交换图追到 C_{q-1} 当中的闭链 c_{q-1} .

首先, 由于 $g_q: D_q \rightarrow E_q$ 是满射, 我们可以找到 D_q 中的元素 $d_q \in D_q$ 使得 $g_q(d_q) = e_q$ (先追到了 D_q). 将 D_q 中的元素 d_q 用边缘同态映到 D_{q-1} , 此时还看不出 $\partial_q(d_q)$ 在 D_{q-1} 中有什么特点. 再将 $\partial_q(d_q)$ 通过 g_{q-1} 映射到 E_{q-1} 中, 会发现: 由于图表可换

$$g_{q-1}(\partial_q(d_q)) = \partial'_q \cdot g_q(d_q) = \partial'_q(e_q) = 0.$$

因而 $\partial_q(d_q)$ 在同态 g_{q-1} 的核里. 而序列在 D_n 处正合, $\text{Ker}g_{q-1} = \text{Im}f_{q-1}$, $\partial_q(d_q)$ 也在 f_{q-1} 的像里, 因而存在 $c_{q-1} \in C_q$ 使得 $f_{q-1}(c_{q-1}) = \partial_q(d_q)$. 这样我们就追到了 C_{q-1} 中的元素 c_{q-1} . 以下:

- 1), 证明 c_{q-1} 是 C_{q-1} 中的闭链并定义 $\partial([z]) = [c_{q-1}]$ 为 c_{q-1} 所代表的等价类.
- 2), 证明 c_{q-1} 所代表的等价类 $[c_{q-1}]$ 与元素 d_q 的选取无关.
- 3), 证明 $[c_{q-1}]$ 与同调类 $[e_q]$ 中代表元 e_q 的选取无关, 因而这个定义是合理的.
- 4), 完成序列在各处都正合的证明.

例4 设 (X, A) 是一对空间偶, 相对奇异链群 $S_q(X, A) = S_q(X)/S_q(A)$. 因有链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow S(A) \xrightarrow{i} S(X) \xrightarrow{j} S(X, A) \longrightarrow 0,$$

它导出同调群的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{i} H_q(X) \xrightarrow{j} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

例5 设 $x_0 \in A \subset X$ 是 X 的基点. 相对链复形 $S(X, x_0) = \{S_q(X)/S_q(x_0), \partial_q\}$ 的同调群称为 X 的约化同调群, 记为 $\tilde{H}_q(X)$

$$\tilde{H}_q(X) = H_q(S(X, x_0)) = H_q(X, x_0).$$

容易验证, $H_0(X) = \tilde{H}_0 \oplus \mathbb{Z}$, 而当 $q > 0$ 时 $\tilde{H}_q(X) \cong H_q(X)$.
由链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow S(A, x_0) \xrightarrow{i} S(X, x_0) \xrightarrow{j} S(X, A) \longrightarrow 0$$

导出约化同调群的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_q(A) \xrightarrow{i} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{j} H_q(X, A) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{q-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

在本节的最后我们用链复形, 链映射, 链同伦的语言给出Mayer-Vietoris序列和切除定理一个证明.

设 X_1, X_2 是 X 的两个开子集满足 $X_1 \cup X_2 = X$ 并且记 $X_1 \cap X_2 = V$. 令

$$S_q(X_1) + S_q(X_2) = \left\{ \sum_i k_i \sigma_i \mid k_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i(\Delta^q) \subset X_1 \text{ 或 } \sigma_i(\Delta^q) \subset X_2 \right\}$$

为 X_1 及 X_2 中的奇异单形生成的自由Abel群, 即要求奇异单形 $\sigma_i: \Delta^q \rightarrow X$ 或者完全映射到 X_1 中, 或者完全映射到 X_2 中. 链复形 $S(X_i)$ 的边缘同态 ∂_q 诱导出边缘同态

$$\partial_q: S_q(X_1) + S_q(X_2) \longrightarrow S_{q-1}(X_1) + S_{q-1}(X)$$

使得 $S(X_1) + S(X_2) = \{S_q(X_1) + S_q(X_2), \partial_q\}$ 构成一个链复形, 并且有自然链映射

$$\begin{aligned} i_1 : S(X_1) &\longrightarrow S(X_1) + S(X_2), & i_2 : S(X_2) &\longrightarrow S(X_1) + S(X_2) \\ j_1 : S(V) &\longrightarrow S(X_1), & j_2 : S(V) &\longrightarrow S(X_2) \\ i : S(X_1) + S(X_2) &\longrightarrow S(X). \end{aligned}$$

令

$$S_q(X_1) \oplus S_q(X_2) = \{(x_1, x_2) | \text{其中 } x_1 \in S_q(X_1), x_2 \in S_q(X_2)\}$$

为链群 $S_q(X_1)$ 与 $S_q(X_2)$ 的直和, $S_q(X_1) \oplus S_q(X_2)$ 中的元素可以记为 (x_1, x_2) . 定义边缘同态 $\partial_q : S_q(X_1) \oplus S_q(X_2) \rightarrow S_{q-1}(X_1) \oplus S_{q-1}(X_2)$ 为: 对任何 $(x_1, x_2) \in S_q(X_1) \oplus S_q(X_2)$

$$\partial_q(x_1, x_2) = (\partial_q(x_1), \partial_q(x_2)).$$

显然 $S(X_1) \oplus S(X_2) = \{S_q(X_1) \oplus S_q(X_2), \partial_q\}$ 构成一个链复形且

$$H_q(S(X_1) \oplus S(X_2)) = H_q(X_1) \oplus H_q(X_2).$$

定义链映射 $i_1 - i_2 : S(X_1) \oplus S(X_2) \rightarrow S(X_1) + S(X_2)$ 为: 对 $(x_1, x_2) \in S_n(X_1) \oplus S_n(X_2)$, $(i_1 - i_2)(x_1, x_2) = i_1(x_1) - i_2(x_2)$. 容易看出: 如果

$$(i_1 - i_2)(x_1, x_2) = i_1(x_1) - i_2(x_2) = 0$$

则 $x_1 = x_2$. 而由 $x_1 \in S_q(X_1)$ 且 $x_2 \in S_q(X_2)$ 知

$$x_1 \in S_q(X_1) \cap S_q(X_2) = S_q(X_1 \cap X_2) = S_q(V)$$

即 $i_1 - i_2$ 的核为

$$S_q(V) = \{(x_1, x_1) | x_1 \in S_q(V)\}.$$

由此得到链复形的短正合序列

$$(4.1) \quad 0 \longrightarrow S(V) \xrightarrow{(j_1, j_2)} S(X_1) \oplus S(X_2) \xrightarrow{i_1 - i_2} S(X_1) + S(X_2) \longrightarrow 0.$$

定理 4.1.5 $i : S(X_1) + S(X_2) \xrightarrow{\cong} S(X)$ 导出同调群的同构, 因而 (4.1) 导出长正合序列 (Mayer-Vietoris 序列).

$$\cdots \longrightarrow H_q(V) \xrightarrow{(j_1, j_2)} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{i_1 - i_2} H_q(X) \xrightarrow{\varphi} H_{q-1}(V) \longrightarrow \cdots$$

证明 切除定理证明的主要思路是: 构造了重心重分链映射 $Sd : S(X) \rightarrow S(X)$ 使得 Sd 与单位映射链同伦等价. 重心重分链映射满足: 任何奇异单形 $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ 可经过有限次重心重分 Sd^r 使得 $Sd^r(\sigma) = \sum k_i \sigma_i$ 中的每个奇异单形 $\sigma_i : \Delta^q \rightarrow X$ 或者 $\sigma_i(\Delta^q) \subset X_1$ 或者 $\sigma_i(\Delta^q) \subset X_2$.

下面我们利用这一结果证明 i 导出的同调群同态 $i_* : H_q(S(X_1) + S(X_2)) \rightarrow H_q(X)$ 即是单射又是满射.

对于 $H_q(X)$ 中任何同调类 $[z]$, 其代表元 $z = \sum k_i \sigma_i$. 由于是有限个奇异单形的线性组合, 存在 r 使得 $z' = Sd^r(z) = \sum k_i Sd^r(\sigma_i) = \sum m_j \sigma'_j$ 中每个奇异

单形 σ'_j 满足 $\sigma'_j(\Delta^q) \subset X_1$ 或 $\sigma'_j(\Delta^q) \subset X_2$. 由 $Sd \stackrel{H}{\simeq} 1$:知

$$\begin{aligned} 1 - Sd &= \partial_{q+1} \cdot H_q + H_{q-1} \cdot \partial_q \\ Sd - Sd^2 &= \partial_{q+1} \cdot SdH_q + SdH_{q-1} \cdot \partial_q \\ &\vdots \\ Sd^{r-1} - Sd^r &= \partial_{q+1} \cdot Sd^{r-1}H_q + Sd^{r-1}H_{q-1} \cdot \partial_q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z - z' &= (1 - Sd^r)(z) = \partial_{q+1}(H_q + SdH_q + \cdots + Sd^{r-1}H_q)(z) \\ &\quad + (H_{q-1} + SdH_{q-1} + \cdots + Sd^{r-1}H_{q-1})\partial_q(z) \\ &= \partial_{q+1}(H_q + SdH_q + \cdots + Sd^{r-1}H_q)(z) \end{aligned}$$

z 与 z' 相差一个边缘. 因而我们可以选同调类 $[z]$ 的代表元 z' , 而 $z' \in S_q(X_1) + S_q(X_2)$. 存在 $H_q(S(X_1) + S(X_2))$ 中的同调类 $[z']$ 使得 $i_*([z']) = [z'] = [z]$. i_* 是满同态.

对于 $H_q(S(X_1) + S(X_2))$ 中的同调类 $[z]$, 其代表元为 z , 如果 $i_*([z]) = 0 \in H_q(X)$; 即存在 $x = \sum k_i \tau_i \in S_{q+1}(X)$ 使得 $\partial_{q+1}(x) = z$. 注意, 此时的 $q+1$ 维奇异单形 τ_i 是 X 中的奇异单形, 不一定满足 $\tau_i(\Delta^{q+1}) \subset X_1$ 或 $\tau_i(\Delta^{q+1}) \subset X_2$. 同样存在 r 使得 $Sd^r(x) = \sum m_j \tau'_j$ 中的每个 τ'_j 或者是 X_1 中的或者是 X_2 中的 $q+1$ 维奇异单形. 这样由

$$\begin{aligned} z &= Sd^r(z) + \partial_{q+1}(H_q + SdH_q + \cdots + Sd^{r-1}H_q)(z) \\ &= Sd^r \partial_{q+1}(x) + \partial_{q+1}(H_q + SdH_q + \cdots + Sd^{r-1}H_q)(z) \\ &= \partial_{q+1}(Sd^r(x) + (H_q + SdH_q + \cdots + Sd^{r-1}H_q)(z)) \end{aligned}$$

知: z 在 $S_q(X_1) + S_q(X_2)$ 中是边缘.

注 作者曾试图证明 $i: S(X_1) + S(X_2) \xrightarrow{\simeq} S(X)$ 是链复形的链同伦等价, 并找到了链映射 $\kappa: S(X) \rightarrow S(X_1) + S(X_2)$ 使得 $\kappa \cdot i = 1$

$$\begin{array}{ccc} S(X_1) + S(X_2) & \xrightarrow{i} & S(X) \\ & \searrow 1 & \downarrow \kappa \\ & & S(X_1) + S(X_2) \end{array}$$

但找不到从链映射 $i \cdot \kappa: S(X) \rightarrow S(X)$ 到1的链同伦 $G_q: S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X)$.

在此, 读者可以证明: 如果 C, D 都是自由链复形(每个 C_q, D_q 都是自由 R -模), 链映射 $f: C \rightarrow D$ 导出同调群的同构, 则 f 是链复形的同伦等价映射.

定理4.1.6(切除定理) 设 $A \subset X$ 是拓扑空间 X 的一个开集, $V \subset A$ 是 X 的一个闭集. 则对任何 $q > 0$

$$j: H_q(X \setminus V, A \setminus V) \longrightarrow H_q(X, A)$$

是切除同构.

证明 记 $X_1 = A$, $X_2 = X \setminus V$ 。则 X_1, X_2 是 X 的两个开集且 $X_1 \cup X_2 = X$, $X_1 \cap X_2 = A \setminus V$ (见图4.1).

$$X_1 \quad A \setminus V \quad X_2$$

图4.1

考察以下链复形的短正合序列交换图和由链复形的短正合序列导出的同调群的长正合序列

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & S(X_1) & \longrightarrow & S(X_1) + S(X_2) & \longrightarrow & S(X_1) + S(X_2)/S(X_1) \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow i & & \downarrow j \\
 0 & \longrightarrow & S(X_1) & \longrightarrow & S(X) & \longrightarrow & S(X)/S(X_1) \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \\
 & & \vdots & & & & \vdots \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & H_q(X_1) & \xlongequal{\quad} & H_q(X_1) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H_q(S(X_1) + S(X_2)) & \xrightarrow{i} & H_q(X) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H_q(S(X_1) + S(X_2)/S(X_1)) & \xrightarrow{j} & H_q(X, X_1) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H_{q-1}(X_1) & \xlongequal{\quad} & H_{q-1}(X_1) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H_{q-1}(S(X_1) + S(X_2)) & \xrightarrow{i} & H_{q-1}(X) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

已知 $i : H_*(S(X_1) + S(X_2)) \longrightarrow H_*(X)$ 是同构, 由五项引理知

$$j : H_q(S(X_1) + S(X_2)/S(X_1)) \longrightarrow H_q(X, X_1)$$

是同构.

考察 q 维奇异链群 $S_q(X_1) + S_q(X_2)/S_q(X_1)$ 中的生成元; $S_q(X_1) + S_q(X_2)$ 中的奇异单形 $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ 或者全部映射到 X_1 中或者全部映射到 X_2 中, 而当 $\sigma(\Delta^q) \subset X_1$ 时在 $S_q(X_1) + S_q(X_2)/S_q(X_1)$ 中认为是零. 因此 $S_q(X_1) + S_q(X_2)/S_q(X_1)$ 的生成元只剩下全部映射到 X_2 的奇异单形 σ , 并且当 $\sigma(\Delta^q) \subset X_1 \cap X_2$ 时认为 σ 是零. 因而

$$S(X_1) + S(X_2)/S(X_1) \cong S(X_2)/S(X_1 \cap X_2) = S(X_2, X_1 \cap X_2),$$

即 $j : H_q(X_2, X_1 \cap X_2) \rightarrow H_q(X, X_1)$ 是同构. 由 $X_2 = X \setminus V$, $X_1 = A$ 且 $X_1 \cap X_2 = A \setminus V$ 知定理成立.

§4.1 习题

- 1 证明整数环 $\mathbb{Z}$ 上不会有 $\mathbb{Z}/2$ -模结构.
- 2 设 $M \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 为 $\{x, y\}$ 生成的自由Abel群, $f : M \rightarrow M$ 为

$$f(x) = x + y, \quad f(y) = x - y$$

的线性扩充. 证明: f 不是满同态, $M/\text{Im} f \cong \mathbb{Z}/2$.

- 3 设 $B \subset A$ 都是 X 的子空间, 证明有相对同调群的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_q(A, B) \xrightarrow{i} H_q(X, B) \xrightarrow{j} H_q(X, A) \xrightarrow{\delta} H_{q-1}(A, B) \longrightarrow \cdots$$

- 4 设 X_1, X_2 是 X 的开子空间, $X_1 \cup X_2 = X$ 且 $B \subset X_1 \cap X_2 = A$. 证明有相对的Mayer-Vietoris序列

$$\cdots \longrightarrow H_q(A, B) \longrightarrow H_q(X_1, B) \oplus H_q(X_2, B) \longrightarrow H_q(X, B) \longrightarrow \cdots$$

- 5 设 X_1, X_2, X_3 及 A 都是 X 的开子集满足:

- 1) $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$.
- 2) $X_i \cap X_j = A, i \neq j$
- 3) $X_1 - A, X_2 - A, X_3 - A$ 互不相交.

证明: $j_i : H_q(X_i, A) \rightarrow H_q(X, A)$ 都是单射且

$$H_q(X, A) = H_q(X_1, A) \oplus H_q(X_2, A) \oplus H_q(X_3, A).$$

- 6 完成定理4.1.4(正合序列)的证明.

§4.2 一般系数同调群

在第三章中我们讲到的奇异链复形, 奇异同调群被称作整系数非约化奇异同调群, 即系数环是整数环 $\mathbb{Z}$. 在本章中我们将整数环 $\mathbb{Z}$ 换成一般的交换幺环 R 得到一般的 R 系数非约化奇异同调群.

设 R 是一个交换幺环. 令

$$S_q(X, R) = \left\{ \sum r_i \sigma_i \mid r_i \in R, \sigma_i : \Delta^q \longrightarrow X \right\}$$

为 X 的所有 q 维奇异单形生成的自由 R 模. 定义 R 模同态 $\partial_q : S_q(X, R) \rightarrow S_{q-1}(X, R)$ 为: 对任何 q 维奇异单形 $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ 定义

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \cdot F^i$$

并在 $S_q(X, R)$ 中做线性扩充, 其中 $F^i : \Delta^{q-1} \rightarrow \Delta^q$ 为 Δ^q 的第 i 个面映射. 易证:

$$\partial_{q+1} \cdot \partial_q = 0 : \quad \begin{array}{ccc} S_{q+1}(X, R) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & S_q(X, R) \\ & \searrow 0 & \downarrow \partial_q \\ & & S_{q-1}(X, R) \end{array}$$

定义4.2.1 $S(X, R) = \{S_q(X, R), \partial_q\}_{q \geq 0}$ 是一个链复形, 称为拓扑空间 X 的 R 系数非约化奇异链复形

$$S(X, R) : \cdots \longrightarrow S_{q+1}(X, R) \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X, R) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X, R) \longrightarrow \cdots$$

$S(X, R)$ 的同调群 $H_q(S(X, R))$ 称为 X 的 q 维 R 系数非约化奇异同调群, 简记为 $H_q(X, R)$.

对于空间偶 (X, A) , 定义 $S_q(X, A, R) = S_q(X, R)/S_q(A, R)$, ∂_q 导出自然的边缘同态 $\tilde{\partial}_q : S_q(X, A, R) \rightarrow S_{q-1}(X, A, R)$. 链复形

$$S(X, A, R) = \{S_q(X, A, R), \tilde{\partial}_q\}$$

的同调群称为 (X, A) 的 R 系数相对同调群, 记为 $H_q(X, A, R)$.

注: 同样, 带基点 $x_0 \in X$ 空间的 R 系数约化同调群定义为链复形 $S(X, x_0, R)$ 的同调群, 记为 $\tilde{H}_q(X, R)$.

在链复形 $S(X, R)$ 的最后添加 $S_{-1}(X, R) = R$ 得到链复形

$$\tilde{S}(X, R) : \cdots \longrightarrow S_q(X, R) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X, R) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_0(X, R) \xrightarrow{\partial_0} R \longrightarrow 0.$$

其中 $\partial_0 : S_0(X, R) \rightarrow R$ 由: 对所有的0维奇异单形 $x : \Delta^0 \rightarrow X$, $\partial_0(x) = 1$ 生成. $\tilde{S}(X, R)$ 的同调群也是 X 的 R 系数约化同调群 $\tilde{H}_q(X, R)$.

和整系数同调群一个, 拓扑空间的 R 系数同调群同样有:

- (1) 同伦不变性.
- (2) 长正合序列.

(3) 切除定理.

读者可以参考第三章给出这三个定理的证明. 在此我们将利用链复形, 张量积和第三章的已知结果给出这三个定理的另一个证明.

定义4.2.2 设 A, B 都是 R 模. 定义它们的张量积 $A \otimes_R B$ 为一个 R 模,

1. 生成元: $\{a \otimes b | a \in A, b \in B\}$,
2. 关系组: 对任何 $a, a_1, a_2 \in A, b, b_1, b_2 \in B$ 及 $r \in R$

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2) \otimes b &= a_1 \otimes b + a_2 \otimes b, \\ a \otimes (b_1 + b_2) &= a \otimes b_1 + a \otimes b_2, \\ r \cdot a \otimes b &= a \otimes r \cdot b.\end{aligned}$$

由张量积的定义易知: $A \otimes B$ 中的零元素为 $0 \otimes 0 = 0 \otimes a = b \otimes 0$.

张量积 $A \otimes B$ 中的元素记为 $\sum_i a_i \otimes b_i$.

例1 任何Abel群都有自然的 $\mathbb{Z}$ 模结构, 因而对任何Abel群 A, B 有张量积 $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ 简记为 $A \otimes B$.

例2 如 A 是一个Abel群, R 是一个交换幺环. 将环 R 看成是一个Abel群, 有张量积 $A \otimes R$.

在 $A \otimes R$ 中定义 R 模结构: 对任何 $r \in R, a \otimes r_1 \in A \otimes R$,

$$r \cdot (a \otimes r_1) = a \otimes r \cdot r_1$$

使 $A \otimes R$ 成为一个 R 模.

易证: $\mathbb{Z} \otimes R \cong R$.

如果 A 本身是一个 R 模, 则 $A \otimes_R R \cong A$.

例3 $\mathbb{Z}/3 \otimes \mathbb{Z}/2 = 0$, 这是因为: 对于 $\mathbb{Z}/3 \otimes \mathbb{Z}/2$ 中的生成元

$$\tilde{1} \otimes \bar{1} = \tilde{1} \otimes 3 \cdot \bar{1} = 3 \cdot \tilde{1} \otimes \bar{1} = \bar{0} \otimes \bar{1} = 0.$$

一般地 $\mathbb{Z}/m \otimes \mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/(m, n)$ 其中 (m, n) 为 m 与 n 的最大公因数.

例4 设 F 是一个域, A, B 都是域 F 上的模, 因而 A, B 是 F 上的线性空间. 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}, \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 分别是线性空间 A, B 的基. 则 $A \otimes B$ 是域 F 上的 $m \times n$ 维线性空间且

$$\{\alpha_i \otimes \beta_j | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

是 $A \otimes B$ 的一组基.

命题4.2.1 R 模同态 $f: A \rightarrow A', g: B \rightarrow B'$ 导出张量积的同态

$$f \otimes g: A \otimes B \rightarrow A' \otimes B'.$$

且对于另一对 R 模同态 $f' : A' \rightarrow A''$, $g' : B' \rightarrow B''$

$$f'f \otimes g'g = (f' \otimes g')(f \otimes g) : \quad \begin{array}{ccc} A \otimes B & \xrightarrow{f \otimes g} & A' \otimes g' \\ & \searrow f'f \otimes g'g & \downarrow f' \otimes g' \\ & & A'' \otimes B'' \end{array}$$

证明: 对于 $A \otimes B$ 中的生成元 $a \otimes b$ 定义 $(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$ 并做线性扩充. 由 f, g 是 R 模同态易知 $f \otimes g$ 保持 $A \otimes B$ 中的关系, 因而 $f \otimes g$ 是 R 模同态.

命题4.2.2 R 模的张量积满足:

- (1) 交换同构 $\tau : A \otimes B \rightarrow B \otimes A$, $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$.
- (2) 如果 $A = \oplus_i A_i$, 则

$$(\oplus_i A_i) \otimes B \cong \oplus_i (A_i \otimes B), \quad B \otimes (\oplus_i A_i) \cong \oplus_i (B \otimes A_i).$$

证明: 对于 $A \otimes B$ 的生成元 $a \otimes b$, 定义 $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ 并做线性扩充得到 R 模同构 $\tau : A \otimes B \rightarrow B \otimes A$.

由直和的定义知(2)成立.

定理4.2.3 设 $C = \{C_q, \partial_q\}$ 是整数环上的链复形(即每个 C_q 是Abel群), R 是一个交换幺环. 则 $C \otimes R = \{C_q \otimes R, \partial_q \otimes 1\}$ 是 R 上的链复形.

证明: 按例2, 对于Abel群 C_q 及交换幺环 R , $C_q \otimes R$ 上有 R 模结构. 而 $\partial_q \otimes 1 : C_q \otimes R \rightarrow C_{q-1} \otimes R$ 还是 R 模同态. 由命题4.2.1知 $(\partial_q \otimes 1) \cdot (\partial_{q+1} \otimes 1) = \partial_q \cdot \partial_{q+1} \otimes 1 = 0$. 所以 $C \otimes R$ 是环 R 上的链复形.

例5 链复形 $C = \{C_q, \partial_q\}$ 中每个 $C_q = \mathbb{Z}$, 边缘同态 ∂_q 为:

当 $q = 2k$ 是偶数时 $\partial_{2k} = 2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ 为2倍映射.

当 $n = 2k + 1$ 是奇数时 $\partial_{2k+1} = 0 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ 为零同态.

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

易知:

当 $q = 2k > 0$ 时 $\text{Ker} \partial_{2k} = 0$, C 的同调群 $H_{2k}(C) = 0$.

当 $q = 2k + 1 > 0$ 时 $\text{Ker} \partial_{2k+1} = \mathbb{Z}$, $\text{Im} \partial_{2k+2} = 2\mathbb{Z}$, C 的同调群 $H_{2k+1}(C) = \mathbb{Z}/2$.

对于环 $\mathbb{Z}/2$, 考虑链复形 $C \otimes \mathbb{Z}/2$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{2 \otimes 1} & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{0 \otimes 1} & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{2 \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \cdots \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

$C_q \otimes \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}/2$, $\partial_{2k} \otimes 1 = 2 \otimes 1 = 0$ 且 $\partial_{2k+1} \otimes 1 = 0$, 因而对所有的 $q > 0$, $H_q(C \otimes \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$.

注: 这个例子的模型源自于无穷维射影空间 $\mathbb{R}P^\infty$ 的整系数胞腔链复形和 $\mathbb{Z}/2$ 系数胞腔链复形.

对于拓扑空间 X , 整系数奇异链群 $S_q(X)$ 是由所有 q 维奇异单形 $\sigma: \Delta^q \rightarrow X$ 生成的自由Abel群. R 系数奇异链群是由所有 q 维奇异单形生成的自由 R 模. 由 $\mathbb{Z} \otimes R \cong R$ 及命题4.2.2知 $S(X, R) = S(X) \otimes R$. 由此我们有:

定理4.2.4 对于交换幺环 R , 拓扑空间 X 的 R 系数奇异链复形 $S(X, R) = S(X) \otimes R$. 因而 R 系数同调群 $H_q(X, R)$ 满足:

- 1) 同伦不变性.
- 2) 切除定理.

证明: 1) 对于任何 $q \geq 0$, 作为 R 模

$$S_q(X, R) = \left\{ \sum_i r_i \sigma_i \mid r_i \in R, \sigma_i: \Delta^q \rightarrow X \right\} \cong S_q(X) \otimes R.$$

而边缘同态 $\partial_q = \partial_q \otimes 1: S_q(X, R) \rightarrow S_{q-1}(X, R)$, 即下图可换

$$\begin{array}{ccc} S_q(X, R) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(X, R) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ S_q(X) \otimes R & \xrightarrow{\partial_q \otimes 1} & S_{q-1}(X) \otimes R \end{array}$$

因而链复形 $S(X, R) \cong S(X) \otimes R$.

拓扑空间的映射 $f: X \rightarrow Y$ 导出的 R 系数链复形的链映射 $f_\# = f_\# \otimes 1$ 即

$$\begin{array}{ccc} S_q(X, R) & \xrightarrow{f_\#} & S_q(Y, R) \\ \parallel & & \parallel \\ S_q(X) \otimes R & \xrightarrow{f_\# \otimes 1} & S_q(Y) \otimes R \end{array}$$

当 $f \stackrel{F}{\simeq} g: X \rightarrow Y$ 是同伦等价的两个映射时, 伦移 G 诱导出从 $f_\#$ 到 $g_\#$ 的链同伦 $H = \{H_q: S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(Y)\}$. 而 $H \otimes 1 = \{H_q \otimes 1: S_q(X) \otimes R \rightarrow S_{q+1}(Y) \otimes R\}$ 是从 $f_\# \otimes 1: S(X) \otimes R \rightarrow S(Y) \otimes R$ 到 $g_\# \otimes 1$ 的链同伦. 因而 R 系数同调群 $H_q(X, R)$ 有同伦不变性.

2) 对于 X 的开集 A 和 A 的闭集 V , 由于重心重分链映射 $Sd \stackrel{H}{\simeq} 1: S(X) \rightarrow S(X)$ 链同伦与单位链映射, $j: S(X \setminus V, A \setminus V) \rightarrow S(X, A)$ 导出同调群的同构. 张量积 R 以后 $Sd \otimes 1 \stackrel{H}{\simeq} 1: S(X, R) \rightarrow S(X, R)$. 将同样的证明方法应用到链映射

$$j \otimes 1: S(X \setminus V, A \setminus V) \otimes R \rightarrow S(X, A) \otimes R$$

上可知链映射 $j \otimes 1$ 导出同调群的切除同构 $j: H_q(X \setminus V, A \setminus V, R) \rightarrow H_q(X, A, R)$.

在此, 我们不能直接说: 由链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow S(A) \xrightarrow{i} S(X) \xrightarrow{j} S(X)/S(A) \longrightarrow 0$$

导出链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow S(A) \otimes R \xrightarrow{i \otimes 1} S(X) \otimes R \xrightarrow{j \otimes 1} S(X)/S(A) \otimes R \longrightarrow 0$$

因而有 R 系数同调群的长正合序列. 因为对于一般的交换幺环 R 和Abel群的短正合序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

张量积 R 以后

$$0 \longrightarrow A \otimes R \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes R \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes R \longrightarrow 0$$

不一定正合, 即张量积不保持正合性. 因而出现了 Tor 挠群: 张量积的导出函子(见§4.3).

例5 对于环 $\mathbb{Z}/2$ 和Abel群的正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

张量积 $\mathbb{Z}/2$ 之后

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{2 \otimes 1} & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\pi \otimes 1} & \mathbb{Z}/2 \otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{1} & \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

不正合. 这是因为对于 $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2$ 的生成元 $1 \otimes 1$, $(2 \otimes 1)(1 \otimes 1) = 0$.

$$2 \otimes 1 = 0 : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2$$

不再是单同态.

定义4.2.3 称一个短正合序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

$\nwarrow h$

是可裂的如果存在同态 $h : C \rightarrow B$ 使得 $g \cdot h = 1_C$, 即

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{h} & B \\ & \searrow 1 & \downarrow g \\ & & C. \end{array}$$

命题4.2.5 如果 $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ 是可裂的短正合序列, 则 $B \cong A \oplus C$.

证明: 构造同态 $i : A \oplus C \rightarrow B$, 对任何 $(a, c) \in A \oplus C$, $i(a, c) = f(a) + h(c)$.

如果 $i(a, c) = f(a) + h(c) = 0$, 则 $g \cdot i(a, c) = g \cdot f(a) + g \cdot h(c) = c = 0$. 因而 $c = 0$ 且 $i(a, c) = f(a) = 0$. 由 f 是单射知 $a = 0$, i 是单同态.

对任何 $b \in B$ 考虑 $b - h \cdot g(b)$. 显然 $g(b - h \cdot g(b)) = g(b) - gh(g(b)) = 0$, $b - h \cdot g(b) \in \text{Ker} g = \text{Im} f$. 存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = b - h \cdot g(b)$, 此时 $i(a, g(b)) = f(a) + h \cdot g(b) = b$. i 是满同态.

定理4.2.6

1) 对于Abel群的短正合序列 $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ 及交换幺环 R , 有 R 模的正合序列

$$A \otimes R \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes R \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes R \longrightarrow 0.$$

2) 当 C 是自由Abel群时短正合序列 $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ 可裂, $B \cong A \oplus C$. 因而

$$0 \longrightarrow A \otimes R \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes R \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes R \longrightarrow 0.$$

正合且可裂.

证明: 1) 由 $g : B \rightarrow C$ 是满同态容易证明 $g \otimes 1 : B \otimes R \rightarrow C \otimes R$ 也是满同态, 序列

$$A \otimes R \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes R \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes R \longrightarrow 0.$$

在 $C \otimes R$ 处正合.

为证明序列在 $B \otimes R$ 处正合, 考察 $B \otimes R$ 的子模

$$H = \left\{ \sum_i b_i \otimes r_i \mid b_i \in \text{Im} f, r_i \in R \right\} = \text{Im}(f \otimes 1).$$

易证: 对任何 $\sum_i b_i \otimes r_i \in H$,

$$(g \otimes 1) \left(\sum_i b_i \otimes r_i \right) = \sum_i g(b_i) \otimes r_i = \sum_i 0 \otimes r_i = 0.$$

因而 $H \subset \text{Ker}(g \otimes 1)$. 存在同态 $\phi : B \otimes R / H \rightarrow C \otimes R$ 使下图可换

$$\begin{array}{ccccc} H & \longrightarrow & B \otimes R & \longrightarrow & B \otimes R / H \\ & & \downarrow g \otimes 1 & \nearrow \phi & \uparrow \varphi \\ & & C \otimes R & & \end{array}$$

构造映射 $\varphi : C \otimes R \rightarrow B \otimes R / H$ 如下:

对任何 $C \otimes R$ 中的生成元 $c \otimes r$, 由 g 是满射知存在 $b \in B$ 使得 $g(b) = c$. 定义

$$\varphi(c \otimes r) = \overline{b \otimes r} = b \otimes r + H.$$

如果 $g(b) = g(b') = c$, 则存在 $a \in A$ 使得 $f(a) = b - b'$. 因而 $b \otimes r - b' \otimes r = f(a) \otimes r$, $b \otimes r + H = b' \otimes r + H$ 定义合理.

容易验证 $\phi \cdot \varphi = 1 : C \otimes R \rightarrow C \otimes R$, $\phi \cdot \varphi = 1$. 因而 $C \otimes R \cong B \otimes R / H$, $\text{Ker}(g \otimes 1) = H = \text{Im}(f \otimes 1)$. 序列在 $B \otimes R$ 处正合.

2) 如果 C 是自由Abel群, 设 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 是 C 的一组自由基 (生成元). 由 g 是满同态知: 对任何生成元 c_i 存在 $b_i \in B$ 使得 $g(b_i) = c_i$. 定义 $h : C \rightarrow B$ 为: $h(c_i) = b_i$. 由于 C 是自由Abel群, 集合映射 $h : C \rightarrow B$ 可扩充

成群同态 $h: C \rightarrow B$. 并且由 $g \cdot h(c_i) = g(b_i) = c_i$ 知 $g \cdot h = 1: C \rightarrow B \rightarrow C$. 序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightleftharpoons[h]{g} C \longrightarrow 0$$

可裂, $B \cong A \oplus C$. 由 $B \otimes R = (A \oplus C) \otimes R = (A \otimes R) \oplus (C \otimes R)$ 知序列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A \otimes R & \xrightarrow{f \otimes 1} & B \otimes R & \xrightarrow{g \otimes 1} & C \otimes R \longrightarrow 0. \\ & & & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & A \otimes R & \longrightarrow & (A \otimes R) \oplus (C \otimes R) & \longrightarrow & C \otimes R \longrightarrow 0 \end{array}$$

可裂正合.

定理4.2.7 对于空间偶 (X, A) , 由于相对奇异链群 $S_q(X, A)$ 是自由Abel群

$$0 \longrightarrow S(A) \otimes R \xrightarrow{i \otimes 1} S(X) \otimes R \xrightarrow{j \otimes 1} S(X, A) \otimes R \longrightarrow 0$$

是链复形的短正合序列. 它导出同调群的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_q(A, R) \xrightarrow{i} H_q(X, R) \xrightarrow{j} H_q(X, A, R) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A, R) \longrightarrow \cdots$$

§4.2习题

- 1 如果 A 是一个 R 模, 忘却 A 的 R 模结构将 A 看成一个Abel群. 在 $A \otimes R$ 上赋予新的 R 模结构, $r \cdot (a \otimes r_1) = a \otimes r \cdot r_1$. 试举例说明: $A \otimes R \not\cong A$.
- 2 证明: $\mathbb{Z}/m \otimes \mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/(m, n)$, 其中 (m, n) 为 m 与 n 的最大公因数.

§4.3 Tor 与 Ext

本节我们将介绍同调代数中的两个重要概念, 挠群 Tor 与 Ext 群. 在下一节将利用挠群 Tor 给出由整系数同调群 $H_*(X)$ 确定一般系数同调群 $H_*(X, R)$ 的办法—泛系数定理.

定义 4.3.1 设 R 是一个交换幺环, A 是一个 R 模. 一个 R 模的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

称为 A 的一个 R 模分解. 更进一步, 如果每个 C_i 都是自由 R 模, 则称这个分解为 A 的一个自由 R 模分解. 记为

$$C : \cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0.$$

例 1 $\mathbb{Z}/2$ 作为整数环 $\mathbb{Z}$ 上的模, 以下正合序列是 $\mathbb{Z}/2$ 的一个自由 $\mathbb{Z}$ 模分解.

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0,$$

其中 $\cdots = C_q = C_{q-1} = \cdots = C_2 = 0$, $C_1 = C_0 = \mathbb{Z}$, $\partial_1 = 2$.

例 2 $\mathbb{Z}$ 本身作为 $\mathbb{Z}$ 模

$$C : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

是 $\mathbb{Z}$ 的一个自由 $\mathbb{Z}$ 模分解, 其中 $\cdots = C_q = C_{q-1} = \cdots = C_1 = 0$, 只有 $C_0 = \mathbb{Z}$, ε 是同构映射.

一般地, 如果 A 是自由 R 模, 则有 A 的自由 R 模分解:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

其中除 $C_0 = A$ 外其余的 $C_i = 0$.

令 $E[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 为整数环 $\mathbb{Z}$ 上由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 生成的外代数. 作为 $\mathbb{Z}$ 模, 外代数 $E[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 是由所有的单项式

$$\{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r} \mid (i_1, i_2, \cdots, i_r) \subset (1, 2, \cdots, n)\}$$

生成的自由 $\mathbb{Z}$ 模. $E[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 中有乘法满足

$$x_i x_j = -x_j x_i, \quad x_i^2 = 0.$$

令

$$C_{s-1} = \mathbb{Z}\{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_s} \mid \{i_1, i_2, \cdots, i_s\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}\}$$

为长度为 s 的单项式生成的自由 $\mathbb{Z}$ 模. 并定义 $\partial_{s-1} : C_{s-1} \rightarrow C_{s-2}$ 为:

$$\partial_{s-1}(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_s}) = \sum_{j=1}^s (-1)^j x_{i_1}\cdots \widehat{x}_{i_j}\cdots x_{i_s}$$

其中 $x_{i_1}\cdots \widehat{x}_{i_j}\cdots x_{i_s}$ 为从 $x_{i_1}\cdots x_{i_j}\cdots x_{i_s}$ 中去掉 x_{i_j} 后产生的长度为 $s-1$ 的单项式.

$\varepsilon : C_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ 为: 对任何 $x_i \in E[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $\varepsilon(x_i) = 1$.
则

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

也是 $\mathbb{Z}$ 的一个自由 $\mathbb{Z}$ 模分解, 这个分解称为 Kuszul 分解.

命题 4.3.1 R 模 A 的一个 R 模分解对应一个链复形 $C = \{C_q, \partial_q\}$

$$C : \cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

$$\text{其同调群 } H_q(C) = \begin{cases} A & q = 0 \\ 0 & q > 0 \end{cases}$$

证明: 当 $q > 0$ 时序列在 C_q 处正合, $\text{Ker} \partial_q = \text{Im} \partial_{q+1}$, $H_q(C) = 0$.

$H_0(C) = C_0 / \text{Im} \partial_1$. 由 $C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$ 正合知

$$A \cong C_0 / \text{Ker} \varepsilon = C_0 / \text{Im} \partial_1 = H_0(C).$$

定理 4.3.2 对任何 R 模 A , 它的自由 R 模分解存在.

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

证明 定理的证明过程实际是一个逐步构作自由分解 C_n 的过程.

我们可以这样的构做自由 R 模和模同态: 任给一个集合 $S = \{s_i | i \in I\}$, 令

$$F(S) = \left\{ \sum_i r_i s_i \mid \text{其中 } r_i \in R, s_i \in S \right\}$$

为由集合 S 中的元素生成的自由 R 模.

对任何 R 模 M , 集合映射 $f : S \rightarrow M$ 可以线性地扩充成模同态 $f : F(S) \rightarrow M$,

$$f\left(\sum_i r_i s_i\right) = \sum_i r_i f(s_i).$$

这样第一步, 我们需要构做自由 R 模 C_0 并且要求 $\varepsilon : C_0 \rightarrow A$ 是满同态.

设 A 是由 $S_0 = \{s_i^0 | i \in I_0\}$ 生成的 R 模 (A 不一定是自由 R 模, 但一般可以找到比较简约的生成元组. 如果很难找到简约的生成元组可以取集合 $S_0 = A \setminus \{0\}$, 即从 A 中去掉零元后余下的所有元素, 它肯定是 A 的生成元组).

令 $C_0 = F(S_0)$ 为由 S_0 生成的自由 R 模并定义集合映射 $\varepsilon : S_0 \rightarrow A$ 为 $\varepsilon(s_i^0) = s_i^0$. 将 ε 扩充成 R 模同态 $\varepsilon : C_0 = F(S_0) \rightarrow A$, ε 是满同态.

第二步, 我们需要构做 C_1 和 ∂_1 使得

$$C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

正合.

首先求同态 ε 的核 $\text{Ker}\varepsilon$ 并找 $\text{Ker}\varepsilon$ 的生成元组 $S_1 = \{s_j^1 | j \in I_1\}$. 同样令 $C_1 = F(S_1)$ 为由 S_1 生成的自由 R 模并定义集合映射 $\partial_1 : S_1 \rightarrow \text{Ker}\varepsilon$ 为 $\partial_1(s_j^1) = s_j^1 \in \text{Ker}\varepsilon$. 将 ∂_1 扩充成模同态, 则有合成映射

$$\partial_1 : C_1 = F(S_1) \xrightarrow{\partial_1} \text{Ker}\varepsilon \longrightarrow C_0$$

使得 $\text{Im}\partial_1 = \text{Ker}\varepsilon$, 此时序列在 C_0 处正合.

归纳地假设已经得到正合序列

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

同样找出 $\text{Ker}\partial_n$ 的生成元组 $S_{n+1} = \{s_i^{n+1}\}$, 定义 $C_{n+1} = F(S_{n+1})$ 并定义集合映射 $\partial_{n+1}(s_i^{n+1}) = s_i^{n+1} \in \text{Ker}\partial_n$. 扩充成模同态 $\partial_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n$, 则 $\text{Im}\partial_{n+1} = \text{Ker}\partial_n$.

这种构造自由 R 模分解的办法被称作bar-分解. 由于对环 R 没有任何限制, 这样构造出来的自由 R 模分解会很大, C_n 中会有很多生成元. 但对许多环来说, 其自由分解也只能这样构造, 但对有些特殊的环 R 可以构造简单的自由分解.

例3 设 R 是一个域, A 是 R 模. 由于域 R 上的模是线性空间, 一定是自由的. 我们可以定义 $C_0 = A$, $\varepsilon : A \rightarrow A$ 为同构映射. 这样有自由分解

$$C : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

例4 设 R 是一个主理想整环(常见的主理想整环有: 整数环 $\mathbb{Z}$, 某个域 $\mathbb{F}$ 上的一元多项式环 $\mathbb{F}[x]$ 等). **主理想整环 R 上任何自由模的子模还是自由 R 模.** 因此对任何由 $S = \{s_i | i \in I\}$ 生成的 R 模 A , 令 $C_0 = F(S)$ 并定义同态 $\varepsilon : C_0 \rightarrow A$ 为 $\varepsilon(s_i) = s_i$. 由于 $\text{Ker}\varepsilon$ 是自由 R 模 C_0 的子模, 它也是自由 R 模. 我们可以定义 $C_1 = \text{Ker}\varepsilon$, 而

$$\partial_1 : \text{Ker}\varepsilon \rightarrow C_0$$

为内射. A 有短的自由分解

$$C : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{Ker}\varepsilon \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

例5 $\mathbb{Z}/2$ 上有 $\mathbb{Z}/4$ 的模结构 $\varphi : \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/2$, 定义为 $a \cdot b = ab \in \mathbb{Z}/2$,

$$\begin{array}{ccccccc} C : \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z}/4 & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z}/4 & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & C_n & & C_{n-1} & & \cdots & C_1 & & C_0 & & \mathbb{Z}/2 \end{array}$$

是 $\mathbb{Z}/2$ 的一个自由 $\mathbb{Z}/4$ 模分解.

定义4.3.2 设 R 是一个交换幺环, 一个环 R 上的链复形 $C = \{C_n, \partial_n\}_{n \geq 0}$ 称为自由链复形如果每个 C_n 都是自由 R 模. R 模 A 称为链复形 C 的一个增广如

果存在满同态 $\varepsilon: C_0 \rightarrow A$ 使得 $H_0(C) = A$

$$\cdots \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0$$

定理4.3.1中一个 R 模 A 的自由分解对应的链复形 C 是一个自由链复形, 并且 A 是 C 的增广.

定理4.3.3 (自由零调模型) 设 $C = \{C_n, \partial_n\}$ 是一个自由链复形, A 是 C 的增广, C' 是 A' 的一个自由 R 模分解. 则对任何同态 $\varphi: A \rightarrow A'$ 存在链映射

$$\varphi = \{\varphi: C_n \rightarrow C'_n\}$$

使得 $\varepsilon' \cdot \varphi = \varphi \cdot \varepsilon$ 且任何两个这样的链映射 φ, φ' 都是链同伦的. 即有下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi & \nearrow \varphi' & \downarrow \varphi & \nearrow \varphi' & \downarrow \varphi & \nearrow \varphi' & & & \downarrow \varphi & \nearrow \varphi' & \downarrow \varphi & \nearrow \varphi' & \downarrow \varphi & \nearrow \varphi' & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & C'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

证明: 这个定理的证明同样是用追图法. 首先我们利用归纳法构造链映射 $\varphi: C_n \rightarrow C'_n$.

注意到在交换图中下面一行是一个长正合序列, 而每个 C_n 都是自由 R 模. 设 $S_n = \{s_{nj} | n \in I_n\}$ 是 C_n 的生成元, 则集合映射 $\varphi_n: S_n \rightarrow C'_n$ 可扩充成 R 模同态 $\varphi: C_n \rightarrow C'_n$.

利用追图法, 对于 C_0 的每个生成元 s_{0j} , $\varphi \cdot \varepsilon(s_{0j}) \in A'$. 由 $\varepsilon: C'_0 \rightarrow A'$ 是满同态知: 存在 $c'_{0j} \in C'_0$ 使得 $\varepsilon(c'_{0j}) = \varphi \cdot \varepsilon(s_{0j})$. 定义 $\varphi_0(s_{0j}) = c'_{0j}$, 则 φ_0 的线性扩充 $\varphi: C_0 \rightarrow C'_0$ 满足 $\varphi \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \varphi$.

对于 C_1 的每个生成元 s_{1j} ,

$$\varepsilon' \cdot \varphi \cdot \partial_1(s_{1j}) = \varphi \cdot \varepsilon \cdot \partial_1(s_{1j}) = 0$$

因而 $\varphi \cdot \partial_1(s_{1j}) \in \text{Ker } \varepsilon' = \text{Im } \partial'_1$. 存在 $c'_{1j} \in C'_1$ 使得 $\partial'_1(c'_{1j}) = \varphi \cdot \partial_1(s_{1j})$. 定义 $\varphi_1(s_{1j}) = c'_{1j}$, 则它的线性扩充 $\varphi: C_1 \rightarrow C'_1$ 满足 $\partial'_1 \cdot \varphi = \varphi \cdot \partial_1$.

归纳地假设 $\varphi: C_{n-1} \rightarrow C'_{n-1}$ 已经给出. 对 C_n 的每个生成元 s_{nj}

$$\partial'_{n-1} \cdot \varphi \cdot \partial_n(s_{nj}) = \varphi \cdot \partial_{n-1} \cdot \partial_n(s_{nj}) = 0$$

$\varphi \cdot \partial_n(s_{nj}) \in \text{Ker } \partial'_{n-1} = \text{Im } \partial'_n$. 存在 $c'_{nj} \in C'_n$ 使得 $\partial'_n(c'_{nj}) = \varphi \cdot \partial_n(s_{nj})$. 同样定义 $\varphi_n(s_{nj}) = c'_{nj}$, 它的线性扩充 $\varphi: C_n \rightarrow C'_n$ 满足 $\partial'_n \cdot \varphi = \varphi \cdot \partial_n$. 这样构造的 $\varphi = \{\varphi: C_n \rightarrow C'_n\}$ 是链映射.

设另有链映射 $\varphi' = \{\varphi': C_n \rightarrow C'_n\}$ 也满足在 C_0 处 $\varphi' \cdot \varepsilon = \varepsilon' \cdot \varphi$. 取

$$H = 0: A \rightarrow C'_0,$$

对任何 $s_{0j} \in C_0$,

$$\varepsilon' \cdot (\varphi - \varphi')(s_{0j}) = (\varphi - \varphi') \cdot \varepsilon(s_{0j}) = 0.$$

$$(\varphi - \varphi')(s_{0j}) \in \text{Ker} \varepsilon' = \text{Im} \partial'_1,$$

存在 $\tilde{c}'_{1j} \in C'_1$ 使得

$$\partial'_1(\tilde{c}'_{1j}) = (\varphi - \varphi')(s_{0j}).$$

定义 $H : C_0 \rightarrow C'_1$ 为 $H(s_{0j}) = \tilde{c}'_{1j}$ 的线性扩充, 则在 C_0 处

$$\varphi - \varphi' = H \cdot \varepsilon + \partial'_1 \cdot H : C_0 \rightarrow C'_0.$$

同样归纳地假设 $H : C_{n-1} \rightarrow C'_n$ 已经给出且满足: 在 C_{n-1} 处

$$\varphi - \varphi' = H \cdot \partial_{n-1} + \partial'_n \cdot H.$$

对任何 $s_{nj} \in C_n$, 考察 $(\varphi - \varphi')(s_{nj}) - H \cdot \partial_n(s_{nj})$ 我们有

$$\begin{aligned} & \partial'_n \cdot ((\varphi - \varphi') - H \cdot \partial_n)(s_{nj}) \\ &= (\varphi - \varphi') \cdot \partial_n(s_{nj}) - \partial'_n \cdot H \cdot \partial_n(s_{nj}) \\ &= ((\varphi - \varphi') - \partial'_n \cdot H) \cdot \partial_n(s_{nj}) \\ &= H \cdot \partial_{n-1} \cdot \partial_n(s_{nj}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$(\varphi - \varphi')(s_{nj}) - H \cdot \partial_n(s_{nj}) \in \text{Ker} \partial'_n = \text{Im} \partial'_{n+1}$, 存在 $\tilde{c}'_{n+1j} \in C'_{n+1}$ 使得

$$\partial'_{n+1}(\tilde{c}'_{n+1j}) = (\varphi - \varphi')(s_{nj}) - H \cdot \partial_n(s_{nj}).$$

定义 $H : C_n \rightarrow C'_{n+1}$ 为 $H(s_{nj}) = \tilde{c}'_{n+1j}$ 的线性扩充, 则在 C_n 处

$$(\varphi - \varphi') = H \cdot \partial_n + \partial'_{n+1} \cdot H : C_n \rightarrow C'_n.$$

由零调自由模型定理很容易看出: 一个 R 模的自由分解在链同伦的意义下是唯一的.

推论4.3.4 同一个 R 模 A 的不同自由分解 C, C' 是链同伦等价的.

证明: 对于 A 的两个自由分解 C, C'

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \parallel & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & C'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi & & \parallel & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由 C 是自由链复形 C' 是零调复形知: 对于单位映射 $1 : A \rightarrow A$ 存在链映射 $\varphi : C \rightarrow C'$ 使得 $\varepsilon' \cdot \varphi = \varepsilon \cdot 1$.

同样由 C' 是自由链复形 C 是零调链复形知: 对于 $1 : A \rightarrow A$ 存在链映射 $\phi : C' \rightarrow C$ 使得 $\varepsilon \cdot \phi = 1 \cdot \varepsilon'$.

而对于 C 到 C 的两个都满足 $\varepsilon \cdot (\phi \cdot \varphi) = 1 \cdot \varepsilon$, $\varepsilon \cdot 1 = 1 \cdot \varepsilon$ 的链映射 $\phi \cdot \varphi$ 和 1 . 由于 C 即是自由链复形又是零调复形, 因而 $\phi \cdot \varphi$ 与 1 链同伦, 链复形 C 与 C' 链同伦等价.

设 A, B 是两个 R 模, 任选 A 的一个自由 R 模分解 C , 再与 B 做张量积得一个链复形 $C \otimes B$

$$\cdots \longrightarrow C_n \otimes B \xrightarrow{\partial \otimes 1} C_{n-1} \otimes B \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \otimes B \xrightarrow{\partial \otimes 1} C_0 \otimes B \longrightarrow 0.$$

命题4.3.5 链复形 $C \otimes B$ 的同调群只与 R 模 A, B 有关, 与 A 的自由分解 C 的选取无关. $H_n(C \otimes B)$ 称为 A 与 B 的第 n 个挠群, 记为 $Tor_n^R(A, B)$.

证明: 对于 A 的两个自由分解 C, C' , 存在链同伦等价映射 $\varphi: C \xrightarrow{\sim} C'$. 张量积 B 以后 $\varphi \otimes 1: C \otimes B \xrightarrow{\sim} C' \otimes B$ 还是链同伦等价映射, 因而

$$\varphi_*: H_n(C \otimes B) \xrightarrow{\sim} H_n(C' \otimes B)$$

同构.

由定义及自由零调模型定理很容易得到: $Tor_n^R(A, B)$ 关于 A, B 都是共变函子, 即:

定理4.3.6 1) R 模同态 $\varphi: A \longrightarrow A'$ 导出挠群同态

$$\varphi_*: Tor_n^R(A, B) \longrightarrow Tor_n^R(A', B).$$

2) R 模同态 $f: B \longrightarrow B'$ 导出挠群同态 $f_*: Tor_n^R(A, B) \longrightarrow Tor_n^R(A, B')$

证明: 选定 A 和 A' 的自由分解 C, C' ,

1) R 模同态 φ 诱导出链映射 $\varphi: C \longrightarrow C'$, 张量积 B 以后得到链映射

$$\varphi \otimes 1: C \otimes B \longrightarrow C' \otimes B.$$

链映射 $\varphi \otimes 1$ 诱导出同调群的同态 $\varphi_*: Tor_n^R(A, B) \longrightarrow Tor_n^R(A', B)$, 并且这个同态只与模同态 $\varphi: A \longrightarrow A'$ 有关, 与链映射 $\varphi: C \longrightarrow C'$ 的选取无关.

2) R 模同态 $f: B \longrightarrow B'$ 诱导出链群同态 $1_n \otimes f: C_n \otimes B \longrightarrow C_n \otimes B'$, 从而诱导出链映射

$$1 \otimes f: C \otimes B \longrightarrow C \otimes B'.$$

链映射 $1 \otimes f$ 诱导出同调群的同态 $f_*: Tor_n^R(A, B) \longrightarrow Tor_n^R(A, B')$.

$$\text{例6 } Tor_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & n = 0, 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

由例1取 $\mathbb{Z}/2$ 的一个自由 $\mathbb{Z}$ 模分解 C

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0.$$

张量积 $\mathbb{Z}/2$ 得到链复形

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{2 \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & \parallel \\ & & 0 & & \cdots & & 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

因而 $H_0(C \otimes \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$, $H_1(C \otimes \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ 而当 $n > 1$ 时 $C_n \otimes \mathbb{Z}/2 = 0$.

一般地, 如果 R 是主理想整环, A, B 是 R 上的模. A 有形如例4中的自由分解

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Ker} \varepsilon & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{i} & C_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

张量积 B 以后, 对 $n \geq 2$, $C_n \otimes B = 0$ 因而 $\text{Tor}_n^R(A, B) = 0$. 由

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

正合知

$$C_1 \otimes B \xrightarrow{\partial_1} C_0 \otimes B \xrightarrow{\varepsilon} A \otimes B \longrightarrow 0$$

正合(参加定理4.2.6的证明). 因此

$$\text{Tor}_0^R(A, B) = H_0(C \otimes B) = C_0 \otimes B / \text{Im} \partial_1 = C_0 \otimes B / \text{Ker} \varepsilon = A \otimes B.$$

定义4.3.3 对于主理想整环 R 上的模 A, B , $\text{Tor}_1^R(A, B) = H_1(C \otimes B) = \text{Ker} \partial_1$, 简记为 $\text{Tor}^R(A, B)$.

特别的, 当主理想整环取 $\mathbb{Z}$ 时 $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ 简记为 $\text{Tor}(A, B)$.

例7 $\mathbb{Z}/2$ 作为 $\mathbb{Z}/4$ 上的模, 有自由分解

$$\begin{array}{ccccccc} C : \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z}/4 & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z}/4 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z}/4 & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z}/4 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ & & C_n & & C_{n-1} & & \cdots & & C_1 & & C_0 & & \mathbb{Z}/2 & & \end{array}$$

(参见例5) 与 $\mathbb{Z}/2$ 做张量积后得到链复形

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z}/4 \otimes \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{2 \otimes 1} & \mathbb{Z}/4 \otimes \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z}/4 \otimes \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{2 \otimes 1} & \mathbb{Z}/4 \otimes \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & \\ \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

因而对任何 $n \geq 0$, $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = C_n \otimes \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}/2$.

定理4.3.7 对任何 R 模 D 及 R 模的短正合序列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

有挠群的长正合序列

$$\begin{array}{l} \cdots \longrightarrow \text{Tor}_n^R(D, A) \xrightarrow{f_*} \text{Tor}_n^R(D, B) \xrightarrow{g_*} \text{Tor}_n^R(D, C) \xrightarrow{\delta} \text{Tor}_{n-1}^R(D, A) \longrightarrow \\ \cdots \longrightarrow \text{Tor}_1^R(D, C) \xrightarrow{\delta} D \otimes A \xrightarrow{f \otimes 1} D \otimes B \xrightarrow{g \otimes 1} D \otimes C \longrightarrow 0. \end{array}$$

证明: 给定 D 的一个自由 R 模分解 $\tilde{D}$

$$\cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} D_n \xrightarrow{\partial_n} D_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_1 \xrightarrow{\partial_1} D_0 \xrightarrow{\epsilon} D \longrightarrow 0$$

由于每个 D_n 都是自由 R 模, 由命题4.2.2知

$$0 \longrightarrow D_n \otimes A \xrightarrow{1 \otimes f} D_n \otimes B \xrightarrow{1 \otimes g} D_n \otimes C \longrightarrow 0$$

都是正合序列.

$$0 \rightarrow \tilde{D} \otimes A \xrightarrow{1 \otimes f} \tilde{D} \otimes B \xrightarrow{1 \otimes g} \tilde{D} \otimes C \rightarrow 0$$

是链复形的短正合序列, 它导出定理中同调群的长正合序列.

在给出挠群 $Tor_n^R(A, B)$ 的定义和基本性质之后, 我们介绍扩张群 Ext . 用同调代数的语言说: 由于张量积 $\otimes$ 不保持正合性, 挠群 Tor 是张量积函子 $\otimes$ 的导出函子. 同样由于同态函子 Hom 不保持正合性, Ext 是 Hom 函子的导出函子.

定义4.3.4 对任何 R 模 A, B , 定义

$$Hom_R(A, B) = \{f : A \longrightarrow B \mid f \text{ 是从 } A \text{ 到 } B \text{ 的 } R \text{ 模同态}\}$$

为所有从 A 到 B 的 R 模同态构成的集合. $Hom_R(A, B)$ 中有自然的 R 模结构:

- 1) $f + g : A \longrightarrow B$ 定义为: 对任何 $a \in A$, $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$.
- 2) $r \cdot f : A \longrightarrow B$ 定义为: 对任何 $a \in A$, $(r \cdot f)(a) = r \cdot f(a)$.

例8 $\mathbb{Z}/2$, $\mathbb{Z}/5$ 和 $\mathbb{Z}$ 作为整数环 $\mathbb{Z}$ 上的模

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}, & Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) &= \mathbb{Z}/2; \\ Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}) &= 0, & Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/5, \mathbb{Z}/2) &= 0 \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的同态 f 完全由 $f(1) \in \mathbb{Z}$ 确定.

同样 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}/2$ 的同态 f 也完全由 $f(1) \in \mathbb{Z}/2$ 确定.

由于在 $\mathbb{Z}/2$ 中 $1 + 1 = 0$, 同态 $f : \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ 应该满足 $f(0) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 0 \in \mathbb{Z}$, $f(1)$ 只能是0, f 是零同态.

$Hom_R(-, -)$ 关于第一个变量是反变函子, 关于第二个变量是共变函子, 即:

命题4.3.8 同态 $\phi : A \rightarrow B$ 诱导出同态 $\phi^* : Hom_R(B, G) \longrightarrow Hom_R(A, G)$ 且满足:

- 1) 对于单位映射 $1 : A \longrightarrow A$

$$1^* = 1 : Hom_R(A, G) \longrightarrow Hom_R(A, G).$$

- 2) 对于零同态 $0 : A \longrightarrow B$ 有

$$0^* = 0 : Hom_R(B, G) \longrightarrow Hom_R(A, G)$$

3) 对于同态 $\phi : A \rightarrow B$ 和 $\psi : B \rightarrow C$ 有

$$(\psi \cdot \phi)^* = \phi^* \cdot \psi^* : \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(C, G) & \xrightarrow{\psi^*} & \text{Hom}_R(B, G) \\ & \searrow (\psi \cdot \phi)^* & \downarrow \phi^* \\ & & \text{Hom}_R(A, G). \end{array}$$

证明: 对于 R 模同态 $\phi : A \rightarrow B$,

$$\phi^* : \text{Hom}_R(B, G) \rightarrow \text{Hom}_R(A, G)$$

定义为: 对任何 $f : B \rightarrow G \in \text{Hom}_R(B, G)$, $\phi^*(f) \in \text{Hom}_R(A, G)$ 为同态的合成

$$\phi^*(f) = f \cdot \phi : A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{f} G.$$

由定义容易验证 1), 2), 3) 成立.

命题 4.3.9 同态 $\psi : G \rightarrow H$ 诱导出同态 $\psi_* : \text{Hom}_R(A, G) \rightarrow \text{Hom}_R(A, H)$ 且满足:

1) 对于单位映射 $1 : G \rightarrow G$

$$1_* = 1 : \text{Hom}_R(A, G) \rightarrow \text{Hom}_R(A, G).$$

2) 对于同态 $\psi : G \rightarrow H$ 和 $\phi : H \rightarrow K$

$$(\phi \cdot \psi)^* = \phi_* \cdot \psi_* : \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(A, G) & \xrightarrow{\psi_*} & \text{Hom}_R(A, H) \\ & \searrow (\phi \cdot \psi)_* & \downarrow \phi_* \\ & & \text{Hom}_R(A, K). \end{array}$$

证明: 对于 R 模同态 $\psi : G \rightarrow H$,

$$\psi_* : \text{Hom}_R(A, G) \rightarrow \text{Hom}_R(A, H)$$

定义为: 对任何 $f \in \text{Hom}_R(A, G)$, $\psi_*(f) \in \text{Hom}_R(A, H)$ 为同态合成

$$\psi_*(f) = \psi \cdot f : A \rightarrow G \rightarrow H.$$

易证这样定义的 ψ_* 是 R 模同态且满足 1), 2).

定理 4.3.10 对于一族 R 模 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 及 $\{G_\beta\}_{\beta \in J}$, 其中 I, J 是下标集有

$$1) \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{\alpha \in I} A_\alpha, G\right) \cong \prod_{\alpha \in I} \text{Hom}_R(A_\alpha, G).$$

$$2) \text{Hom}_R\left(A, \bigoplus_{\beta \in J} G_\beta\right) \cong \bigoplus_{\beta \in J} \text{Hom}_R(A, G_\beta).$$

在此应当注意: 当下标集 I, J 无限时直和 $\oplus$ 与直积 $\prod$ 的区别.

同样, Hom 函子也不保持正合性:

命题 4.3.11

1) 如果 $0 \rightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$ 是 R 模的短正合序列, 则

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, G) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}_R(B, G) \xrightarrow{\phi^*} \operatorname{Hom}_R(A, G)$$

是 R 模的短正合序列

2) 如果正合序列 $0 \rightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$ 是可裂的, 则

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, G) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}_R(B, G) \xrightarrow{\phi^*} \operatorname{Hom}_R(A, G) \longrightarrow 0$$

也是正合的.

证明: 1) 序列在 $\operatorname{Hom}_R(C, G)$ 处正合指

$$\psi^* : \operatorname{Hom}_R(C, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(B, G)$$

是单同态.

对于任何 $f \in \operatorname{Hom}_R(C, G)$, $f : C \rightarrow G$ 是同态. 而 $\psi^*(f)$ 是同态合成

$$\psi^*(f) = f \cdot \psi : B \xrightarrow{\psi} C \xrightarrow{f} G.$$

如果 $\psi^*(f) = f \cdot \psi = 0$ 是零同态. 则由

$$\psi : B \longrightarrow C$$

是满同态知道: 对任何 $c \in C$ 存在 $b \in B$ 使得 $\psi(b) = c$. 此时对任何 $c \in C$

$$f(c) = f(\psi(b)) = f \cdot \psi(b) = 0.$$

$f : C \rightarrow G$ 是零同态, 即 $f = 0$. ψ^* 是单同态.

2) 序列在 $\operatorname{Hom}_R(B, G)$ 处正合. 即 $\operatorname{Im} \psi^* = \operatorname{Ker} \phi^*$

首先 $\phi^* \cdot \psi^* = (\psi \cdot \phi)^* = 0$, 因而 $\operatorname{Im} \psi^* \subset \operatorname{Ker} \phi^*$.

另外, 对于 $g \in \operatorname{Ker} \phi^*$, 即对于同态 $g : B \rightarrow G$ 合成

$$\phi^*(g) = g \cdot \phi = 0$$

则

$$g \cdot \phi = 0 \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

由代数同态基本定理知: 存在 $h : C \rightarrow G$ 使得 $h \cdot \psi = g$, 即 $\psi^*(h) = g$, $g \in \operatorname{Im} \psi^*$.

3) 当正合序列 $0 \rightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$ 可裂时, $B \cong A \oplus C$

$$\operatorname{Hom}_R(B, G) \cong \operatorname{Hom}_R(A, G) \oplus \operatorname{Hom}_R(C, G).$$

因而

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(C, G) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}_R(B, G) \xrightarrow{\phi^*} \operatorname{Hom}_R(A, G) \longrightarrow 0$$

也可裂, 正合.

设 $C = \{C_n, \partial_n\}$ 是环 R 上的链复形, G 是一个 R 模. 由命题 4.3.8 知 ∂_n 诱导出同态 $\partial_n^* : \text{Hom}_R(C_{n-1}, G) \rightarrow \text{Hom}_R(C_n, G)$ 且满足 $\partial_{n+1}^* \partial_n^* = 0$.

$$\text{Hom}_R(C, G) = \{\text{Hom}_R(C_n, G), \partial_{n+1}^*\}$$

构成一个上链复形

$$\cdots \longleftarrow \text{Hom}_R(C_{n+1}, G) \xleftarrow{\partial_{n+1}^*} \text{Hom}_R(C_n, G) \xleftarrow{\partial_n^*} \text{Hom}_R(C_{n-1}, G) \longleftarrow \cdots$$

定义 4.3.5 上链复形 $\text{Hom}_R(C, G)$ 的上同调群

$$H^n(\text{Hom}_R(C, G)) = \text{Ker} \partial_{n+1}^* / \text{Im} \partial_n^*$$

称为链复形 C 的 G 系数上同调群.

链映射 $\varphi : C \rightarrow D$ 诱导出上链复形的上链映射

$$\varphi^* : \text{Hom}_R(D, G) \rightarrow \text{Hom}_R(C, G),$$

因而诱导出上同调群的同态 $\varphi^* : H^n(\text{Hom}_R(D, G)) \rightarrow H^n(\text{Hom}_R(C, G))$.

两个链映射 φ, ϕ 之间的链同伦 $H = \{H : C_{n-1} \rightarrow D_n\}$ 诱导出上链映射 φ^*, ϕ^* 之间的上链同伦

$$H^* = \{H^* : \text{Hom}_R(D_n, G) \rightarrow \text{Hom}_R(C_{n-1}, G)\}$$

满足: $\varphi^* - \phi^* = H^* \cdot \partial_{n+1}^* + \partial_n^* \cdot H^*$. 因此它们诱导出的上同调群同态相同

$$\varphi^* = \phi^* : H^n(\text{Hom}_R(D, G)) \rightarrow H^n(\text{Hom}_R(C, G)).$$

当两个链复形 $\varphi : C \xrightarrow{\sim} D$ 链同伦等价时,

$$\varphi^* : \text{Hom}_R(D, G) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_R(C, G)$$

是上链复形的上链同伦等价. 他们的上同调群同构

$$\varphi^* : H^n(D, G) \xrightarrow{\sim} H^n(C, G).$$

定义 4.3.6 设 A, B 是两个 R 模, 任选 A 的一个自由分解 C , 构造链复形 $\text{Hom}_R(C, B)$. 它的上同调群只与 A, B 有关而与自由分解 C 的选取无关, 定义 A 与 B 的 Ext 群 (扩张群) 为 $\text{Hom}_R(C, B)$ 的上同调群

$$\text{Ext}_R^n(A, B) = H^n(\text{Hom}_R(C, B)).$$

由链复形的交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \varphi \downarrow & \swarrow H & \varphi \downarrow & \swarrow H & \varphi \downarrow & & & & \varphi \downarrow & \swarrow H & \varphi \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\partial_n} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & D_1 & \xrightarrow{\partial_1} & D_0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

诱导出以下反向的上链复形的交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longleftarrow & \text{Hom}_R(C_{n+1}, B) & \xleftarrow{\partial_{n+1}^*} & \text{Hom}_R(C_n, B) & \xleftarrow{\partial_n^*} & \text{Hom}_R(C_{n-1}, B) & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \text{Hom}_R(C_1, B) & \xleftarrow{\partial_1^*} & \text{Hom}_R(C_0, B) & \longleftarrow & 0 \\
 & & \varphi^* \uparrow & \nearrow H^* & \varphi^* \uparrow & \nearrow H^* & \varphi^* \uparrow & & & & \varphi^* \uparrow & \nearrow H^* & \varphi^* \uparrow & & \\
 \cdots & \longleftarrow & \text{Hom}_R(D_{n+1}, B) & \xleftarrow{\partial_{n+1}^*} & \text{Hom}_R(D_n, B) & \xleftarrow{\partial_n^*} & \text{Hom}_R(D_{n-1}, B) & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \text{Hom}_R(D_1, B) & \xleftarrow{\partial_1^*} & \text{Hom}_R(D_0, B) & \longleftarrow & 0
 \end{array}$$

$$\text{例9 } \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(\mathbb{Z}/5, \mathbb{Z}/5) = \begin{cases} \mathbb{Z}/5 & n = 0, 1 \\ 0 & n > 1. \end{cases}$$

选取 $\mathbb{Z}/5$ 的自由分解 C

$$C : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{5} \mathbb{Z} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}/5 \longrightarrow 0$$

其中 $C_1 = C_0 = \mathbb{Z}$, $\partial_1 = 5$ 是5倍映射, 而当 $n > 1$ 时 $C_n = 0$.

构造链复形 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, \mathbb{Z}/5)$

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, \mathbb{Z}/5) : \cdots \longleftarrow 0 \longleftarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5) \xleftarrow{5^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5) \longleftarrow 0$$

当 $n > 1$ 时 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n, \mathbb{Z}/5) = 0$, 因而 $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(\mathbb{Z}/5, \mathbb{Z}/5) = 0$.

$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5) \cong \mathbb{Z}/5$, 而对任何同态 $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/5$, $5^*(f)$ 为: 对任何 $a \in \mathbb{Z}$,

$$5^*(f)(a) = f \cdot 5(a) = f(5a) = 0 \in \mathbb{Z}/5$$

$5^* = 0$ 是零同态. 因而

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\mathbb{Z}/5, \mathbb{Z}/5) = \text{Hom}_R(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5) \cong \mathbb{Z}/5,$$

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/5, \mathbb{Z}/5) = \text{Hom}_R(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5) \cong \mathbb{Z}/5.$$

更一般地: 如果 A, B 是主理想整环 R 上的模, A 有形如例4中的自由分解, 因而当 $n > 1$ 时 $\text{Ext}_R^n(A, B) = 0$. 类似于 $\text{Tor}_0^R(A, B) = A \otimes B$ 的证明, 可以证明

$$\text{Ext}_R^0(A, B) \cong \text{Hom}_R(A, B).$$

$\text{Ext}_R^1(A, B)$ 记为 $\text{Ext}_R(A, B)$, 而当 R 为整数环 $\mathbb{Z}$ 时, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(A, B)$ 简记为 $\text{Ext}(A, B)$.

Ext群与扩张的关系 设 A, B 是 R 模, $0 \rightarrow B \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} A \rightarrow 0$ 是 R 模的短正合序列, 此时 R 模 E 称为 A, B 的一种扩张, 他的结构并不能唯一确定. 比如: 已知

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/5 \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/5 \longrightarrow 0.$$

此时的 E 可以是 $\mathbb{Z}/25$, 也可以是 $\mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/5$, 或者还有其他的可能. 但此时如果我们用 Ext 群就可以计算出 E 所有的可能.

对于任何短正合序列 $0 \rightarrow B \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} A \rightarrow 0$, 任意选取 A 的自由分解 C . 则有下面的自由零调模型:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_2 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 & \xrightarrow{\epsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 & & \parallel & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中上面的一行是自由链复形, 下面的一行可以看做是零调链复形. 因而单位映射 $1 : A \rightarrow A$ 可以提升为链映射 φ .

考察 $\varphi_1 : C_1 \rightarrow B$, 它可以看做上链群 $\text{Hom}_R(C_1, B)$ 中的元素, 满足 $\partial_2^*(\varphi_1) = \varphi_1 \partial_2 = 0$. 因而 $[\varphi_1]$ 代表 $H^1(\text{Hom}_R(C, B)) = \text{Ext}_R^1(A, B)$ 中的同调类.

因而, 一种扩张 $0 \rightarrow B \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} A \rightarrow 0$ 确定 $H^1(\text{Hom}(C, B)) = \text{Ext}_R^1(A, B)$ 中的一个上同调类 $[\varphi_1]$.

对于 A, B 的两种扩张

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow B \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow B \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{g_1} A \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

如果他们确定的上同调类 $[\varphi_1] \in \text{Ext}_R^1(A, B)$ 相同, 则这两种扩张等价, 即

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & B \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \cong & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f_1} & E_1 & \xrightarrow{g_1} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

可换.

习题

- (1) 求 $\mathbb{Z}$ 模上的挠群
 - (1), $\text{Tor}(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z}/3)$,
 - (2), $\text{Tor}(\mathbb{Z}/3, \mathbb{Z}/2)$,
 - (3), $\text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3)$ 。
- (2) 令 p 是一个奇素数, $T[x]$ 为域 $\mathbb{Z}/p$ 上的高度为 p 的截缩多项式环;
即 $T[x] = \mathbb{Z}/p[x]/\langle x^p \rangle$ 。 $\mathbb{Z}/p$ 上有 $T[x]$ 模结构, 定义为: $f(x) \cdot 1 = f(0)$ 即 $x^i \cdot 1 = 0$ 。求 Ext 群 $\text{Ext}_{T[x]}^n(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$ 。

§4.4 泛系数定理

在介绍过张量积、挠群 Tor 和 Ext 群的基本知识以后, 本节我们将介绍泛系数定理; 从代数上讲: 泛系数定理解释的是链复形 C 的同调群与 $C \otimes A$ 的同调群的关系。而从几何上讲: 这是一种由整系数同调群确定一般 R 系数同调群的办法。

首先我们看代数的泛系数定理:

定理4.4.1 设 R 是一个主理想整环, $C = \{C_n, \partial_n\}$ 是 R 上的自由链复形, 则对任何 R 模 A 有以下可裂的短正合序列

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes_R A \xrightarrow{i \otimes 1} H_n(C \otimes_R A) \longrightarrow Tor^R(H_{n-1}(C), A) \longrightarrow 0$$

$\swarrow \quad \searrow$
 κ

如果我们选定主理想整环 $R = \mathbb{Z}$, 选定自由链复形 $C = S(X, A)$ 为奇异链复形, 选定 $\mathbb{Z}$ 模 $A = R$, 则有几何的泛系数定理:

定理4.4.2 对任何拓扑空间偶 (X, A) 及交换幺环 R , 有可裂的短正合序列

$$0 \longrightarrow H_n(X, A) \otimes R \xrightarrow{i \otimes 1} H_n(X, A, R) \longrightarrow Tor(H_{n-1}(X, A), R) \longrightarrow 0$$

$\swarrow \quad \searrow$
 κ

证明 对于主理想整环 R 上的自由链复形

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Ker \partial_n \xrightarrow{i} C_n \xrightarrow{\partial_n} Im \partial_n \longrightarrow 0$$

是一个短正合序列。定义链复形 $Z = \{Z_n = Ker \partial_n, 0\}$, $B_{-1} = \{B_{n-1} = Im \partial_n, 0\}$, 得到链复形的短正合序列:

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\partial} B_{-1} \longrightarrow 0$$

由于 Z_n, B_{n-1} 分别是自由 R 模 C_n, C_{n-1} 的子模, R 是主理想整环, Z_n, B_{n-1} 也是自由 R 模。张量积 A 以后得到正合序列:

$$0 \longrightarrow Z_n \otimes_R A \xrightarrow{i \otimes 1} C_n \otimes_R A \xrightarrow{\partial_n \otimes 1} B_{n-1} \otimes_R A \longrightarrow 0$$

这样我们有链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow Z \otimes_R A \xrightarrow{i \otimes 1} C \otimes_R A \xrightarrow{\partial \otimes 1} B_{-1} \otimes_R A \longrightarrow 0$$

它导出同调群的长正合序列

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & H_n(Z \otimes_R A) & \xrightarrow{(i \otimes 1)_*} & H_n(C \otimes_R A) & \xrightarrow{(\partial \otimes 1)_*} & H_n(B_{-1} \otimes_R A) & \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(Z \otimes_R A) \longrightarrow \cdots \\ & \parallel & & \parallel & & \parallel & \parallel \\ \cdots \longrightarrow & Z_n \otimes_R A & \xrightarrow{(i \otimes 1)_*} & H_n(C \otimes_R A) & \xrightarrow{(\partial \otimes 1)_*} & B_{n-1} \otimes_R A & \xrightarrow{\delta} Z_{n-1} \otimes_R A \longrightarrow \cdots \end{array}$$

由于 $\partial = 0 : Z_n \otimes_R A \rightarrow Z_{n-1} \otimes_R A$ 且 $\partial = 0 : B_{n-1} \otimes_R A \rightarrow B_{n-2} \otimes_R A$, $H_n(Z \otimes_R A) = Z_n \otimes_R A$, $H_n(B_{-1} \otimes_R A) = B_{n-1} \otimes_R A$ 。

考察同态 $(\partial \otimes 1)_* : H_n(C \otimes_R A) \rightarrow H_n(B_{-1} \otimes_R A)$, 由群同态基本定理我们有短正合序列

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\partial \otimes 1)_* \longrightarrow H_n(C \otimes_R A) \longrightarrow \text{Im}(\partial \otimes 1)_* \longrightarrow 0$$

下面我们计算 $\text{Ker}(\partial \otimes 1)_*$ 和 $\text{Im}(\partial \otimes 1)_*$ 。

首先, 由联系同态的定义知

$$\delta = i : H_{n+1}(B_{-1} \otimes_R A) = B_n \otimes_R A \longrightarrow H_n(Z \otimes_R A) = Z_n \otimes_R A$$

是内射, 因而

$$\text{Ker}(\partial \otimes 1)_* = \text{Im}(i \otimes 1)_* \cong Z_n \otimes_R A / \text{Im} \delta = Z_n \otimes A / B_n \otimes_R A = H_n(C) \otimes_R A$$

下面考察

$$\begin{array}{ccc} \text{Im}(\partial \otimes_R 1)_* = \text{Ker} \delta & H_n(B_{-1} \otimes_R A) & \longrightarrow H_{n-1}(Z \otimes_R A) \\ & \parallel & \parallel \\ & B_{n-1} \otimes_R A & \xrightarrow{i} Z_{n-1} \otimes_R A \end{array}$$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow B_{n-1} \xrightarrow{i} Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(C) \longrightarrow 0$$

可以看成是 $H_{n-1}(C)$ 的一个自由分解。张量积 A 以后得到链复形

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow B_{n-1} \otimes_R A \xrightarrow{i} Z_{n-1} \otimes_R A \longrightarrow 0$$

因而 $\text{Ker} \delta = \text{Ker} i = \text{Tor}^R(H_{n-1}(C), A)$ 。定理得证。

$$\text{例1 已知 } H_n(\mathbb{R}P^{2k}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z}/2 & n = 2s - 1 < 2k \\ 0 & n = 2s \text{ 或 } > 2k \end{cases} \text{ 求 } H_n(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2)。$$

由定理4.4.2知

(1) 对于 $n = 0$ 有正合序列

$$0 \longrightarrow H_0(\mathbb{R}P^{2k}) \otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H_0(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \text{Tor}(H_{-1}(\mathbb{R}P^{2k}), \mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0$$

此时认为 $H_{-1}(\mathbb{R}P^{2k}) = 0$, 因而

$$H_0(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) = H_0(\mathbb{R}P^{2k}) \otimes \mathbb{Z}/2 = \mathbb{Z}/2。$$

(2) 对于 $n = 1$ 有正合序列

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{R}P^{2k}) \otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H_1(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \text{Tor}(H_0(\mathbb{R}P^{2k}), \mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0$$

此时 $H_1(\mathbb{R}P^{2k}) = \mathbb{Z}/2$, 而 $\text{Tor}(H_0(\mathbb{R}P^{2k}), \mathbb{Z}/2) = \text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) = 0$ 。因而

$$H_1(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2。$$

(3) 当 $1 < n = 2s - 1 < 2k$ 取奇数时, 正合序列

$$0 \longrightarrow H_{2s-1}(\mathbb{R}P^{2k}) \otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H_{2s-1}(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \text{Tor}(H_{2s-2}(\mathbb{R}P^{2k}), \mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0$$

中 $H_{2s-1}(\mathbb{R}P^{2k}) = \mathbb{Z}/2$, $H_{2s-2}(\mathbb{R}P^{2k}) = 0$ 。 $H_{2s-1}(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ 。

(4) 当 $0 < n = 2s \leq 2k$ 时, 正合序列

$$0 \longrightarrow H_{2s}(\mathbb{R}P^{2k}) \otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow H_{2s}(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \text{Tor}(H_{2s-1}(\mathbb{R}P^{2k}), \mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0$$

中 $H_{2s}(\mathbb{R}P^{2k}) = 0$, $\text{Tor}(H_{2s-1}(\mathbb{R}P^{2k}), \mathbb{Z}/2) = \text{Tor}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ 。

因而

$$H_{2s}(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2。$$

(5) 当 $n > 2k$ 时, $H_n(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2) = 0$ 。

$H_n(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2)$ 常被记为 $\mathbb{Z}/2[x]/\langle x^{2k+1} \rangle$ 。 $\mathbb{Z}/2$ 上的多项式商掉 x^{2k+1} , 其中 x^n 是 $H_n(\mathbb{R}P^{2k}, \mathbb{Z}/2)$ 的生成元。

§4.4 Künneth 公式

Künneth公式可以分为代数Künneth公式和几何Künneth公式。代数Künneth公式讲的是：怎样确定两个链复形张量积的同调群。而几何Künneth公式是一种利用 X 和 Y 的同调群确定乘积空间 $X \times Y$ 的同调群的方法。相对来说代数Künneth公式较容易证明，为此我们先介绍代数Künneth公式。

在本节我们将限定环 R 是一个主理想整环。

定义4.5.1 设 $C = \{C_n, \partial'_n\}$, $D = \{D_n, \partial''_n\}$ 是主理想整环 R 上的两个链复形。定义它们的张量积 $C \otimes D$ 为链复形 $\{(C \otimes D)_n, \partial_n\}$ ，其中

$$(C \otimes D)_n = \bigoplus_{i=0}^n C_i \otimes D_{n-i} = \bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes D_j$$

边缘同态 $\partial_n : (C \otimes D)_n \rightarrow (C \otimes D)_{n-1}$ 在 $(C \otimes D)_n$ 的子模 $C_i \otimes D_j$, $i+j=n$ 上定义为：对 $C_i \otimes D_j$ 中的生成元 $a \otimes b$, $\partial_n(a \otimes b) = \partial'_i(a) \otimes b + (-1)^i a \otimes \partial''_j(b)$ 。即： $(C \otimes D)_n$ 是下图中斜向的各 R 模的直和，其边缘同态是向右下斜向各 R 模的直和的映射。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & \vdots & \longrightarrow C_{i+2} \otimes D_{j-2} \longrightarrow \cdots \\
 & & & & & \downarrow & \\
 & & & & \cdots & \longrightarrow C_{i+1} \otimes D_{j-1} \longrightarrow C_{i+1} \otimes D_{j-2} \longrightarrow \cdots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & \vdots & \longrightarrow C_i \otimes D_j \longrightarrow C_i \otimes D_{j-1} \longrightarrow \vdots \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & \cdots & \longrightarrow C_{i-1} \otimes D_{j+1} \longrightarrow C_{i-1} \otimes D_j \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow C_{i-2} \otimes D_{j+2} \longrightarrow C_{i-2} \otimes D_{j+1} \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
 \end{array}$$

注意到 $\partial'_i(a) \otimes b \in C_{i-1} \otimes D_j$, $a \otimes \partial''_j(b) \in C_i \otimes D_{j-1}$,

$$\partial_n : (C \otimes D)_n \rightarrow (C \otimes D)_{n-1}$$

是同态。由

$$\begin{aligned}
 \partial \partial(a \otimes b) &= \partial (\partial(a) \otimes b + (-1)^i a \otimes \partial(b)) \\
 &= \partial \partial(a) \otimes b + (-1)^{i-1} \partial(a) \otimes \partial(b) + (-1)^i \partial(a) \otimes \partial(b) + (-1)^i a \otimes \partial \partial(b)
 \end{aligned}$$

知 $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ 。

定义4.5.2 设 $A = \{A_n\}$, $B = \{B_n\}$ 是分次 R 模，定义 $A \otimes B$ 和 $Tor^R(A, B)$ 也是分次 R 模；其中

$$(A \otimes B)_n = \bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes B_j \quad Tor^R(A, B)_n = \bigoplus_{i+j=n} Tor^R(A_i, B_j).$$

对于链复形 C ，它的各维同调群 $H_*(C) = \{H_n(C)\}$ 构成分次 R 模。

定理4.5.1 (代数Künneth公式) 设 C, D 是主理想整环 R 上的自由链复形，则有可裂的短正合序列

$$0 \longrightarrow [H_*(C) \otimes H_*(D)] \longrightarrow H_n(C \otimes D) \longrightarrow [Tor^R(H_*(C), H_*(D))]_{n-1} \longrightarrow 0.$$

推论4.5.2 如果 R 是一个域，则 $H_i(C), H_j(D)$ 都是 R 上的线性空间， $Tor^R(H_i(C), H_j(D)) \equiv 0$ 。

$$H_n(C \otimes D) \cong \bigoplus_{i+j=n} H_i(C) \otimes H_j(D)$$

定理4.5.1的证明 代数Künneth公式的证明思路和泛系数定理的证明很相近，只是更复杂。

首先由链复形 C 构造链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{i} D \xrightarrow{\partial} B_{-1} \longrightarrow 0$$

其中 $Z_i = Ker \partial_i$, $B_{i-1} = Im \partial_i$ 。由于 C 是主理想整环 R 上的自由链复形，对任何 i , Z_i, B_{i-1} 都是自由 R 模。因而对任何 j

$$0 \longrightarrow Z_i \otimes D_j \xrightarrow{i \otimes 1} C_i \otimes D_j \xrightarrow{\partial \otimes 1} B_{i-1} \otimes D_j \longrightarrow 0$$

是短正合序列。固定 $i+j=n$ 做直和以后

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} Z_i \otimes D_j \xrightarrow{i \otimes 1} \bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes D_j \xrightarrow{\partial \otimes 1} \bigoplus_{i+j=n} B_{i-1} \otimes D_j \longrightarrow 0$$

还是短正合序列。

考察链复形 $Z \otimes D, C \otimes D, B_{-1} \otimes D$ 的边缘同态：注意到 B_{-1} 的第 i 个链群是 B_{i-1} ，对于 $(B \otimes D)_n$ 的子模 $B_{i-1} \otimes D_j$ 中的生成元 $\partial_i(a) \otimes b$

$$\partial_n(\partial_i(a) \otimes b) = \partial_{i-1}\partial_i(a) \otimes b + (-1)^i \partial_i(a) \otimes \partial_j(b) = (-1)^i \partial_i(a) \otimes \partial_j(b)$$

对 $(C \otimes D)_n$ 的子模 $C_i \otimes D_j$ 中的生成元 $a \otimes b$,

$$\begin{aligned} (\partial \otimes 1)\partial_n(a \otimes b) &= (\partial \otimes 1)(\partial_i(a) \otimes b + (-1)^i a \otimes \partial_j(b)) \\ &= \partial_{i-1}\partial_i(a) \otimes b + (-1)^i \partial_i(a) \otimes \partial_j(b) \\ &= (-1)^i \partial_i(a) \otimes \partial_j(b) \\ &= \partial_n(\partial \otimes 1)(a \otimes b) \end{aligned}$$

我们有短正合序列的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i+j=n} Z_i \otimes D_j & \xrightarrow{i \otimes 1} & \bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes D_j & \xrightarrow{\partial \otimes 1} & \bigoplus_{i+j=n} B_{i-1} \otimes D_j \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i+j=n-1} Z_i \otimes D_j & \xrightarrow{i \otimes 1} & \bigoplus_{i+j=n-1} C_i \otimes D_j & \xrightarrow{\partial \otimes 1} & \bigoplus_{i+j=n-1} B_{i-1} \otimes D_j \longrightarrow 0 \end{array}$$

即有张量积链复形的短正合序列

$$0 \longrightarrow Z \otimes D \xrightarrow{i \otimes 1} C \otimes D \xrightarrow{\partial \otimes 1} B_{-1} \otimes D \longrightarrow 0$$

它导出同调群的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(B_{-1} \otimes D) \xrightarrow{\delta} H_n(Z \otimes D) \xrightarrow{(i \otimes 1)_*} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{(\partial \otimes 1)_*} H_n(B_{-1} \otimes D) \longrightarrow \cdots$$

因而有短正合序列

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\partial \otimes 1)_* \longrightarrow H_n(C \otimes D) \longrightarrow \text{Im}(\partial \otimes 1)_* \longrightarrow 0$$

下面我们计算 $H_n(Z \otimes D)$, $H_n(B_{-1} \otimes D)$ 及 $\text{Ker}(\partial \otimes 1)_*$, $\text{Im}(\partial \otimes 1)_*$ 。

考虑链复形 $Z \otimes D$ 的直和项及边缘同态

$$\begin{array}{ccccccc} Z_0 \otimes D_n & & Z_1 \otimes D_{n-1} & & Z_2 \otimes D_{n-2} & \cdots & Z_{n-1} \otimes D_1 & & Z_n \otimes D_0 \\ \downarrow 1 \otimes \partial & \searrow 0 & \downarrow 1 \otimes \partial & \searrow 0 & \downarrow 1 \otimes \partial & & \downarrow 1 \otimes \partial & \searrow 0 & \downarrow 0 \\ Z_0 \otimes D_{n-1} & & Z_1 \otimes D_{n-2} & & Z_2 \otimes D_{n-3} & \cdots & Z_{n-1} \otimes D_0 & & 0 \end{array}$$

我们注意到 $\partial_n = 1 \otimes \partial : Z_i \otimes D_j \rightarrow Z_i \otimes D_{j-1}$ 。因而由 Z_i 是自由 R 模知

$$H_n(Z \otimes D) = \bigoplus_{i+j=n} Z_i \otimes H_j(D).$$

同理 $H_{n+1}(B_{-1} \otimes D) = \bigoplus_{i+j=n} B_i \otimes H_j(D)$ 。而联系同态

$$\delta = i \otimes 1 : H_{n+1}(B_{-1} \otimes D) = \bigoplus_{i+j=n} B_i \otimes H_j(D) \longrightarrow H_n(Z \otimes D) = \bigoplus_{i+j=n} Z_i \otimes H_j(D)$$

是内射。因而

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\partial \otimes 1)_* &= \text{Im}(i \otimes 1)_* = H_n(Z \otimes D) / \text{Ker}(i \otimes 1)_* = H_n(Z \otimes D) / \text{Im} \delta \\ &= \bigoplus_{i+j=n} Z_i \otimes H_j(D) / \bigoplus_{i+j=n} B_i \otimes H_j(D) = \bigoplus_{i+j=n} H_i(C) \otimes H_j(D) \end{aligned}$$

下面计算 $\text{Im}(\partial \otimes 1)_* = \text{Ker} \delta$ 。考虑 $H_n(B_{-1} \otimes D)$ 和 $H_{n-1}(Z \otimes D)$ 的直和项

$$\begin{array}{ccc} \delta = i \otimes 1 & B_{i-1} \otimes H_j(D) & \longrightarrow Z_{i-1} \otimes H_j(D) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & H_n(B_{-1} \otimes D) & \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(Z \otimes D) \end{array}$$

同样，由于 $Z_{i-1} = \text{Ker} \partial_{i-1}$, $B_{i-1} = \text{Im} \partial_i$ 都是自由 R 模

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow B_{i-1} \xrightarrow{i} Z_{i-1} \longrightarrow H_{i-1}(C) \longrightarrow 0$$

可以看做是 $H_{i-1}(C)$ 的一个自由分解。张量积 $H_j(C)$ 之后得到链复形

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow B_{i-1} \otimes H_j(D) \xrightarrow{(i \otimes 1)} Z_{i-1} \otimes H_j(D) \longrightarrow 0$$

而 $\text{Ker}(i \otimes 1) = \text{Tor}^R(H_{i-1}(C), H_j(D))$ 。因而

$$\text{Im}(\partial \otimes 1)_* = \text{Ker} \delta = \bigoplus_{i+j=n} \text{Tor}^R(H_{i-1}(C), H_j(D)) = \bigoplus_{i+j=n-1} \text{Tor}^R(H_i(C), H_j(D))$$

定理结论成立。

根据定义：对于环 R 上的两个模 A, B ，做 R 模 A 的自由分解 C

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

张量积 B 得到链复形 $C \otimes B$

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \otimes B \xrightarrow{\partial \otimes 1} C_n \otimes B \xrightarrow{\partial \otimes 1} C_{n-1} \otimes B \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \otimes B \xrightarrow{\partial \otimes 1} C_0 \otimes B \longrightarrow 0$$

$C \otimes B$ 的同调群 $H_n(C \otimes B) = \text{Tor}_n^R(A, B)$ 。

做 R 模 B 的自由分解

$$\cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} D_n \xrightarrow{\partial_n} D_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_1 \xrightarrow{\partial_1} D_0 \xrightarrow{\varepsilon} B \longrightarrow 0$$

张量积 A 得到链复形 $D \otimes A$

$$\cdots \longrightarrow D_{n+1} \otimes A \xrightarrow{\partial \otimes 1} D_n \otimes A \xrightarrow{\partial \otimes 1} D_{n-1} \otimes A \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_1 \otimes A \xrightarrow{\partial \otimes 1} D_0 \otimes A \longrightarrow 0$$

$D \otimes A$ 的同调群 $H_n(D \otimes A) = \text{Tor}_n^R(B, A)$ 。从定义看 $\text{Tor}_n^R(A, B)$ 与 $\text{Tor}_n^R(B, A)$ 并不相同。

当 A, B 是主理想整环 R 上的模时，对于 A, B 的自由分解 C, D 有：

$$H_i(C) = \begin{cases} A & i = 0 \\ 0 & i > 0 \end{cases} \quad H_j(D) = \begin{cases} B & j = 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases}$$

考虑 C 与 D 的张量积，显然作为链复形 $C \otimes D$ 与 $D \otimes C$ 同构，因而它们的同调群同构。用Künneth公式计算 $C \otimes D$ 由正合序列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=1} H_i(C) \otimes H_j(D) \longrightarrow H_1(C \otimes D) \longrightarrow \text{Tor}^R(H_0(C), H_0(D)) \longrightarrow 0$$

知 $H_1(C \otimes D) = \text{Tor}^R(A, B)$ 。用Künneth公式计算 $D \otimes C$ 得到 $H_1(D \otimes C) = \text{Tor}^R(B, A)$ 。因而当 R 是主理想整环时

$$\text{Tor}^R(A, B) = \text{Tor}^R(B, A)$$

当 R 不是主理想整环时，同样有：

定理4.5.3 对任何交换幺环 R 上的模 A, B ， $\text{Tor}_n^R(A, B) \cong \text{Tor}_n^R(B, A)$ 。

这是同调代数中非常重要、也是比较难证明的一个定理（要用到谱序列的知识）。请读者参照（[6]第5章，谱序列）并给出一个证明）

例1 标准单形 Δ^p, Δ^q 是可缩空间，因而其整系数奇异链复形 $S(\Delta^p)$ 的同调群为

$$H_i(\Delta^p) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ 0 & i > 0 \end{cases}$$

由代数Künneth公式知有短正合序列

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i+j=n} H_i(\Delta^p) \otimes H_j(\Delta^q) \rightarrow H_n(S(\Delta^p) \otimes S(\Delta^q)) \rightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} \text{Tor}^{\mathbb{Z}}(H_i(\Delta^p), H_j(\Delta^q)) \rightarrow 0$$

$$\text{因而 } H_n(S(\Delta^p) \otimes S(\Delta^q)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

引理4.5.4 (Eilenberg-Zilber引理) 对任何拓扑空间 X, Y 有自然的整系数链复形的链同伦等价映射 $\rho: S(X \times Y) \longrightarrow S(X) \otimes S(Y)$ 。

因此对于主理想整环 R ， $S(X \times Y, R) = S(X \times Y) \otimes R$ 与 $S(X) \otimes S(Y) \otimes R = S(X, R) \otimes S(Y, R)$ 链同伦等价。 $H_n(X \times Y, R) = H_n(S(X, R) \otimes S(Y, R))$ 。

由代数Künneth公式知：

定理4.5.5 (Künneth公式) 设 R 是一个主理想整环, 对任何拓扑空间 X, Y 有可裂的短正合序列

$$0 \rightarrow [H_*(X, R) \otimes H_*(Y, R)]_n \rightarrow H_n(X \times Y, R) \rightarrow [Tor^R(H_*(X, R), H_*(Y, R))]_{n-1} \rightarrow 0$$

特别的, 如果 R 是一个域, 则 $H_i(X, R)$ 和 $H_j(Y, R)$ 都是自由 R 模,

$$Tor^R(H_i(X, R), H_j(Y, R)) \equiv 0.$$

推论4.5.6 如果 R 是一个域, 则对任何拓扑空间 X, Y 有同构

$$H_n(X \times Y, R) \cong \bigoplus_{i+j=n} H_i(X, R) \otimes H_j(Y, R)$$

引理4.5.4的证明 Eilenberg-Zilber引理的证明很难, 读者可以参考[4]的第13章。在此我们只给出引理证明的主要思路。

构造链映射 ρ 的入手点在于要求 ρ 是自然的链映射, 即: 当有映射

$$f: X \rightarrow X', \quad g: Y \rightarrow Y'$$

时, 有以下的交换图

$$\begin{array}{ccc} S(X \times Y) & \xrightarrow{\rho} & S(X) \otimes S(Y) \\ \downarrow (f \times g)_\# & & \downarrow f_\# \otimes g_\# \\ S(X' \times Y') & \xrightarrow{\rho} & S(X') \otimes S(Y') \end{array}$$

注意到, 任何 $X \times Y$ 中的 n 维奇异单形 $\sigma: \Delta^n \rightarrow X \times Y$ 可以表示成 $\sigma = (f, g)$ 其中

$$f: \Delta^n \rightarrow X, \quad g: \Delta^n \rightarrow Y.$$

记 $\iota_n: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ 为单位映射, 并记 $\delta_n: \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times \Delta^n$ 为对角映射 (即 $\delta_n(x) = (x, x)$)。则

$$\sigma = (f, g) = (f \times g) \cdot \delta_n: \Delta^n \xrightarrow{\delta_n} \Delta^n \times \Delta^n \xrightarrow{(f \times g)} X \times Y$$

将 $\delta_n: \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times \Delta^n$ 看成 $S_n(\Delta^n \times \Delta^n)$ 中的 n 维奇异单形, 将

$$f \times g: \Delta^n \times \Delta^n \rightarrow X \times Y$$

看成拓扑空间之间的映射。则 $f \times g$ 诱导出奇异链群间的同态

$$(f \times g)_\#: S_n(\Delta^n \times \Delta^n) \rightarrow S_n(X \times Y)$$

并且 $(f \times g)_\#(\delta_n) = (f, g) = \sigma$ 。此时如果我们知道链映射

$$\rho: S_n(\Delta^n \times \Delta^n) \rightarrow \bigoplus_{i+j=n} S_i(\Delta^n) \otimes S_j(\Delta^n)$$

中 $\rho(\delta_n)$ 在 $\bigoplus_{i+j=n} S_i(\Delta^n) \otimes S_j(\Delta^n)$ 中的像 (只要知道 $\rho(\delta_n)$ 的像就够了), 则由自然性可以定义 $\rho: S_n(X \times Y) \rightarrow (S(X) \otimes S(Y))_n$ 为

$$(4.5.7) \quad \rho((f, g)) = \rho \cdot (f \times g)_\#(\delta_n) = (f_\# \otimes g_\#)(\rho(\delta_n))$$

见下图

$$\begin{array}{ccc} S_n(\Delta^n \times \Delta^n) & \xrightarrow{\rho} & \bigoplus_{i+j=n} S_i(\Delta^n) \otimes S_j(\Delta^n) \\ \downarrow (f \times g)_\# & & \downarrow f_\# \otimes g_\# \\ S_n(X \times Y) & \xrightarrow{\rho} & \bigoplus_{i+j=n} S_i(X) \otimes S_j(Y) \end{array}$$

下面我们将利用零调自由模型定理归纳地给出 $\rho(\delta_n)$ 进而给出 $\rho : S_n(X \times Y) \rightarrow (S(X) \otimes S(Y))_n$ 的定义。

首先 $(S(\Delta^0) \otimes S(\Delta^0))_0 = S_0(\Delta^0) \otimes S_0(\Delta^0)$, 定义

$$\rho(\delta_0) = \iota_0 \otimes \iota_0$$

进而利用(4.5.7)给出

$$\rho : S_0(X \times Y) \rightarrow (S(X) \otimes S(Y))_0.$$

此时链映射

$$\rho : S_0(X \times Y) \rightarrow S_0(X) \otimes S_0(Y)$$

为: 对任何 $\sigma = (x, y) \in S_0(X \otimes Y)$, $\rho(x, y) = x \otimes y$ 。

之后我们构造

$$\rho : S_1(\Delta^1 \times \Delta^1) \rightarrow \bigoplus_{i+j=1} S_i(\Delta_1) \otimes S_j(\Delta^1),$$

其中最重要的是找到 $\rho(\delta_1)$ 在 $[S_0(\Delta^1) \otimes S_1(\Delta^1)] \oplus [S_1(\Delta^1) \otimes S_0(\Delta^1)]$ 中的像。由此可以利用(4.5.7)定义 $\rho : S_1(X \times Y) \rightarrow [S(X) \otimes S(Y)]_n$ 。

首先考察 $S(\Delta^n \times \Delta^n)$ 和 $S(\Delta^n) \otimes S(\Delta^n)$ 的同调群。由例1我们知道

$$H_j(S(\Delta^n) \otimes S(\Delta^n)) = H_j(\Delta^n \times \Delta^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & j = 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases}$$

$H_0(\Delta^n \times \Delta^n)$ 的生成元为 $[(x, y)]$, $H_0(S(\Delta^n) \otimes S(\Delta^n))$ 的生成元为 $[x \otimes y]$, 其中 $x, y : \Delta^0 \rightarrow \Delta^n$ 为将 Δ^0 中唯一的点映射到 Δ^n 中 x, y 的映射。因而有下面的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} S_1(\Delta^1 \times \Delta^1) & \xrightarrow{\partial_1} & S_0(\Delta^1 \times \Delta^1) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho & & \parallel & & \\ \bigoplus_{i+j=1} S_i(\Delta^1) \otimes S_j(\Delta^1) & \xrightarrow{\partial'_1} & S_0(\Delta^1) \otimes S_0(\Delta^1) & \xrightarrow{\varepsilon'} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 $\rho : S_0(\Delta^1 \times \Delta^1) \rightarrow S_0(\Delta^1) \otimes S_0(\Delta^1)$ 已经给出。对于 $\delta_1 \in S_1(\Delta^1 \times \Delta^1)$, 用追图法发现

$$\varepsilon' \cdot \rho \cdot \partial_1(\delta_1) = \varepsilon \cdot \partial_1(\delta_1) = 0$$

因而 $\rho \cdot \partial_1(\delta_1) \in \text{Ker} \varepsilon'$ 。而由

$$H_j(S(\Delta^1) \otimes S(\Delta^1)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & j = 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases}$$

知下面的一行是正合的, 因而 $\text{Ker}\varepsilon' = \text{Im}\partial_1'$ 。存在 $z \in \bigoplus_{i+j=1} S_i(\Delta^1) \otimes S_j(\Delta^1)$ 使得 $\partial_1'(z) = \rho \cdot \partial_1(\delta_1)$ 。定义 $\rho(\delta_1) = z$, 则 $\partial_1' \cdot \rho(\delta_1) = \rho \cdot \partial_1(\delta)$ 。利用(4.5.7)扩张成

$$\rho : S_1(X \times Y) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=1} S_i(X) \otimes S_j(Y)$$

其中 ρ 满足 $\partial_1' \cdot \rho = \rho \cdot \partial_1$ 。

归纳地假设 $\rho : S_{n-1}(X \times Y) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} S_i(X) \otimes S_j(Y)$ 已经给出。考虑

下面的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} S_n(\Delta^n \times \Delta^n) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(\Delta^n \times \Delta^n) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & S_{n-2}(\Delta^n \times \Delta^n) & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho & & \downarrow \rho & & \\ \bigoplus_{i+j=n} S_i(\Delta^n) \otimes S_j(\Delta^n) & \xrightarrow{\partial_n'} & \bigoplus_{i+j=n-1} S_i(\Delta^n) \otimes S_j(\Delta^n) & \xrightarrow{\partial_{n-1}'} & \bigoplus_{i+j=n-2} S_i(\Delta^n) \otimes S_j(\Delta^n) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

同样用追图法知 $\partial_{n-1}' \cdot \rho \cdot \partial_n(\delta_n) = 0$, $\rho \cdot \partial_n(\delta_n) \in \text{Ker}\partial_{n-1}'$ 。而由

$$H_j(S(\Delta^n) \otimes S(\Delta^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & j = 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases}$$

知下面一行是正合的, $\text{Ker}\partial_{n-1}' = \text{Im}\partial_n'$ 。存在 $z_n \in \bigoplus_{i+j=n} S_i(\Delta^n) \otimes S_j(\Delta^n)$ 使得 $\partial_n'(z_n) = \rho \cdot \partial_n(\delta_n)$ 。定义 $\rho(\delta_n) = z_n$, 完成归纳。

为证明 $\rho : S(X \times Y) \longrightarrow S(X) \otimes S(Y)$ 是自然的链复形的链同伦等价映射, 我们还需要构造链映射

$$\varphi : S(X) \otimes S(Y) \longrightarrow S(X \times Y)$$

和链同伦 H, G , 使得 $\varphi \cdot \rho \stackrel{H}{\simeq} 1$, $\rho \cdot \varphi \stackrel{G}{\simeq} 1$ 。

构造自然的链映射 $\varphi_n : \bigoplus_{i+j=n} S_i(X) \otimes S_j(Y) \longrightarrow S_n(X \times Y)$ 的关键是给出直和项 $S_i(\Delta^i) \otimes S_j(\Delta^j)$ 中生成元 $\iota_i \otimes \iota_j$ 在 $S_n(\Delta^i \times \Delta^j)$ 中的像。当知道

$$\varphi(\iota_i \otimes \iota_j) \in S_n(\Delta^i \times \Delta^j)$$

之后, 对任何直和项 $S_i(X) \otimes S_j(Y)$ 中的生成元 $f \otimes g$, 其中

$$f : \Delta^i \rightarrow X, \quad g : \Delta^j \rightarrow Y$$

为奇异单形, 考察 f, g 诱导的链映射 $f_\# : S(\Delta^i) \rightarrow S(X)$ 和 $g_\# : S(\Delta^j) \rightarrow S(Y)$ 发现

$$(f_\# \otimes g_\#)(\iota_i \otimes \iota_j) = f \otimes g.$$

由自然性

$$\begin{array}{ccc} S_i(\Delta^i) \otimes S_j(\Delta^j) & \xrightarrow{\varphi} & S_n(\Delta^i \times \Delta^j) \\ f_\# \otimes g_\# \downarrow & & \downarrow (f \times g)_\# \\ S_i(X) \otimes S_j(Y) & \xrightarrow{\varphi} & S_n(X \times Y) \end{array}$$

定义 $\varphi(f \otimes g) = (f \times g)_\# \cdot \varphi(\iota_i \otimes \iota_j)$ 即可。链同伦

$H = \{H_n : S_n(X \times Y) \rightarrow S_{n+1}(X \times Y)\}$ 和 $G = \{G_n : [S(X) \otimes S(Y)]_n \rightarrow [S(X) \otimes S(Y)]_{n+1}\}$

的构造办法于此类似。

同样用归纳法假设 $\varphi : \bigoplus_{r+s=n-1} S_r(X) \otimes S_s(Y)$ 已经给出。由

$$H_n(\Delta^i \times \Delta^j) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

我们知道下面图表中的下面一行是正合的

$$\begin{array}{ccccccc} S_i(\Delta^i) \otimes S_j(\Delta^j) & \xrightarrow{\partial'_n} & \bigoplus_{r+s=n-1} S_r(\Delta^i) \otimes S_s(\Delta^j) & \xrightarrow{\partial'_{n-1}} & \bigoplus_{r+s=n-2} S_r(\Delta^i) \otimes S_s(\Delta^j) & \rightarrow & \cdots \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \\ S_n(\Delta^i \times \Delta^j) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(\Delta^i \times \Delta^j) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & S_{n-2}(\Delta^i \times \Delta^j) & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

由 $\partial_{n-1} \cdot \varphi \cdot \partial'_n(\iota_i \otimes \iota_j) = 0$ 知存在 $z_n \in S_n(\Delta^i \times \Delta^j)$ 使得 $\partial_n(z_n) = \varphi \cdot \partial'_n(\iota_i \otimes \iota_j)$ 。

定义 $\varphi(\iota_i \otimes \iota_j) = z_n$ 即可。

例2 求 $S^1 \times S^1$ 的整系数同调群

我们知道 $H_i(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 1 \text{ 时} \\ 0 & i > 1 \text{ 时} \end{cases}$ 。由 Künneth 公式，有短正合序列

$$0 \longrightarrow [H_*(S^1) \otimes H_*(S^1)]_n \longrightarrow H_n(S^1 \times S^1) \longrightarrow [Tor(H_*(S^1), H_*(S^1))]_{n-1} \longrightarrow 0$$

由于 $H_*(S^1)$ 都是自由 $\mathbb{Z}$ 模， $Tor(H_i(S^1), H_j(S^1)) = 0$ 。

$$H_n(S^1 \times S^1) \cong \bigoplus_{i+j=n} H_i(S^1) \otimes H_j(S^1)$$

因而

$$H_0(S^1 \times S^1) \cong H_0(S^1) \otimes H_0(S^1) = \mathbb{Z},$$

$$H_1(S^1 \times S^1) \cong (H_0(S^1) \otimes H_1(S^1)) \oplus (H_1(S^1) \otimes H_0(S^1)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

$$H_2(S^1 \times S^1) \cong H_1(S^1) \otimes H_1(S^1) = \mathbb{Z},$$

$$\text{当 } n > 2 \text{ 时 } H_n(S^1 \times S^1) = 0.$$

习题4.5.1 利用 Künneth 公式求 $S^m \times S^n$, $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$, $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m$ 的各维整系数同调群。

习题4.5.2 利用 Künneth 公式求 $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m$ 的 $\mathbb{Z}/2$ 系数同调群 $H_i(\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}/2)$ 。

习题4.5.3 证明：如果 R 是一个域，则 $H_n(X \times Y, R) = \bigoplus_{i+j=n} H_i(X, R) \otimes H_j(Y, R)$ 。