

王向军《拓扑学》第三章同调论自学与计算讲义

以王讲义第三章为主线，参照 Hatcher *Algebraic Topology* 同调部分

目录

使用说明与第三章主线	4
先把这一章讲成人话	4
1 奇异链群与奇异同调群	5
1.1 本节在整章中的作用	5
1.2 核心定义	5
1.3 几何直观	6
1.4 闭链、边缘链和同调群	6
1.5 计算方法	7
1.6 例题：点空间和可缩空间	7
1.7 例题：道路连通空间的 H_0	8
1.8 常见误区	8
1.9 自测题	8
2 同调群的同伦不变性	9
2.1 本节在整章中的作用	9
2.2 核心定义	9
2.3 几何直观	9
2.4 证明思路	9
2.5 计算方法	10
2.6 例题：去掉原点的欧氏空间	10
2.7 例题：判断诱导同态	11
2.8 常见误区	11
2.9 自测题	11
3 π_1 与 H_1 的关系	11

3.1	本节在整章中的作用	11
3.2	核心结论	12
3.3	计算方法	12
3.4	例题：楔和圆周	12
3.5	例题：环面的 H_1	12
3.6	常见误区	13
3.7	自测题	13
4	相对同调与长正合列	13
4.1	本节在整章中的作用	13
4.2	核心定义	13
4.3	几何直观	14
4.4	长正合列	14
4.5	证明思路	14
4.6	计算方法	14
4.7	例题：(D^n, S^{n-1}) 的相对同调	15
4.8	例题：点对的相对同调	15
4.9	常见误区	16
4.10	自测题	16
5	切除定理	16
5.1	本节在整章中的作用	16
5.2	核心定理	17
5.3	几何直观	17
5.4	证明思路	17
5.5	计算方法	17
5.6	例题：球面对球面的归纳	17
5.7	常见误区	18
5.8	自测题	18
6	Mayer–Vietoris 序列	18
6.1	本节在整章中的作用	18
6.2	核心定理	18
6.3	几何直观	18
6.4	计算方法	19
6.5	例题：球面同调	19

6.6	例题：楔和空间	19
6.7	例题：环面去掉一个点	20
6.8	例题：环面去掉两个点	20
6.9	常见误区	21
6.10	自测题	21
7	同调群的应用与常见模型汇总	21
7.1	本节在整章中的作用	21
7.2	常见空间同调表	22
7.3	判断空间能否变形成简单空间	22
7.4	判断诱导同态	22
7.5	长正合列的典型追图	23
7.6	常见错误计算的反例	23
7.7	总复习题	24
8	逐节讲解加强与计算专题	24
8.1	专题一：为什么奇异同调的定义这么绕	24
8.2	专题二： H_0 为什么只数道路连通分支	25
8.3	专题三：怎样真正算 S^1 的同调	25
8.4	专题四：可缩、同伦等价、形变收缩到底怎么用	26
8.5	专题五：球面同调的计算逻辑	27
8.6	专题六：楔和与图的同调怎么一眼看出来	27
8.7	专题七：环面去点为什么会变成楔和	28
8.8	专题八：相对同调不要怕，先看一句话	28
8.9	专题九：长正合列追图到底在追什么	29
8.10	专题十：Mayer–Vietoris 如何选覆盖	29
8.11	专题十一：映射诱导同态的题怎么做	30
8.12	专题十二：一张做题决策表	30
8.13	专题十三：几个必须会的快速计算	30
8.14	专题十四：最后再说一遍本章逻辑	31

使用说明与第三章主线

本讲义以王向军《拓扑学》第三章为主线，目标不是把定义重新排一遍，而是帮助读者在题目中真正会算同调群、会判断该用哪个工具。王讲义第三章的内容顺序为：

§3.1 奇异链群与奇异同调群， §3.2 同调群的同伦不变性， §3.3 π_1 与 H_1 的关系，
§3.4 相对同调与长正合列， §3.5 切除定理， §3.6 Mayer–Vietoris 序列， §3.7 同调群的应用。
Hatcher 的相关章节强调几何图像：奇异单形可以弯曲、折叠、退化，因此奇异同调不要求空间本身有三角剖分。王讲义更强调链群、链映射、正合列和计算。本讲义把两者结合起来：先讲清楚对象，再给出做题流程。

全章计算路线

遇到同调题时，先按下面顺序思考：

1. 数道路连通分支，先确定 H_0 。
2. 看空间是否可缩，或是否形变收缩到常见模型。
3. 对常见模型直接引用：点、 S^n 、楔和、图、环面、去点曲面。
4. 若题中有子空间 $A \subset X$ ，优先考虑相对同调长正合列。
5. 若空间由两块开集或好子空间拼成，优先考虑 Mayer–Vietoris。
6. 若问映射诱导同态，先找生成元，再看映射把生成元送到几倍生成元。

先把这一章讲成人话

第三章一开始会显得很抽象，因为它先定义了很多“看不见”的东西：奇异单形、链群、边缘算子、闭链、边缘链。不要急着把这些定义背下来。更好的理解方式是先记住一句话：

同调就是把“洞”翻译成阿贝尔群。

但是“洞”这个词太直观，不能直接拿来证明或计算。于是我们做三步。

第一步，把空间里的点、路径、曲面片统一叫作“单形”。它们不一定是直的，也不一定嵌入在空间里，只要是从标准单形连续映到 X 的映射就行。这就是“奇异”的意思：允许弯曲、折叠、退化。Hatcher 特别强调这一点，因为这样我们不必先给空间三角剖分。

第二步，把这些单形做整数线性组合，得到链。链可以相加、相减，所以几何对象进入了代数世界。例如两条同方向的路径可以相加，反方向路径可以用负号表示。

第三步，用边缘算子 ∂ 判断一条链有没有边界。没有边界的链叫闭链；如果一个闭链其实是更高维链的边界，那它围住了一块东西，不算真正的洞。于是

$$H_q(X) = \frac{\text{闭链}}{\text{边缘链}}$$

就是“把能填起来的洞除掉，留下填不起来的洞”。

这就是本章的核心故事。后面出现的同伦不变性、相对同调、切除、Mayer–Vietoris，都不是新的主题，而是为了让这个故事变得可计算。真正做题时，我们几乎不会直接拿无限大的奇异链群硬算，而是把空间变形、分解、相对化，再用正合列把几何问题变成代数问题。

本章最重要的三种眼光

1. **变形眼光**：空间能不能形变收缩到更简单的骨架？如果可以，直接算骨架。
2. **分解眼光**：空间能不能拆成两块？如果两块和交集都容易算，用 Mayer–Vietoris。
3. **相对眼光**：题目是否天然包含 $A \subset X$ ？如果是，把 A 当作已经知道或已经忽略的部分，用长正合列。

1 奇异链群与奇异同调群

1.1 本节在整章中的作用

奇异同调把拓扑空间 X 转化为一串阿贝尔群

$$H_0(X), H_1(X), H_2(X), \dots$$

这些群分别记录连通分支、一维洞、二维空腔以及更高维空洞。本节建立最基本的代数机器：

$$\text{空间 } X \longrightarrow \text{链复形 } (S_q(X), \partial_q) \longrightarrow \text{同调群 } H_q(X).$$

后面同伦不变性、相对同调、长正合列、切除定理和 Mayer–Vietoris 序列，都建立在这套链复形语言上。

1.2 核心定义

定义 1.1 (标准单形). 对整数 $q \geq 0$ ，标准 q 单形定义为

$$\Delta^q = \left\{ (t_0, \dots, t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^q t_i = 1 \right\}.$$

它的顶点记为 $e_0, \dots, e_q$ 。

定义 1.2 (奇异单形与奇异链群). 设 X 为拓扑空间。一个 X 中的奇异 q 单形是连续映射

$$\sigma : \Delta^q \rightarrow X.$$

由所有奇异 q 单形生成的自由阿贝尔群记为 $S_q(X)$ 。因此 $S_q(X)$ 中的元素是有限和

$$c = \sum_i n_i \sigma_i, \quad n_i \in \mathbb{Z},$$

称为 q 链。

定义 1.3 (边缘算子). 令 $\delta_i : \Delta^{q-1} \rightarrow \Delta^q$ 表示第 i 个面映射, 即把 Δ^{q-1} 嵌入为不含顶点 e_i 的面。对奇异单形 $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$, 定义

$$\partial_q \sigma = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ \delta_i.$$

线性延拓后得到同态

$$\partial_q : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X).$$

低维公式最常用。若 $\gamma : \Delta^1 \rightarrow X$ 是一条路径, 且 $\gamma(e_0) = a, \gamma(e_1) = b$, 则

$$\partial_1 \gamma = b - a.$$

若 $\tau : \Delta^2 \rightarrow X$ 是奇异三角形, 则

$$\partial_2 \tau = \tau[[e_1, e_2] - \tau[[e_0, e_2] + \tau[[e_0, e_1].$$

1.3 几何直观

q 链可以想成若干有方向的 q 维片段的整数线性组合。边缘算子提取边界: 线段的边界是终点减起点, 三角形的边界是三条有向边的交错和。

最重要的事实是

$$\partial_{q-1} \partial_q = 0.$$

几何上说, 边界的边界为空。三角形的三条边再取端点时, 每个顶点出现两次, 符号相反, 互相抵消。

命题 1.4. 对任意 $q \geq 1$, 有

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0.$$

证明. 对一个奇异 q 单形 σ 展开 $\partial \partial \sigma$ 。每个余维 2 的面都会以两种删顶点顺序出现, 且符号相反。所有项两两抵消, 所以 $\partial \partial \sigma = 0$ 。由线性性, 结论对任意链成立。□

1.4 闭链、边缘链和同调群

定义 1.5. 定义

$$Z_q(X) = \text{Ker } \partial_q$$

为 q 维闭链群,

$$B_q(X) = \text{Im } \partial_{q+1}$$

为 q 维边缘链群。由 $\partial \partial = 0$ 得 $B_q(X) \subset Z_q(X)$, 于是定义第 q 个奇异同调群

$$H_q(X) = Z_q(X) / B_q(X).$$

若 $z \in Z_q(X)$, 它在同调群中的等价类记为 $[z]$ 。

因此

$$H_q(X) = \frac{\text{没有边界的 } q \text{ 链}}{\text{确实是某个 } (q+1) \text{ 链边界的 } q \text{ 链}}.$$

闭链代表“可能的洞”，边缘链代表“实际上围住了更高维区域的洞”。二者相除后，留下真正的同调类。

1.5 计算方法

不要直接硬算奇异链群

奇异链群 $S_q(X)$ 通常极大，直接计算几乎不可行。实际做题时应使用：

1. H_0 数道路连通分支。
2. 同伦不变性与形变收缩。
3. 球面、圆周、楔和、图、环面等常见空间结果。
4. 相对同调长正合列。
5. Mayer–Vietoris 序列。

只有在点空间、区间端点、 H_0 证明这类基础题中，才直接展开奇异链。

1.6 例题：点空间和可缩空间

例题 1.6. 题目计算一点空间 $\{x_0\}$ 的同调群，并推出任意非空可缩空间的同调。

空间的几何图像 点空间没有非平凡的环或空洞。可缩空间能连续压缩成一个点，例如 $\mathbb{R}^n$ 、闭球 D^n 、凸集。

应该想到哪个工具 点空间可直接算链复形；可缩空间用同伦不变性。

计算过程 在点空间中，每个奇异 q 单形都是唯一的常值映射 $c_q : \Delta^q \rightarrow \{x_0\}$ ，所以

$$S_q(\{x_0\}) \cong \mathbb{Z}\langle c_q \rangle.$$

边缘为

$$\partial_q c_q = \sum_{i=0}^q (-1)^i c_{q-1} = \begin{cases} 0, & q \text{ 为奇数,} \\ c_{q-1}, & q \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

因此

$$H_0(\{x_0\}) \cong \mathbb{Z}, \quad H_q(\{x_0\}) = 0 \quad (q > 0).$$

若 X 可缩，则 $X \simeq \{x_0\}$ ，由同伦不变性有相同同调。

最终答案

$$H_q(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ 0, & q > 0, \end{cases} \quad X \text{ 非空可缩.}$$

套路总结 看到“可缩”“凸”“星形”“形变收缩到一点”，高维同调立即为零。

1.7 例题：道路连通空间的 H_0

例题 1.7. 题目证明若 X 道路连通，则 $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ 。

空间的几何图像 0 链是点的整数线性组合。两点能用路径连接，就在 H_0 中代表同一个类。

应该想到哪个工具使用路径边缘公式 $\partial\gamma = \gamma(e_1) - \gamma(e_0)$ 。

计算过程因为 $\partial_0 = 0$ ，所以 $Z_0(X) = S_0(X)$ 。取固定点 $x_0 \in X$ 。任意点 $x \in X$ 可由路径 γ 与 x_0 连接，令 $\gamma(e_0) = x_0, \gamma(e_1) = x$ ，则

$$x - x_0 = \partial\gamma \in B_0(X),$$

故 $[x] = [x_0]$ 。任意 0 链 $c = \sum_i n_i x_i$ 都同调于 $(\sum_i n_i)x_0$ 。系数和映射

$$\varepsilon : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \varepsilon \left(\sum_i n_i x_i \right) = \sum_i n_i$$

诱导出同构 $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ 。

最终答案

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}.$$

若 X 有 r 个道路连通分支，则 $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^r$ 。

套路总结 H_0 首先数道路连通分支。

1.8 常见误区

闭链不一定是零类

$\partial z = 0$ 只说明 z 没有边界。只有当 $z = \partial w$ 时， $[z]$ 才是 $H_q(X)$ 中的零元。圆周上绕一圈的闭链不是边缘，因此给出 $H_1(S^1)$ 的生成元。

不要把几何直观看成严格证明

“看起来像一个点”必须落实为同伦等价或形变收缩。例如 D^2 可缩， S^1 不可缩；它们看起来都简单，但同调完全不同。

1.9 自测题

自测题 1.8. 若 X 有 5 个道路连通分支，求 $H_0(X)$ 。

自测题 1.9. 证明 $\mathbb{R}^n$ 、闭球 D^n 、任意凸集的 H_q 在 $q > 0$ 时为零。

自测题 1.10. 设 γ 是从 a 到 b 的路径。写出 $\partial\gamma$ ，并解释为什么 $[a] = [b] \in H_0(X)$ 。

2 同调群的同伦不变性

2.1 本节在整章中的作用

同伦不变性是同调计算中最常用的原则。它告诉我们：同伦等价的空间有同构的同调群。于是很多空间不必直接算奇异链群，只要变形成简单模型即可。

2.2 核心定义

定义 2.1 (诱导链映射). 设 $f : X \rightarrow Y$ 连续。对奇异单形 $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ ，定义

$$f_{\#}(\sigma) = f \circ \sigma.$$

线性延拓得到同态

$$f_{\#} : S_q(X) \rightarrow S_q(Y).$$

由于 $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$ ，它把闭链送到闭链，把边缘链送到边缘链，从而诱导同调同态

$$f_* : H_q(X) \rightarrow H_q(Y), \quad f_*[z] = [f_{\#}z].$$

定理 2.2 (同伦不变性). 若连续映射 $f, g : X \rightarrow Y$ 同伦，则

$$f_* = g_* : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$$

对所有 $q \geq 0$ 成立。特别地，若 $X \simeq Y$ ，则

$$H_q(X) \cong H_q(Y).$$

2.3 几何直观

同伦是一种连续变形。同调只关心空间中稳定存在的洞，不关心形状如何弯曲、拉伸或压扁。因此，圆环区域

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

与圆周 S^1 有相同同调，因为它可以径向形变收缩到中间的圆。

2.4 证明思路

若 $F : X \times I \rightarrow Y$ 是从 f 到 g 的同伦，可以构造一族同态

$$P_q : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(Y)$$

使得

$$g_{\#} - f_{\#} = \partial P_q + P_{q-1} \partial.$$

这称为链同伦。若 z 是闭链，则 $\partial z = 0$ ，所以

$$g_{\#}z - f_{\#}z = \partial P_q(z)$$

是边缘。因此 $[g_{\#}z] = [f_{\#}z]$ ，即 $g_*[z] = f_*[z]$ 。

2.5 计算方法

何时使用同伦不变性和形变收缩

题目中出现以下空间时，优先找同伦等价模型：

1. 凸集、星形区域、闭球、开球：同伦等价于点。
2. 去掉原点的欧氏空间 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ：径向形变收缩到 S^{n-1} 。
3. 环形区域、圆柱面、莫比乌斯带：常形变收缩到 S^1 。
4. 带若干洞或去点的曲面：常形变收缩到图或楔和。
5. 一个空间中有“厚度”但洞的骨架明显时，先找骨架再证明形变收缩。

严格证明通常要写出形变收缩 $H: X \times I \rightarrow X$ ，满足 $H(x, 0) = x$ 、 $H(x, 1) \in A$ 、且 $H(a, t) = a$ 对 $a \in A$ 。

2.6 例题：去掉原点的欧氏空间

例题 2.3. 题目计算 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 的同调群。

空间的几何图像从原点向外发出的每条射线与单位球面 S^{n-1} 相交一次。整个空间可以沿射线压到 S^{n-1} 。

应该想到哪个工具径向形变收缩。

计算过程定义

$$r: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1}, \quad r(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

包含映射为 $i: S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ 。同伦

$$H(x, t) = (1-t)x + t \frac{x}{\|x\|}$$

给出 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 到 S^{n-1} 的形变收缩。因此

$$H_q(\mathbb{R}^n - \{0\}) \cong H_q(S^{n-1}).$$

最终答案

$$H_q(\mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ \mathbb{Z}, & q = n-1, \ n \geq 2, \\ 0, & \text{其他 } q, \end{cases}$$

但当 $n = 1$ 时， $\mathbb{R} - \{0\}$ 有两个道路连通分支，所以 $H_0 \cong \mathbb{Z}^2$ 。

套路总结去掉一点的 $\mathbb{R}^n$ 不是“少了一个点所以差不多可缩”，而是留下一个 S^{n-1} 型的洞。

2.7 例题：判断诱导同态

例题 2.4. 题目令 $f: S^1 \rightarrow S^1$ 为 $f(z) = z^m$ 。求

$$f_*: H_1(S^1) \rightarrow H_1(S^1).$$

空间的几何图像映射 $z \mapsto z^m$ 把圆周绕自身 m 圈。若 $m < 0$ ，方向反转。

应该想到哪个工具 $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ，生成元是逆时针绕一圈的类。

计算过程取生成元 $[\alpha]$ ，其中

$$\alpha(t) = e^{2\pi it}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

则

$$f \circ \alpha(t) = e^{2\pi imt}$$

绕圆 m 圈。因此

$$f_*[\alpha] = m[\alpha].$$

最终答案

$$f_*: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad n \mapsto mn.$$

套路总结对 S^1 或 S^n 上的自映射，诱导同态常由次数决定。

2.8 常见误区

形变收缩必须连续且不能穿出空间

例如 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 可以收缩到 S^1 ，但不能收缩到一点，因为任何试图填掉圆周的收缩都必须穿过缺失的原点。

2.9 自测题

自测题 2.5. 计算圆柱面 $S^1 \times I$ 的同调群。

自测题 2.6. 计算莫比乌斯带的同调群。

自测题 2.7. 设 $f: S^n \rightarrow S^n$ 为常值映射，求 $f_*: H_q(S^n) \rightarrow H_q(S^n)$ 。

3 π_1 与 H_1 的关系

3.1 本节在整章中的作用

王讲义第三章把 π_1 与 H_1 联系起来，是因为二者都研究一维环路，但信息量不同。基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 可能非交换，记录环路拼接的非交换结构； $H_1(X)$ 是阿贝尔群，只记录交换化后的一维洞。

3.2 核心结论

定理 3.1. 若 X 道路连通, 则

$$H_1(X) \cong \pi_1(X, x_0)_{\text{ab}},$$

其中 $\pi_1(X, x_0)_{\text{ab}}$ 表示基本群的交换化。

直观地说, 闭路径给出 1 维闭链; 同伦闭路径给出相同同调类; 而同调群是阿贝尔群, 所以只保留基本群的交换化信息。

3.3 计算方法

用基本群辅助算 H_1

若已经知道空间的基本群表示

$$\pi_1(X) = \langle a_1, \dots, a_k \mid r_1, \dots, r_s \rangle,$$

则 $H_1(X)$ 可以通过交换化计算: 令所有生成元两两交换, 把每个关系 r_j 改写成整数线性关系。这样得到一个有限生成阿贝尔群。

3.4 例题: 楔和圆周

例题 3.2. 题目计算 $S^1 \vee S^1$ 的 H_1 。

空间的几何图像两个圆在一点粘起来, 像数字 8。有两个独立的一维洞。

应该想到哪个工具可用基本群交换化, 或后面用楔和同调公式。

计算过程已知

$$\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong F(a, b),$$

即两个生成元的自由群。交换化后得到由 a, b 自由生成的自由阿贝尔群:

$$F(a, b)_{\text{ab}} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

最终答案

$$H_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z}^2.$$

套路总结图的 H_1 的秩等于独立回路数; $S^1 \vee \dots \vee S^1$ 有多少个圆, 就有多少个 $\mathbb{Z}$ 。

3.5 例题: 环面的 H_1

例题 3.3. 题目用基本群交换化计算环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 的 H_1 。

空间的几何图像环面有经线和纬线两个独立方向的一维洞。

应该想到哪个工具 $\pi_1(T^2) \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ 。

计算过程交换化后, 关系 $aba^{-1}b^{-1}$ 自动变成零关系, 因为

$$a + b - a - b = 0.$$

所以没有额外线性关系, 得到

$$H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b.$$

最终答案

$$H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2.$$

套路总结面粘贴模型中, 二维胞腔边界给出 H_1 中的线性关系; 环面的边界词交换化后为零, 所以保留两个生成元。

3.6 常见误区

H_1 不是基本群本身

例如 $S^1 \vee S^1$ 的基本群是非交换自由群 F_2 , 但 $H_1 \cong \mathbb{Z}^2$ 是交换群。用同调时, 环路的顺序信息已经丢失。

3.7 自测题

自测题 3.4. 已知 Klein 瓶基本群表示为

$$\langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle.$$

求 H_1 。

自测题 3.5. 设 X 是三个圆的楔和, 求 $H_1(X)$ 。

4 相对同调与长正合列

4.1 本节在整章中的作用

相对同调用于研究一对空间 (X, A) , 其中 $A \subset X$ 。它把 A 中已经存在的链视为“可忽略”, 从而测量 X 相对于 A 新增加了什么。长正合列是计算相对同调和绝对同调之间关系的主要工具。

4.2 核心定义

定义 4.1 (相对链群). 设 $A \subset X$ 。定义

$$S_q(X, A) = S_q(X) / S_q(A).$$

由于 $\partial S_q(A) \subset S_{q-1}(A)$, 边缘算子诱导

$$\partial : S_q(X, A) \rightarrow S_{q-1}(X, A).$$

相对同调群定义为

$$H_q(X, A) = \text{Ker } \partial / \text{Im } \partial.$$

一个相对 q 闭链可以理解为: 链 $c \in S_q(X)$ 的边界不必为零, 但必须落在 A 中:

$$\partial c \in S_{q-1}(A).$$

在相对同调中, A 里的链被视为零。

4.3 几何直观

如果把 A 压成一个点, 则 (X, A) 的相对同调常与商空间 X/A 的约化同调接近。直观上, 相对同调记录 X 在 A 之外新增的洞, 或记录“以 A 为边界的链”。

4.4 长正合列

定理 4.2 (同调长正合列). 包含映射 $i : A \hookrightarrow X$ 与商映射 $j : X \rightarrow (X, A)$ 诱导长正合列

$$\cdots \rightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(X) \rightarrow \cdots.$$

正合表示每一项处都有

$$\text{Im}(\text{前一个映射}) = \text{Ker}(\text{后一个映射}).$$

连接同态 $\partial : H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$ 的含义很直接: 若相对类由链 c 表示, 且 $\partial c \in S_{q-1}(A)$, 则

$$\partial[c] = [\partial c] \in H_{q-1}(A).$$

4.5 证明思路

短正合列

$$0 \rightarrow S_q(A) \rightarrow S_q(X) \rightarrow S_q(X, A) \rightarrow 0$$

在每个维度成立, 并且与边缘算子相容。代数拓扑中的标准结论是: 链复形的短正合列诱导同调长正合列。连接同态正是从“相对闭链的边界落在 A ”这件事产生的。

4.6 计算方法

长正合列 diagram chasing 流程

使用长正合列时，按下面步骤做：

1. 写出题目所需维度附近的一段长正合列，不要整条全写。
2. 代入已知同调群，把零群标出来。
3. 看到 $0 \rightarrow G \xrightarrow{f} H$ 可知 f 单；看到 $G \xrightarrow{f} H \rightarrow 0$ 可知 f 满。
4. 若出现 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ ，则 B 是 A 对 C 的扩张；若 C 是自由阿贝尔群，通常分裂， $B \cong A \oplus C$ 。
5. 连接同态常把相对基本类送到边界的基本类，这是算生成元的关键。

4.7 例题：(D^n, S^{n-1}) 的相对同调

例题 4.3. 题目计算 $H_q(D^n, S^{n-1})$ 。

空间的几何图像 D^n 是一个 n 维球体，边界是 S^{n-1} 。相对同调把边界 S^{n-1} 视为零，所以整个 D^n 成为一个相对 n 维洞。

应该想到哪个工具对偶对 (D^n, S^{n-1}) 使用长正合列。

计算过程因为 D^n 可缩，

$$H_q(D^n) = 0 \quad (q > 0), \quad H_0(D^n) \cong \mathbb{Z}.$$

长正合列中，对 $q > 1$ 有

$$0 \rightarrow H_q(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0,$$

所以

$$H_q(D^n, S^{n-1}) \cong H_{q-1}(S^{n-1}).$$

由球面同调可得唯一非零的高维相对同调出现在 $q = n$ 。

最终答案

$$H_q(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n, \\ 0, & q \neq n. \end{cases}$$

套路总结 (D^n, S^{n-1}) 是相对同调最重要的模型；连接同态把 D^n 的相对基本类送到 S^{n-1} 的基本类。

4.8 例题：点对的相对同调

例题 4.4. 题目设 X 道路连通， $x_0 \in X$ 。求 $H_q(X, \{x_0\})$ 与 $H_q(X)$ 的关系。

空间的几何图像把基点看成已经忽略的部分。高维洞不受一个点影响，但 H_0 会被消掉。

应该想到哪个工具对 $(X, \{x_0\})$ 写长正合列。

计算过程当 $q > 1$ 时,

$$H_q(\{x_0\}) = H_{q-1}(\{x_0\}) = 0,$$

所以

$$H_q(X) \cong H_q(X, \{x_0\}).$$

在低维处有

$$0 \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(X, \{x_0\}) \rightarrow H_0(\{x_0\}) \rightarrow H_0(X) \rightarrow H_0(X, \{x_0\}) \rightarrow 0.$$

因为 X 道路连通, $H_0(\{x_0\}) \rightarrow H_0(X)$ 是同构, 故

$$H_1(X) \cong H_1(X, \{x_0\}), \quad H_0(X, \{x_0\}) = 0.$$

最终答案

$$H_q(X, \{x_0\}) \cong \begin{cases} H_q(X), & q > 0, \\ 0, & q = 0. \end{cases}$$

套路总结相对一个基点的同调就是约化同调。

4.9 常见误区

相对闭链不等于绝对闭链

在 $H_q(X, A)$ 中, 代表元 c 只需满足 $\partial c \in S_{q-1}(A)$, 不必满足 $\partial c = 0$ 。这是很多相对同调计算出错的源头。

4.10 自测题

自测题 4.5. 计算 $H_q(I, \partial I)$, 其中 $I = [0, 1]$ 、 $\partial I = \{0, 1\}$ 。

自测题 4.6. 用长正合列计算 $H_q(S^n, \{x_0\})$ 。

自测题 4.7. 解释为什么 $H_2(D^2, S^1) \cong \mathbb{Z}$, 并指出连接同态把生成元送到哪里。

5 切除定理

5.1 本节在整章中的作用

切除定理说明: 在相对同调 $H_q(X, A)$ 中, 如果 $U \subset A$ 位于 A 的内部, 那么从 X 和 A 中同时删掉 U , 相对同调不变。它的作用是把相对同调局部化, 常用于把复杂空间的局部部分替换成标准模型。

5.2 核心定理

定理 5.1 (切除定理). 设 $U \subset A \subset X$, 并且 $\overline{U} \subset \text{int } A$. 则包含映射诱导同构

$$H_q(X - U, A - U) \cong H_q(X, A)$$

对所有 $q \geq 0$ 成立。

5.3 几何直观

相对同调把 A 中的链视为零。若 U 完全藏在 A 的内部, 那么 U 对 X 相对于 A 的新增同调没有贡献, 删掉它不会改变相对同调。

5.4 证明思路

证明的核心是重心重分。给定一条奇异链, 可以把它足够细分, 使每个小单形都落在 A 内或 $X - U$ 内。落在 A 内的部分在相对链群中为零, 剩下的部分可看作来自 $(X - U, A - U)$ 。这就是 Hatcher 讲切除时强调的“把单形切小”的几何图像。

5.5 计算方法

何时考虑切除

切除很少单独作为第一步, 常与长正合列配合使用:

1. 题目有局部去掉一块、粘上一块、商掉一块时, 考虑切除。
2. 要计算 (X, A) 的相对同调, 若 $X - A$ 附近看起来像 (D^n, S^{n-1}) , 可切除多余部分。
3. 计算球面同调、悬挂同调、局部同调时, 切除能把空间化到标准球对。

5.6 例题：球面对球面的归纳

例题 5.2. 题目说明如何用切除和长正合列得到

$$\tilde{H}_q(S^n) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}).$$

空间的几何图像把 S^n 分成上下两个闭半球, 它们的交是赤道 S^{n-1} 。

应该想到哪个工具半球可缩, 交集是 S^{n-1} 。可用 Mayer-Vietoris, 也可用相对同调与切除。

计算过程取上半球 $D_+^n \subset S^n$ 。相对长正合列中, 因 D_+^n 可缩, 可把相对群 $H_q(S^n, D_+^n)$ 与约化同调联系起来。再通过切除, 把 (S^n, D_+^n) 化为类似 $(D^n, D^n - \text{内点})$ 的局部模型, 最终得到降维关系

$$\tilde{H}_q(S^n) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}).$$

从 S^0 开始归纳, 得到球面同调。

最终答案

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ \mathbb{Z}, & q = n, \\ 0, & \text{其他 } q. \end{cases}$$

套路总结球面计算的核心是“切成两个半球, 交集低一维”。

5.7 常见误区

切除条件不能省略

不能随便删 A 的任意子集。必须要求被切除部分 U 的闭包包含在 A 的内部。若删掉的部分碰到相对边界, 可能改变相对同调。

5.8 自测题

自测题 5.3. 用切除思想解释为什么小邻域内的局部同调可以化为球对 (D^n, S^{n-1}) 。

自测题 5.4. 设 X 是流形, $p \in X$ 。直观说明 $H_q(X, X - \{p\})$ 与 $(D^n, D^n - \{0\})$ 的关系。

6 Mayer-Vietoris 序列

6.1 本节在整章中的作用

Mayer-Vietoris 序列用于计算由两块拼成的空间。它是同调论中最实用的计算工具之一, 特别适合球面、楔和、环面、去点空间和曲面。

6.2 核心定理

定理 6.1 (Mayer-Vietoris 序列). 设 $X = X_1 \cup X_2$, 且 X_1, X_2 及 $A = X_1 \cap X_2$ 构成适合使用同调的覆盖, 例如开覆盖或可用切除替代的好覆盖。则有长正合列

$$\cdots \rightarrow H_q(A) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} H_q(X) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \rightarrow \cdots$$

符号 $j_{1*} - j_{2*}$ 中的减号来自方向约定; 做群同构计算时, 关键是知道它的核与像。

6.3 几何直观

一个 X 中的闭链可以切成 X_1 中一部分和 X_2 中一部分。它们在交集 A 上必须匹配。Mayer-Vietoris 序列正是把“交集上的匹配条件”翻译为代数正合列。

6.4 计算方法

Mayer-Vietoris 做题流程

1. 选覆盖 $X = X_1 \cup X_2$, 使 $X_1, X_2, A = X_1 \cap X_2$ 的同调都已知或容易算。
2. 写出目标维度附近的一段正合列。
3. 先处理高维零群, 得到某些映射是同构、单射或满射。
4. 在低维处注意 $H_0(A) \rightarrow H_0(X_1) \oplus H_0(X_2)$ 的映射, 它反映交集如何连接两块。
5. 如果出现短正合列 $0 \rightarrow \mathbb{Z}^a \rightarrow H_q(X) \rightarrow \mathbb{Z}^b \rightarrow 0$, 通常得到 $H_q(X) \cong \mathbb{Z}^{a+b}$ 。

6.5 例题：球面同调

例题 6.2. 题目用 Mayer-Vietoris 计算 S^n 的同调。

空间的几何图像 S^n 是两个可缩半球粘在赤道 S^{n-1} 上。

应该想到哪个工具令 X_1, X_2 为稍微加厚的上下半球, 则 $X_1 \simeq \text{pt}, X_2 \simeq \text{pt}, X_1 \cap X_2 \simeq S^{n-1}$ 。

计算过程对 $q > 1$, 正合列给出

$$0 \rightarrow H_q(S^n) \rightarrow H_{q-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0,$$

因此

$$H_q(S^n) \cong H_{q-1}(S^{n-1}) \quad (q > 1).$$

由 S^0 的同调开始归纳, 即得球面同调。

最终答案

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ \mathbb{Z}, & q = n, \\ 0, & \text{其他 } q. \end{cases}$$

套路总结球面题的标准分解是“两个半球加赤道”, 产生降维同构。

6.6 例题：楔和空间

例题 6.3. 题目设 X, Y 道路连通, 且基点邻域足够好。计算 $X \vee Y$ 的同调。

空间的几何图像楔和是把 X 与 Y 各取一个点粘起来。高维洞不会互相混合, 只是并列放在一起。

应该想到哪个工具用约化同调或 Mayer-Vietoris。

计算过程取覆盖, 使一块形变收缩到 X , 另一块形变收缩到 Y , 交集可缩。Mayer-Vietoris 在 $q > 0$ 给出

$$H_q(X \vee Y) \cong H_q(X) \oplus H_q(Y).$$

若 X, Y 道路连通, 则 $X \vee Y$ 道路连通, 故

$$H_0(X \vee Y) \cong \mathbb{Z}.$$

最终答案

$$H_q(X \vee Y) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ H_q(X) \oplus H_q(Y), & q > 0. \end{cases}$$

套路总结对连通楔和, 高维同调直接相加; H_0 仍是一个 $\mathbb{Z}$, 不是两个 $\mathbb{Z}$ 。

6.7 例题：环面去掉一个点

例题 6.4. 题目计算 $T^2 - \{p\}$ 的同调群。

空间的几何图像把环面看成正方形对边粘合。去掉一个点后, 二维面可以收缩到一维骨架, 即两个圆的楔和。

应该想到哪个工具形变收缩到 $S^1 \vee S^1$ 。

计算过程去掉一个点的环面是带一个穿孔的环面, 它形变收缩到一维骨架

$$S^1 \vee S^1.$$

因此

$$H_q(T^2 - \{p\}) \cong H_q(S^1 \vee S^1).$$

由楔和公式,

$$H_0 \cong \mathbb{Z}, \quad H_1 \cong \mathbb{Z}^2, \quad H_q = 0 \ (q \geq 2).$$

最终答案

$$H_q(T^2 - \{p\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ \mathbb{Z}^2, & q = 1, \\ 0, & q \geq 2. \end{cases}$$

套路总结闭曲面去掉点后通常变成有边界或穿孔的曲面, 可收缩到图; 图只有 H_0 和 H_1 。

6.8 例题：环面去掉两个点

例题 6.5. 题目计算 $T^2 - \{p, q\}$ 的同调群, 其中 $p \neq q$ 。

空间的几何图像这是一个亏格 1、有两个穿孔的曲面。它形变收缩到三个圆的楔和。

应该想到哪个工具曲面去点后的图模型; 或用 Euler 特征数判断一维骨架的圈数。

计算过程一个亏格为 g 、去掉 k 个点的连通可定向曲面, 当 $k > 0$ 时形变收缩到

$$\bigvee^{2g+k-1} S^1.$$

这里 $g = 1, k = 2$, 所以收缩到

$$S^1 \vee S^1 \vee S^1.$$

于是

$$H_0 \cong \mathbb{Z}, \quad H_1 \cong \mathbb{Z}^3, \quad H_q = 0 \quad (q \geq 2).$$

最终答案

$$H_q(T^2 - \{p, q\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ \mathbb{Z}^3, & q = 1, \\ 0, & q \geq 2. \end{cases}$$

套路总结环面去一个点给两个生成元；再多去一个点，多出一个绕新穿孔的生成元。

6.9 常见误区

楔和的 H_0 不相加

若 X, Y 都道路连通, 则 $X \vee Y$ 仍道路连通, 所以 $H_0(X \vee Y) \cong \mathbb{Z}$, 不是 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 。约化同调才满足楔和直接和公式。

去点不一定只影响高维

从 T^2 去掉一个点后, H_2 从 $\mathbb{Z}$ 变成 0, 但 H_1 仍是 $\mathbb{Z}^2$ 。去掉两个点后, H_1 变成 $\mathbb{Z}^3$ 。去点会改变一维洞的数量。

6.10 自测题

自测题 6.6. 计算 $S^1 \vee S^2$ 的所有同调群。

自测题 6.7. 计算 $S^2 - \{p, q\}$ 的同调群。

自测题 6.8. 计算 $T^2 - \{p_1, p_2, p_3\}$ 的同调群。

7 同调群的应用与常见模型汇总

7.1 本节在整章中的作用

王讲义最后用同调群区分空间、判断映射性质、计算常见例子。同调的威力在于：几何问题可以转化为阿贝尔群问题。若两个空间同伦等价，它们同调相同；若同调不同，则一定不同伦等价，也不同胚。

7.2 常见空间同调表

空间	同调群
pt 或非空可缩空间	$H_0 = \mathbb{Z}, H_q = 0 (q > 0)$
r 个道路连通分支	$H_0 = \mathbb{Z}^r$
$S^n (n \geq 1)$	$H_0 = \mathbb{Z}, H_n = \mathbb{Z},$ 其余为0
$S^1 \vee \cdots \vee S^1 (m \text{ 个})$	$H_0 = \mathbb{Z}, H_1 = \mathbb{Z}^m,$ 其余为0
T^2	$H_0 = \mathbb{Z}, H_1 = \mathbb{Z}^2, H_2 = \mathbb{Z}$
$T^2 - \{p\}$	$H_0 = \mathbb{Z}, H_1 = \mathbb{Z}^2, H_q = 0 (q \geq 2)$
$T^2 - \{p, q\}$	$H_0 = \mathbb{Z}, H_1 = \mathbb{Z}^3, H_q = 0 (q \geq 2)$

7.3 判断空间能否变形成简单空间

形变收缩判断清单

1. 是否有明显的径向方向？例如 $\mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ 。
2. 是否是一个有厚度的空间？例如圆环、圆柱、莫比乌斯带常收缩到中线。
3. 是否是去点曲面？尝试剪开成多边形，再收缩到一维边界骨架。
4. 是否有一个子空间 A 可作为骨架，并且每个点能沿唯一或连续选择的路径流向 A ？
5. 若只能凭直觉画图，仍需说明连续变形过程，至少给出清晰的几何构造。

7.4 判断诱导同态

计算 $f_* : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$

1. 先写出 $H_q(X)$ 和 $H_q(Y)$ 的生成元。
2. 看 f 把 X 的生成元送到 Y 中哪个循环。
3. 如果 $H_q(Y) \cong \mathbb{Z}$ ，通常只需判断送到几倍生成元。
4. 常值映射在 $q > 0$ 的同调上诱导零映射。
5. 自映射 $S^n \rightarrow S^n$ 在 H_n 上是乘以映射次数。

例题 7.1. 题目设 $f : S^n \rightarrow S^n$ 的次数为 d 。求 $f_* : H_q(S^n) \rightarrow H_q(S^n)$ 。

空间的几何图像次数 d 表示 f 把顶维基本类覆盖目标球面 d 次，方向反转计负号。

应该想到哪个工具球面同调与映射次数。

计算过程 $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ ，取基本类 $[S^n]$ 为生成元，则

$$f_*[S^n] = d[S^n].$$

在 H_0 上，如果 S^n 连通，任意连续自映射都诱导恒等 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ 。其他维度同调为零。

最终答案

$$f_* = \begin{cases} \text{id}_{\mathbb{Z}}, & q = 0, \\ \times d, & q = n, \\ 0 \rightarrow 0, & \text{其他 } q. \end{cases}$$

套路总结顶维同调看次数，零维同调看连通分支。

7.5 长正合列的典型追图

例题 7.2. 题目已知 $A \subset X$ ，且某段长正合列化为

$$0 \rightarrow H_2(X, A) \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \rightarrow H_1(X, A) \rightarrow 0.$$

求 $H_2(X, A)$ 与 $H_1(X, A)$ 。

空间的几何图像中间映射是乘以 m ，它的核和余核控制两侧相对同调。

应该想到哪个工具正合性：前一个像等于后一个核。

计算过程由正合性，

$$\text{Im } \partial = \text{Ker}(\times m).$$

若 $m \neq 0$ ，乘以 m 在 $\mathbb{Z}$ 上单射，所以 $\text{Ker}(\times m) = 0$ ，故 $H_2(X, A) = 0$ 。又

$$H_1(X, A) \cong \text{coker}(\times m) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

若 $m = 0$ ，则 $\text{Ker}(\times 0) = \mathbb{Z}$ ，并且 $\text{coker}(\times 0) = \mathbb{Z}$ 。

最终答案若 $m \neq 0$ ，

$$H_2(X, A) = 0, \quad H_1(X, A) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

套路总结长正合列中出现 $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z}$ ，结果通常就是核 0 和余核 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 。

7.6 常见错误计算的反例

错误 1：认为可缩空间的所有同调都为零

非空可缩空间仍有 $H_0 \cong \mathbb{Z}$ 。高维同调为零，不包括 H_0 。

错误 2：认为 S^n 只有 H_0

球面 S^n 的顶维同调 $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ 。这个 $\mathbb{Z}$ 记录整个球面的基本类。

错误 3：认为 $T^2 - \{p\}$ 与 T^2 同调相同

去掉一点破坏了闭曲面的二维基本类，因此 $H_2(T^2 - \{p\}) = 0$ ，而 $H_2(T^2) = \mathbb{Z}$ 。

错误 4：认为同伦等价必须同胚

同伦等价比同胚弱得多。闭圆盘 D^2 与点同伦等价，但显然不同胚。同调只是不变量，不能恢复全部拓扑结构。

7.7 总复习题

自测题 7.3. 计算 $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ 、 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 、 $\mathbb{R} - \{0\}$ 的同调群，并比较差异。

自测题 7.4. 计算 $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ 的所有同调群。

自测题 7.5. 设 X 是道路连通空间，且 $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^2$ 。能否推出 $X \simeq T^2$ ？说明理由。

自测题 7.6. 设 $f: S^1 \rightarrow S^1$ 为复共轭映射 $f(z) = \bar{z}$ 。求 $f_*: H_1(S^1) \rightarrow H_1(S^1)$ 。

自测题 7.7. 用 Mayer-Vietoris 计算 S^2 的同调群，明确写出覆盖、交集和相关正合列片段。

8 逐节讲解加强与计算专题

前面各节给出了定义、定理和典型例题。为了避免材料只是“能查答案”，这一节按学习顺序再讲一遍：每个工具为什么出现、题目中如何识别它、计算时从哪里下手。复习时可以先读本节，再回到前面查精确表述。

8.1 专题一：为什么奇异同调的定义这么绕

第一次学同调时，最难受的地方通常不是计算，而是定义太不自然：为什么要用所有连续映射 $\Delta^q \rightarrow X$ ？为什么要生成自由阿贝尔群？为什么最后还要取商？

可以把这三件事分别理解。

首先， $\sigma: \Delta^q \rightarrow X$ 是一种“带参数的 q 维小片”。当 $q=0$ 时， Δ^0 是一点，所以奇异 0 单形就是 X 中的点。当 $q=1$ 时， Δ^1 是区间，所以奇异 1 单形就是路径。当 $q=2$ 时， Δ^2 是三角形，所以奇异 2 单形就是一张可能弯曲、可能折叠的三角形面片。

其次，为什么要允许整数线性组合？因为我们希望能谈“这条边加那条边”“两条边抵消”“反方向取负号”。没有加减法，就没法把几何拼接变成代数计算。自由阿贝尔群的意思就是：先不强加任何关系，只记录形式和；真正的关系由边缘算子和同调商群来决定。

最后，为什么 $H_q = Z_q/B_q$ ？闭链 Z_q 是“没有边界”的东西，它看起来像洞的轮廓；边缘链 B_q 是“确实围住了更高维东西”的轮廓，它不应该算成真正的洞。商群就是把这些“能填起来的轮廓”当作零。

定义背后的做题翻译

- “闭链”翻译成：边界抵消了，可能代表一个洞。
- “边缘链”翻译成：它其实是某块更高维区域的边界，不是真洞。
- “同调类相等”翻译成：两个闭链相差一个边缘，所以围出的洞一样。
- “同调类为零”翻译成：这个闭链能被填起来。

8.2 专题二： H_0 为什么只数道路连通分支

H_0 是最容易被低估的一项。它不是“低维所以不重要”，而是告诉我们同调怎样把拓扑连通性变成代数。

一个 0 链就是有限个点的整数线性组合：

$$c = n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k.$$

由于 $\partial_0 = 0$ ，所有 0 链都是闭链。真正发生识别的是边缘链。若 $a, b \in X$ 能由路径 γ 连接，且 $\gamma(e_0) = a, \gamma(e_1) = b$ ，那么

$$\partial\gamma = b - a.$$

在同调群里边缘等于零，所以

$$[b] - [a] = 0, \quad [a] = [b].$$

这句话非常关键：路径把两个点在 H_0 里识别起来。于是同一个道路连通分支里的所有点只贡献一个 $\mathbb{Z}$ 。不同道路连通分支之间没有路径，不能被边缘识别，于是各自贡献一个 $\mathbb{Z}$ 。

所以如果 X 有 r 个道路连通分支，

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^r.$$

这不是一个需要长计算的定理，而是路径边缘公式的直接后果。

8.3 专题三：怎样真正算 S^1 的同调

圆周 S^1 是所有一维同调计算的原型。结论是

$$H_q(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ \mathbb{Z}, & q = 1, \\ 0, & q \geq 2. \end{cases}$$

关键不是背结论，而是理解 $H_1(S^1)$ 中那个 $\mathbb{Z}$ 从哪里来。

把

$$\alpha : I \rightarrow S^1, \quad \alpha(t) = e^{2\pi it}$$

看成绕圆一圈的奇异 1 链。它的起点和终点相同，所以

$$\partial\alpha = \alpha(1) - \alpha(0) = 0.$$

因此 α 是闭链。它为什么不是边缘？直观上，如果它是某个 2 链的边界，就表示圆周这一圈可以在 S^1 内部被一张二维面填起来。但 S^1 本身没有二维区域可填；这就是一维洞。

严格计算通常不直接在奇异链群中证明，而是使用后面的工具。例如把 S^1 看成两个弧 U, V 的并，二者都可缩，交集有两个连通分支。Mayer-Vietoris 的低维部分给出

$$0 \rightarrow H_1(S^1) \rightarrow H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) \rightarrow H_0(S^1) \rightarrow 0.$$

代入

$$H_0(U \cap V) \cong \mathbb{Z}^2, \quad H_0(U) \oplus H_0(V) \cong \mathbb{Z}^2, \quad H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

中间映射把交集的两个端点分别送入两条弧中。它的核是一个 $\mathbb{Z}$ ，对应“两个端点之差”。于是

$$H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

以后遇到 S^1 要立刻想到

- $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ，生成元是“绕一圈”。
- 映射 $z \mapsto z^m$ 在 H_1 上是乘以 m 。
- 一个空间若形变收缩到 S^1 ，它的一维同调就是 $\mathbb{Z}$ 。

8.4 专题四：可缩、同伦等价、形变收缩到底怎么用

可缩空间的同调最简单：

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}, \quad H_q(X) = 0 \quad (q > 0).$$

但做题时真正要判断的是：空间是否可缩，或者是否能形变收缩到另一个空间。

同伦等价只要求存在 $f: X \rightarrow Y$ 、 $g: Y \rightarrow X$ ，使 $gf \simeq \text{id}_X$ 、 $fg \simeq \text{id}_Y$ 。形变收缩更具体： $A \subset X$ ，并且 X 能在自身内部连续压到 A ，同时 A 上的点保持不动。形变收缩一定给出同伦等价。

做题时最常见的不是抽象构造同伦等价，而是画出形变收缩：

$$\mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow S^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

这说明 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 的同调就是 S^{n-1} 的同调。注意这个变形不能经过原点；如果变形过程中穿过被删掉的点，就不是空间内部同伦。

形变收缩的标准写法

若要在作业中证明 X 形变收缩到 A ，写出一个连续映射

$$H: X \times I \rightarrow X$$

并检查三件事：

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) \in A, \quad H(a, t) = a \quad (a \in A).$$

很多题不需要公式非常复杂，但必须说明变形始终留在 X 内部。

8.5 专题五：球面同调的计算逻辑

球面同调的结果是

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ \mathbb{Z}, & q = n, \\ 0, & \text{其他 } q. \end{cases}$$

这个结论的意思是：连通性贡献 $H_0 = \mathbb{Z}$ ，整个 n 维球面本身贡献顶维基本类 $H_n = \mathbb{Z}$ ，中间维度没有洞。

为什么可以这么算？最自然的思路是把 S^n 分成上下两个半球。取稍微加厚的开半球 U, V ，则

$$U \simeq \text{pt}, \quad V \simeq \text{pt}, \quad U \cap V \simeq S^{n-1}.$$

Mayer-Vietoris 序列在 $q > 1$ 时变成

$$0 \rightarrow H_q(S^n) \rightarrow H_{q-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0,$$

所以

$$H_q(S^n) \cong H_{q-1}(S^{n-1}) \quad (q > 1).$$

这就是降维。反复降维，最后把 $H_n(S^n)$ 降到 $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ 。

低维处要小心 H_0 。 S^n 对 $n \geq 1$ 连通，所以 $H_0(S^n) = \mathbb{Z}$ 。而顶维的 $\mathbb{Z}$ 不来自连通性，而来自整个球面作为一个不能在自身内部填掉的闭 n 维对象。

8.6 专题六：楔和与图的同调怎么一眼看出来

很多复杂空间最后都会形变收缩到图。图是一维 CW 复形，所以

$$H_q(\Gamma) = 0 \quad (q \geq 2).$$

如果图 Γ 连通，且有 V 个顶点、 E 条边，那么

$$H_1(\Gamma) \cong \mathbb{Z}^{E-V+1}.$$

这个数 $E - V + 1$ 就是独立回路数。

特别地，

$$\bigvee^m S^1$$

是 m 个圆在一点相交的图，有 m 个独立回路，所以

$$H_0 \cong \mathbb{Z}, \quad H_1 \cong \mathbb{Z}^m, \quad H_q = 0 \quad (q \geq 2).$$

注意 H_0 不随圆的个数变成 $\mathbb{Z}^m$, 因为整个楔和仍然连通。真正相加的是约化同调, 或普通同调的正维部分。

8.7 专题七：环面去点为什么会变成楔和

环面 T^2 的标准模型是正方形对边粘合。正方形内部的一个点去掉后, 剩下的空间可以向正方形的边界骨架收缩; 对边粘合后, 这个骨架正是两个圆的楔和:

$$T^2 - \{p\} \simeq S^1 \vee S^1.$$

所以

$$H_0(T^2 - \{p\}) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(T^2 - \{p\}) \cong \mathbb{Z}^2, \quad H_q(T^2 - \{p\}) = 0 \quad (q \geq 2).$$

去两个点时, 可以把第二个缺口看成多出来的一条独立绕洞回路。更一般地, 亏格 g 的连通可定向闭曲面去掉 $k > 0$ 个点后, 会形变收缩到

$$\bigvee^{2g+k-1} S^1.$$

对环面 $g = 1$, 去 k 个点得到

$$H_1 \cong \mathbb{Z}^{k+1}.$$

因此去一个点是 $\mathbb{Z}^2$, 去两个点是 $\mathbb{Z}^3$ 。

为什么 $T^2 - \{p\}$ 的 H_2 消失

闭环面有一个二维基本类, 因为整个曲面没有边界。去掉一点后, 曲面不再闭合, 二维基本类被破坏; 它可以收缩到一维图, 所以所有 $q \geq 2$ 的同调都为零。

8.8 专题八：相对同调不要怕，先看一句话

相对同调 $H_q(X, A)$ 的一句话解释是:

把 A 里的东西当作已经为零, 只看 X 相对于 A 多出来什么。

所以相对链群是

$$S_q(X, A) = S_q(X) / S_q(A).$$

这表示 A 里的 q 链在相对链群中被视为零。

相对闭链的条件也要这样理解。若 $c \in S_q(X)$ 代表一个相对链, 则它在相对意义下闭合, 意思是

$$\partial c \in S_{q-1}(A).$$

也就是说, 它的边界允许落在 A 里, 因为 A 里的东西已经被忽略。

最典型的例子是 (D^n, S^{n-1}) 。整个 D^n 的边界是 S^{n-1} , 在普通同调中它不是闭的; 但在相对同调中, 边界落在 S^{n-1} 里, 被视为零, 所以 D^n 给出一个相对 n 维闭链。这就是

$$H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$$

的来源。

8.9 专题九：长正合列追图到底在追什么

长正合列看起来吓人，其实每次只用一小段。核心规则永远是

$$\text{Im}(\text{前一个映射}) = \text{Ker}(\text{后一个映射}).$$

例如看到

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$$

就知道 f 单射，因为 $\text{Ker } f = \text{Im}(0) = 0$ 。看到

$$A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$$

就知道 f 满射，因为 $\text{Im } f = \text{Ker}(0) = B$ 。

再看一段最常见的计算：

$$0 \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \rightarrow K \rightarrow 0.$$

正合性告诉我们

$$G \cong \text{Ker}(\times m), \quad K \cong \text{coker}(\times m).$$

若 $m \neq 0$ ，则 $\text{Ker}(\times m) = 0$ ，而

$$\text{coker}(\times m) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

所以

$$G = 0, \quad K \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

这类计算在射影平面、透镜空间、胞腔同调中都会反复出现。

追图时的书写顺序

1. 只写目标维度附近五到七项。
2. 把已知为零的群替换成 0。
3. 先判断单射、满射、同构。
4. 若出现乘法映射 $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z}$ ，立刻算核和余核。
5. 最后再解释生成元对应的几何对象。

8.10 专题十：Mayer–Vietoris 怎么选覆盖

Mayer–Vietoris 的难点不是写序列，而是选 $X = U \cup V$ 。好的覆盖要满足： U 、 V 、 $U \cap V$ 都比 X 容易算。

常见选择如下。

- 算 S^n ：取上下两个半球的加厚开集，交集像 S^{n-1} 。
- 算楔和：取包含两边主体的邻域，交集可缩。

- 算环面：可取两个圆柱状区域，交集是两个圆柱或两个圆的并。
- 算去点空间：常先找形变收缩到图；若图不明显，再用覆盖。

用 Mayer–Vietoris 时， $H_0(U \cap V)$ 很重要。交集有几个连通分支，往往决定是否产生新的 H_1 。圆周 S^1 就是最好的例子：两个弧本身都可缩，但交集有两个分支，于是产生一个一维洞。

8.11 专题十一：映射诱导同态的题怎么做

这类题不要从链映射定义硬推。标准做法是先找生成元。

例如 $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ，生成元是绕圆一圈的类 $[\alpha]$ 。若 $f(z) = z^m$ ，则 $f \circ \alpha$ 绕圆 m 圈，所以

$$f_*[\alpha] = m[\alpha].$$

这就确定了整个同态。

对 S^n 也类似。因为

$$H_n(S^n) \cong \mathbb{Z},$$

自映射 $f: S^n \rightarrow S^n$ 在顶维同调上一定是乘以某个整数，这个整数就是映射次数：

$$f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n), \quad f_*(u) = \deg(f)u.$$

常值映射在正维同调上诱导零映射，因为正维洞被压成一点后消失；但在 H_0 上，只要空间连通，诱导映射仍是 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ 的恒等。

8.12 专题十二：一张做题决策表

题目特征	优先工具
问 H_0	数道路连通分支
凸集、球、星形区域	可缩空间同调
$\mathbb{R}^n - \{0\}$	形变收缩到 S^{n-1}
圆环、圆柱、莫比乌斯带	形变收缩到 S^1
楔和、图、去点曲面	图模型或楔和公式
$A \subset X$ 明显出现	相对同调长正合列
空间由两块拼成	Mayer–Vietoris
删去 A 内部一块	切除定理
问 f_*	看生成元被送到几倍生成元

8.13 专题十三：几个必须会的快速计算

例题 8.1. 计算 $S^2 - \{p, q\}$ 。

去掉两个点的球面同胚于圆柱 $S^1 \times \mathbb{R}$ ，形变收缩到 S^1 。所以

$$H_0 \cong \mathbb{Z}, \quad H_1 \cong \mathbb{Z}, \quad H_q = 0 \quad (q \geq 2).$$

例题 8.2. 计算 $S^1 \vee S^2$ 。

楔和正维同调相加，且空间连通。因此

$$H_0 \cong \mathbb{Z}, \quad H_1 \cong \mathbb{Z}, \quad H_2 \cong \mathbb{Z}, \quad H_q = 0 \quad (q \geq 3).$$

例题 8.3. 计算 $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ 。

径向形变收缩到 S^2 ，所以

$$H_0 \cong \mathbb{Z}, \quad H_2 \cong \mathbb{Z}, \quad H_q = 0 \quad (q \neq 0, 2).$$

特别注意它的 $H_1 = 0$ ，因为 $\mathbb{R}^3$ 中绕点的一维圈可以滑开，真正留下的是二维球面洞。

例题 8.4. 计算 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 。

径向形变收缩到 S^1 ，所以

$$H_0 \cong \mathbb{Z}, \quad H_1 \cong \mathbb{Z}, \quad H_q = 0 \quad (q \geq 2).$$

例题 8.5. 计算 $\mathbb{R} - \{0\}$ 。

它有两个道路连通分支，每个分支可缩，所以

$$H_0 \cong \mathbb{Z}^2, \quad H_q = 0 \quad (q > 0).$$

不要套用 S^{n-1} 的连通球面公式，因为 S^0 本身有两个点。

8.14 专题十四：最后再说一遍本章逻辑

奇异同调的定义负责严谨性，计算工具负责可操作性。学习时最重要的是把二者接起来：

几何空间 $\longrightarrow$ 变形或分解 $\longrightarrow$ 已知模型或正合列 $\longrightarrow$ 阿贝尔群计算.

如果一道题卡住，不要先怀疑自己不会展开奇异链。先问四个问题：它连通吗？它能收缩到什么？它能拆成哪两块？有没有自然的子空间 $A \subset X$ ？这四个问题通常就能决定该用哪一个定理。