

拓扑基础作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

Spring 2026

目录

第一章 第 1 周拓扑作业	2
第二章 第 2 周拓扑作业	7
第三章 第 3 周拓扑作业	11
第四章 第 4 周拓扑作业	13
第五章 第 5 周拓扑作业	19
第六章 第 6 周拓扑作业	29
第七章 第 7 周拓扑作业	33
第八章 第 8 周拓扑作业	37
第九章 第 9 周拓扑作业	42
第十章 第 11 周拓扑作业	51
第十一章 第 12 周拓扑作业	57
第十二章 第 13 周拓扑作业	60
第十三章 第 14 周拓扑作业	66
第十四章 第 15 周拓扑作业	76

第一章 第 1 周拓扑作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

题目 1.1. 在 1 维欧氏空间 $\mathbb{R}^1$ 中, 对于 $a < b$, 我们有 $(a, b) \in \tau_{\mathbb{R}^1}$, $[a, b), (a, b], [a, b] \notin \tau_{\mathbb{R}^1}$ 。

解答. $[a, b)$ 不是开集, 因为对点 a 来说, 不存在 $\delta > 0$, 使得 $(a - \delta, a + \delta) \subseteq [a, b)$ 。
 $(a, b], [a, b]$ 同理。

题目 1.2. 设 $\mathbb{Q}, \mathbb{W} \subset \mathbb{R}$ 分别为全体有理数和无理数所构成的集合。证明 $\mathbb{Q}, \mathbb{W} \notin \tau_{\mathbb{R}^1}$ 。

解答. 假设 $\mathbb{Q}$ 是开集, 那么任意的 $q \in \mathbb{Q}$, 存在 $\delta > 0, \delta \in \mathbb{R}$, 使得区间 $(q - \delta, q + \delta) \subseteq \mathbb{Q}$ 。
但由于无理数是稠密的, 不可能存在一个区间中没有无理数, 因此矛盾! 故 $\mathbb{Q}$ 不是开集, 不属于 $\tau_{\mathbb{R}^1}$ 。因为有理数也是稠密的, 所以无理数的证明同理。

题目 1.3. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个非常值的连续映射。则有无交并分解

$$\mathbb{R}^n = A^- \sqcup A^0 \sqcup A^+,$$

其中

$$A^- = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) < 0\}; \quad A^0 = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}; \quad A^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > 0\}.$$

证明: $A^-, A^+ \in \tau_{\mathbb{R}^n}$, $A^0 \notin \tau_{\mathbb{R}^n}$ 。

解答. A^- 和 A^+ 的证明基本一样, 所以只证明 A^- 的部分。

先证明 $A^- \in \tau_{\mathbb{R}^n}$ 。任意的 $x \in A^-$, 由 f 的连续保号性可知, 存在 $\delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $(x - \delta, x + \delta)$ 上不会变号, 仍然小于 0, 故 $(x - \delta, x + \delta) \subseteq A^-$, 故 A^- 是开集。

再证明 $A^0 \notin \tau_{\mathbb{R}^n}$ 。假设 A^0 是开集。因为 f 是连续映射, $A^0 = f^{-1}(\{0\})$, 所以 A^0 是闭集。所以 A^0 既是开集又是闭集, 矛盾! 故 $A^0 \notin \tau_{\mathbb{R}^n}$ 。

题目 1.4. 已知度量空间 (X, d) 。证明

- 1) X 中的空集 $\emptyset$ 是 X 的闭子空间。
- 2) 如果 $A_1, \dots, A_n$ 是 X 中的有限个闭子空间, 则它们的并集 $A_1 \cup \dots \cup A_n$ 也是 X 的闭子空间。
- 3) 如果 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$, 是 X 中的一簇闭子空间, 则它们的交集 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 也是 X 的闭子空间。

解答. 1) $\emptyset$ 的补集是 X , 任意的 $x \in X$, x 的邻域仍然是 X 的子集, 所以 X 是开集。开集的补集是闭集, 所以 $\emptyset$ 是闭集。

2) 因为 $A_1, \dots, A_n$ 是 X 中的有限个闭子空间, 所以 $A_1^c, \dots, A_n^c$ 就是 X 中的开子空间。由德摩根定律

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$$

而有限个开集的交仍然是开集, 所以 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 是闭集。

3) 因为 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$, 是 X 中的一簇闭子空间, 所以 A_λ^c 是一簇开子空间, 由德摩根定律

$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

无穷个开集的并仍然是开集, 所以 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 是闭集。

题目 1.5. 设 A 是度量空间 (X, d) 的一个闭子空间, $x \in X$ 是一个点. 定义

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \in \mathbb{R} | a \in A\}.$$

证明:

- 1) $x \rightarrow d(x, A)$ 是 X 上的连续函数 (称为到子集合 A 的距离函数);
- 2) $d(x, A) = 0$ 的充分必要条件是 $x \in A$ 。

解答. 1) 任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \varepsilon$, $d(x, y) < \delta$, 对任意的 $a \in A$,

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

两边取下确界可得

$$d(x, A) - d(y, A) \leq \delta = \varepsilon$$

交换 x, y 的位置, 可得

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \varepsilon$$

所以 $x \rightarrow d(x, a)$ 是 X 上的连续函数。

2) $\Rightarrow$: $d(x, A) = 0$, 说明 $\inf\{d(x, a) \in \mathbb{R} | a \in A\} = 0$, 即任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $a \in A$, 使得 $d(x, a) < \varepsilon$, 所以 x 是集合 A 的极限点。由于 A 是闭集, 所以不存在极限点在集合 A 之外, 故 $x \in A$ 。

$\Leftarrow$: 因为 $x \in A$, 所以 $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \in \mathbb{R} | a \in A\} = d(x, x) = 0$ 。

题目 1.6. 已知度量空间 (X, d) , (Y, d') 以及集合间的映射 $f: X \rightarrow Y$ 。证明 f 是连续映射的充要条件是, 对于 Y 中的任意一个闭集 $B \subset Y$, $f^{-1}(B)$ 是 X 中的闭集。

解答. 先证明 $\Rightarrow$, 因为 B 是 Y 中的闭集, 所以 $Y \setminus B$ 是开集, 由于 f 是连续映射, 所以 $f^{-1}(Y \setminus B)$ 是开集。因为逆像保运算, 所以 $f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$, 由于 $f^{-1}(Y \setminus B)$, $f^{-1}(Y)$ 都是开集, 所以 $f^{-1}(B)$ 是 X 中的闭集。

再证明 $\Leftarrow$, 对于任意的 $x \in X$, 任意的 $\varepsilon > 0$, $B(f(x), \varepsilon)$ 是 Y 中的开集, 于是 $Y - B(f(x), \varepsilon)$ 是 Y 中的闭集。于是 $f^{-1}(Y - B(f(x), \varepsilon))$ 是 X 中的闭集, 于是 $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ 是 X 中的开集。

存在 $\delta > 0$, $x \in B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, 于是 $f(x) \subseteq (f \circ f^{-1})(B(f(x), \varepsilon)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$, 故 f 是连续的。

题目 1.7. 设 $\mathbb{Q}^n$ 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中坐标为有理数的点的集合。证明 $\mathbb{Q}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的稠密子空间。

解答. 要证明 $\mathbb{Q}^n = \mathbb{R}^n$, 只需证明 $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$ 。

首先说明, 集合 $\mathbb{W} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \text{ 中至少存在一个是无理数}\}$ 是 $\mathbb{Q}^n$ 的导集, 也就是任意 $w \in \mathbb{W}$, 是 $\mathbb{Q}^n$ 的极限点。

$\forall \delta > 0$, 定义 w 的开邻域为 n 维正方体 $C_\delta: (x_1 - \delta, x_1 + \delta) \times \dots \times (x_n - \delta, x_n + \delta)$, 由于有理数的稠密性, 无论 δ 多小, 总会存在 $q_i \in (x_i - \delta, x_i + \delta), i = 1, \dots, n$, 从而每个 C_δ 中都会有 $\mathbb{Q}^n$ 中的点。于是 w 是 $\mathbb{Q}^n$ 的极限点, $\mathbb{W}$ 是 $\mathbb{Q}^n$ 的导集。

于是, $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{Q}^n \cup \mathbb{W} = \mathbb{R}^n$.

题目 1.8. 已知拓扑空间 (X, τ) 的一个子空间 $A \subseteq X$. 它的边界是

$$\partial A := \overline{A} - \overset{\circ}{A}.$$

证明:

$$(1) \partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$$

$$(2) \partial A = \emptyset \iff A \text{ 既开且闭.}$$

解答. (1) 由于对 $B \subset X$, $X - \overline{B} = (X - B)^\circ$, 令 $B = X - A$, 有 $\overset{\circ}{A} = X - \overline{X - A}$. 所以

$$\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus [X \setminus (\overline{X - A})] = \overline{A} \cap [X \setminus (\overline{X - A})]^c = \overline{A} \cap \overline{X - A}.$$

$$(2) \partial A = \emptyset \iff \overline{A} \text{ 与 } \overline{X - A} \text{ 没有交集.}$$

先证明 A 是闭集. 设 $x \in \overline{A}$, 如果 $x \notin A$, 那么 $x \in X - A$, 那么 $x \in \overline{X - A}$, 从而有交集了. 矛盾! 所以 A 是闭集.

同理, $X - A$ 是闭集, 所以 A 是开集.

所以 A 既开又闭.

题目 1.9. 考虑 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的下述两个拓扑:

1) τ_1 : 由距离函数 $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 所规定的拓扑;

2) τ_2 : $\mathbb{R}^n$ 上的余有限拓扑.

证明集合之间的恒同映射 $\text{id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

1) 是一个连续映射: $(\mathbb{R}^n, \tau_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \tau_2)$;

2) 不是一个连续映射: $(\mathbb{R}^n, \tau_2) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \tau_1)$.

解答. 1) τ_1 中的开集就是通常的开集. τ_2 中的开集 U 要么是 $\emptyset$, 要么 $\mathbb{R}^n \setminus U$ 是有限集. 对任意 $U \in \tau_2$, 若 $U = \emptyset$, 则 $\text{id}^{-1}(U) = \emptyset \in \tau_1$. 若 $U \neq \emptyset$, 因为 $\mathbb{R}^n \setminus U$ 是有限集, 所以 $\text{id}^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$ 也是有限的, 在 τ_1 中是闭集, 所以其补集是开集. 所以恒同映射是连续映射.

2) 取 $U \in \tau_1$, 使得 $\mathbb{R}^n \setminus U$ 是无限集. 于是 $\text{id}^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$ 是无限集, 即 $\mathbb{R}^n \setminus \text{id}^{-1}(U)$ 是无限集, 所以 $\text{id}^{-1}(U)$ 是闭集. 因此 id 不连续.

题目 1.10. 举例说明, 焊接引理中 $A_1, A_2 \subset X$ 是闭子空间的条件不可去.

解答. 设 $X = \mathbb{R}, A_1 = (-\infty, 0), A_2 = [0, +\infty)$, 定义 $f_1 : A_1 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$, $f_2 : A_2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$, 这样由于 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 映射限制在空集上自然相等, 但是合到一起后在 $\mathbb{R}$ 上不相等。所以条件不可以去掉。

第二章 第 2 周拓扑作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 2.1. 对于一个拓扑空间 (X, τ) ，乘积空间 $X \times X$ 的对角子空间是

$$\Delta(X) = \{(x, x) \in X \times X, x \in X\}.$$

证明 (X, τ) 是 T_2 空间的充分必要条件是， $\Delta(X)$ 是乘积空间 $X \times X$ 的闭子空间。

解答. “ $\implies$ ”：只需要证明 $(X \times X) \setminus \Delta(X)$ 是开子空间。由于 (X, τ) 是 T_2 空间，所以 $\forall x, y \in X, \exists U, V \subset X$ ，使得 $x \in U, y \in V$ ，且 $U \cap V = \emptyset$ 。于是 $U \times V$ 是 (x, y) 的一个开邻域，且属于 $(X \times X) \setminus \Delta(X)$ 。因为假如某一个 $(z, z) \in U \times V$ ，那么 $z \in U \cap V$ ，矛盾！所以 $(X \times X) \setminus \Delta(X)$ 就是开集，也就是说 $\Delta(X)$ 是闭集。

“ $\impliedby$ ”：因为 $\Delta(X)$ 是乘积空间 $X \times X$ 的闭子空间，所以 $(X \times X) \setminus \Delta(X)$ 是开子空间，任意的 $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta(X)$ ，存在开集 $U \times V$ ，使得 $(x, y) \in U \times V \subset X \times X$ 。假设 (X, τ) 不是 T_2 空间，也就是存在 $x, y \in X$ ，不存在 U, V ，使得 $x \in U, y \in V$ 且 $U \cap V = \emptyset$ 。设 $z \in U \cap V$ ，那么在 $(X \times X) \setminus \Delta(X)$ 中，点 (x, y) 不会存在开邻域 $U \times V$ ，因为 $(z, z) \in U \times V$ ，矛盾！所以 (X, τ) 是 T_2 空间。

题目 2.2. 设 A 是度量空间 (X, d) 的一个闭子空间。定义函数

$$d_A : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_A(x) = \inf\{d(x, a) \in \mathbb{R}, a \in A\}.$$

证明：

- 1) d_A 是 X 上的连续函数；
- 2) $d_A(x) = 0$ 的充分必要条件是， $x \in A$ 。

解答. 1) 取 $\delta = \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}^n, y \in B(x, \delta), z \in A$, 有

$$d(y, x) \geq d(z, x) - d(z, y)$$

两边取下确界, 有

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y) \iff d_A(x) - d_A(y) \leq d(x, y) < \varepsilon$$

所以 $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$, 所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, 使得 $f(B(x, \delta_\varepsilon)) \subset B(f(x), \varepsilon)$, 也就是 d_A 是连续函数。

2) “ $\Leftarrow$ ”: 由于 $x \in A$, $d(x, x) = 0$, 所以 $d_A(x) = d(x, x) = 0$.

“ $\Rightarrow$ ”: 因为 $d_A(x) = 0$, 所以存在序列 $\{a_n\} \subset A$, 使得 $d(x, a_n) \rightarrow 0$, 也就是 $\{a_n\}$ 的极限是 x 。由于 A 是闭集, 所以 A 的极限点属于 A , 因此 $x \in A$ 。

题目 2.3. 证明两个 T_2 空间的乘积空间也是 T_2 空间。

解答. 设 $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ 是两个 T_2 空间。任意的 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 存在开集 $U_1, U_2, x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ 且 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ 。任意的 $y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2$, 同样也存在开集 V_1, V_2 满足相同的性质。于是, 在 $(X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$ 中,

当两个坐标均不同时, 点 (x_1, y_1) 和点 (x_2, y_2) 分别属于 $U_1 \times V_1$ 和 $U_2 \times V_2$, 且 $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = \emptyset$, 在这种情况下可以分离。

当有一个坐标相同时, 不妨设两个点为 $(x_1, y_1), (x_1, y_2)$, 此时, 这两个点分别属于 $U_1 \times Y_1$ 和 $U_1 \times Y_2$, 由于 $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, 所以 $(U_1 \times V_1) \cap (U_1 \times V_2) = \emptyset$, 在这种情况下也可以分离。

综上, 两个 T_2 空间的乘积空间也是 T_2 空间。

题目 2.4. 证明 T_1 空间中的任一子集的导集是闭集。

解答. 设 A 是 T_1 空间 X 的一个子集, A 的导集记为 A' , 要证明 A' 是闭集就要证明 $X \setminus A'$ 是开集。

任取 $x \in X \setminus A'$, 设 U 是 x 的一个开邻域, 那么必然存在 $U \cap (A - \{x\}) = \emptyset$, 否则 x 就是极限点了。我们断言这样的 $U \subset X \setminus A'$ 。

假设存在 $y \in U \cap A'$ 。那么由于 T_1 且 y 是极限点, 所以 U 会包含无数个 A 中的点, 而这与 $U \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ 矛盾。故 $x \in U \subset X \setminus A'$, 所以 A' 是闭集。

题目 2.5. 设 (X, τ) 是 T_2 空间, $f: X \rightarrow X$ 是连续映射。证明 f 的不动点集

$$\text{Fix}(f) := \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

是 X 的闭子空间。

解答. 设 $G = \{x \in X \mid f(x) = x\}$, 只需证明 G 是 X 的开子空间即可。

任取 $g \in G$, 由于 X 是 T_2 空间, 存在开集 $U, V \subset X$, 使得 $g \in U, f(g) \in V$ 且 $U \cap V = \emptyset$ 。由 f 的连续性, 存在 g 的开邻域 W , $W \subset U$, 且 $f(W) \subset V$ 。由于 U 与 V 无交集, 所以 W 与 $f(W)$ 无交集, 所以 $g \in W \subset G$, 所以 G 是开集, 从而 $\text{Fix}(f)$ 是闭集。

题目 2.6. 设 (Y, τ) 是 T_2 空间, $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射。证明 f 的图像

$$G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

是乘积空间 $X \times Y$ 的闭子空间。

解答. 证明 $(X \times Y) \setminus G_f$ 是开子空间。设 $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G_f$, 假设不存在 $U \times V$, 使得 $(x, y) \in U \times V \subset (X \times Y) \setminus G_f$ 。那么就是说, (x, y) 的任意开邻域 $U \times V$, 都会包含 $(x_0, f(x_0))$ 这个点。也就是说, 任意的 $y \in Y$, y 的任意开邻域 V 都会包含 $f(x_0)$, 这与 T_2 空间矛盾。因此 G_f 是 $X \times Y$ 的闭子空间。

题目 2.7. 设 (X, τ) 是 T_3 空间, A 是 X 的闭子空间, $x \notin A$ 。证明存在 x 和 A 各自的开邻域 U 和 V , 使得 $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ 。

解答. 由于 $A \subset V \subset \overline{V}$, $\overline{V}$ 是闭集, 所以根据 T_3 , 就存在 x 的开邻域 U_0 , 使得 $x \in U_0$, 且 $U_0 \cap \overline{V} = \emptyset$ 。然后我们只需要证明能找到一个 U , 使得 $\overline{U} \subset U_0$ 。考虑闭集 $X \setminus U_0$, 他不包含 x , 所以由 T_3 性质, 存在 x 的开邻域 U , 和开子集 $W \supset X \setminus U_0$, 使得 $U \cap W = \emptyset$, 所以 $U \subset \overline{U} \subset X \setminus W \subset U_0$, 所以就找到了这样的 U 。这样, 就存在 x 和 A 各自的开邻域 U 和 V , 使得 $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ 。

题目 2.8. 已知 T_4 空间 (X, τ) 中的一个闭子空间 A 上的连续映射 $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$. 证明存在 X 上的连续映射 $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, 它满足 $F|_A = f$.

解答. 将 f 按坐标分解为 $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, 每个 $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$. 令 $\phi = \tan \left[\left(x - \frac{1}{2} \right) \pi \right]$. $\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. 令 $g = \phi^{-1} \circ f = (\phi^{-1} \circ f_1, \dots, \phi^{-1} \circ f_n)$, 每个 $\phi^{-1} \circ f_i: A \rightarrow [0, 1]$, 对每个分量应用 Tietze 扩张定理, 就会存在 X 上的连续映射 $G_i: X \rightarrow [0, 1]$, 满足 $G_i|_A = g_i$, 也就是 $G|_A = g$. 于是可以令 $F = \phi \circ G$, 就构造出一个 X 上的连续映射 $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$.

题目 2.9. 举例说明, Tietze 扩张定理中 $A \subset X$ 是闭子空间的条件不可去。

提示: 写出一个映射 $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow [0, 1]$, 它不能扩张为连续映射 $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ 。

解答. 令 $f = \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) + 1 \right)$ 即可。

第三章 第 3 周拓扑作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 3.1. 证明： $R = \prod_{i=1}^n [-d, d] \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集，其中 $d > 0$ 是一个常数。

解答. 由于在 $\mathbb{R}^1$ 中，闭区间 $[-d, d]$ 是紧集，因为有限覆盖定理。所以 R 作为紧集的乘积空间也是紧集。

题目 3.2. 紧致空间必是局部紧致空间。欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 局部紧致，但不紧致。

解答. 设 E 是紧致空间，那么他的每一个开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 都有一个有限的子覆盖 $\{U_i\}_{i=1}^n$ 。任意的 $x \in E$ ，由于整个空间 E 是一个开集，因此 E 是 x 的一个开邻域，而 E 是紧致的，所以 E 是局部紧致的。

$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ，可以构造一个紧致子空间 $Q = \prod_{i=1}^n [x_i - d, x_i + d]$ ， $Q \subset \mathbb{R}^n, x \in Q^\circ$ 。所以 $\mathbb{R}^n$ 是局部紧致的。但是 $\mathbb{R}^n$ 不是紧致的，因为 $\bigcup_{i=1}^\infty (-i, i)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开覆盖，但是选不出一个有限的子覆盖覆盖 $\mathbb{R}^n$ 。

题目 3.3. 局部紧致的 T_2 空间满足 T_3 公理。

解答. 首先需要证明一个引理，在局部紧致的 T_2 空间中，任意 $x \in X$ 和任意开邻域 W ，存在 x 的紧致邻域 K 使得 $K \subseteq W$ 。

引理的证明：由于空间是紧致的，所以存在紧致子空间 A ，使得 $x \in A^\circ$ 。

假如 $A \subset W$ ，那么取 $K = A$ 即可。除非，取 $L = A \cap W$ ，可以找到开集 $M \subset L$ ，使得 $\overline{M} \subset L$ ，由于 $\overline{M}$ 是紧致子空间 A 的闭子集，所以也是紧致的，且 $x \in \overline{M} \subset L \subset W$ ，所以这时候取 $K = \overline{M}$ 。

回到原题, 设 X 是局部紧致的 T_2 空间, 对任意点 x , 设 $C \subset X$ 是不包含 x 的闭集, 只需证明存在开集 U, V , 使得 $x \in U, C \subset V$ 且 $U \cap V = \emptyset$. 由引理, 由于 $X - C$ 是一个开集, 所以存在 x 的开邻域 W , $x \in W \subset X - C$, 因此存在 x 的紧致邻域 K , $x \in K \subset W \subset X - C$, 因此, 只要令 $V = X - K$, $U = K^\circ$, 这两个都是开集, 且 $x \in U, C \subset V, U \cap V = \emptyset$.

题目 3.4. 仿紧的 T_2 空间满足 T_4 公理.

解答. 先证明 T_3 , 再证明 T_4 .

设 $x \in X$ 为任意一点, $C \subseteq X$ 为不含 x 的闭集. 我们需要构造 x 和 C 的不交开邻域. 由 T_2 , 我们知道, 任意的 $y \in X, x \neq y$, 存在开集 U_y 和 V_y , 使得 $x \in U_y, y \in V_y$ 且 $U_y \cap V_y = \emptyset$, 于是我们有一个覆盖了 C 的开集族 $\{V_y\}_{y \in C}$. 所以我们可以得到一个开覆盖 $\mathcal{O} = \{X \setminus C\} \cup \{V_y\}_{y \in C}$. 根据仿紧性, 这个开覆盖存在一个局部有限的开加细 $\mathcal{W}$, 考虑 $\mathcal{W}$ 中那些与 C 相交的元素, 记作 $\mathcal{W}' = \{W \in \mathcal{W} \mid W \cap C \neq \emptyset\}$. $\mathcal{W}'$ 覆盖 C , 同时任意的 $W \in \mathcal{W}'$, 由于它包含在某个 V_y 中, 且 $x \notin \overline{V_y}$ (因为 T_2 性质), 所以 $x \notin \overline{W}$. 令 $V = \bigcup_{W \in \mathcal{W}'} W$, 显然 $C \subset V$, $x \notin V$, 且 V 是开集, 所以就可以令 $U = X \setminus \overline{V}$, 这就是 x 的开邻域且与 V 不交. 至于为什么 $\overline{V}$ 不含 x , 因为

$$\overline{V} = \overline{\bigcup_{W \in \mathcal{W}'} W} = \bigcup_{W \in \mathcal{W}'} \overline{W}$$

每个 $\overline{W}$ 都不含 x , 所以他们的并也不含 x , 因此 $x \notin \overline{V}$. 至此, 我们证明了: 仿紧 T_2 空间是 T_3 的.

现在假设 A, B 是 X 中两个不相交的闭集. 我们需要构造开集 $U \supset A, V \supset B$ 且 $U \cap V = \emptyset$.

利用 T_3 , 任意的 $a \in A$, 我们可以存在开集 U_a, V_a , 使得 $a \in U_a, B \subset V_a, U_a \cap V_a = \emptyset$, 这样我们就得到了一个覆盖 A 的开集族 $\{U_a\}_{a \in A}$. 类似于 T_3 的证明, 考虑 X 的开覆盖 $\{U_a \mid a \in A\} \cup \{X \setminus A\}$, 由仿紧性, 存在一个局部的开加细 $\mathcal{U}$, 然后挑出来里面与 A 相交的部分 $\mathcal{U}'$, 里面的每一个集合 U , 都包含于某个 U_a , 且 $\overline{U} \cap B = \emptyset$, 所以令 $U = \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U, V = X \setminus \overline{U}$, 就可以得到一个 $A \subset U, B \subset V, U \cap V = \emptyset$.

这就完成了 T_4 的证明。

(上面的题都是通过各种渠道写上的, 我是真不会呀)

第四章 第 4 周拓扑作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

备注 4.1.

题目 4.7 和 4.9 不会做

题目 4.1. 设 C 为 X 的连通子空间, 并且 $C \subset A \subset \bar{C}$. 证明 A 也是 X 的连通子空间.

解答. 假设 A 不连通, 那么就存在非空开集 U, V , 使得 $A = U \sqcup V$, 由于 C 是 X 的连通子空间, 所以 C 必然含于 U 或含于 V , 不妨设 $C \subset U$. 于是 $A = U \sqcup V \subset \bar{C} \subset \bar{U}$. 设 $v \in V$, 那么有 $v \in \bar{C}$, 由于 V 是开集, 所以会存在 v 的开邻域 W , $W \subset V$, 但又由于 v 是 C 的极限点, 所以 W 内会有无穷多个 C 的点. 于是 $V \cap C \neq \emptyset$. 这与 $C \subset U$, $U \cap V = \emptyset$ 矛盾. 所以 A 是连通的.

下面的习题 2-3 用到介值定理 (命题 3: 连通空间 X 上的一个连续函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 可取到所有中间值)

题目 4.2. 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = 0$.

解答. 由于 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 不妨设 $f(a) < 0, f(b) > 0$, 由介值定理, 会存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = 0 \in (f(a), f(b))$.

题目 4.3. (1 维 Brouwer 不动点定理): 设 $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ 连续. 存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = c$.

提示: 如果 $f(-1) = -1$ 或 $f(1) = 1$, 结论已经成立. 下设 $f(1) < 1, f(-1) > -1$. 引入辅助函数 $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. 则有 $g(1) \cdot g(-1) < 0$.

解答. 接着提示证明, 设 $g(x) = f(x) - x$, $g(1) = f(1) - 1 < 0$, $g(-1) = f(-1) + 1 > 0$, 且 g 在 $[-1, 1]$ 上连续, 由问题 4.2 得, 存在一个 c , 使得 $g(c) = f(c) - c = 0$, 也就是 $f(c) = c$.

题目 4.4. 证明拓扑空间 X 连通的充要条件是 X 的每个非空真子空间有非空的边界.

解答. 非空真子空间有非空的边界, 意味着 $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ 不为空集. 先证明假如 $\partial A = \emptyset$ 当且仅当 A 既是开集又是闭集 (之前其实证明过).

“ $\implies$ ”: 因为 $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \emptyset$, 所以 $\overline{A} = \overset{\circ}{A}$, 但是由于 $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$, 所以 $A = \overset{\circ}{A} = \overline{A}$, 所以 A 既是开集又是闭集.

“ $\impliedby$ ”: 若 A 即开又闭, 那么 $\overline{A} = A = \overset{\circ}{A}$, 于是 $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = A \setminus A = \emptyset$.

然后回到本题的证明, X 连通的定义是: 只有 $\emptyset$ 和 X 是既开又闭的子集.

“ $\implies$ ”: X 连通, 且 $\emptyset$ 和 X 不是 X 的非空真子空间, 所以 X 的每一个非空真子空间都不是既开又闭的子集, 所以有非空的边界.

“ $\impliedby$ ”: 因为 X 的每个非空真子空间有非空的边界, 所以每个非空真子集都不是既开又闭的, 所以只有 $\emptyset$ 和 X 本身是既开又闭的子集, 所以 X 连通.

题目 4.5. 设 X 是一个拓扑空间, $A \subset X$ 是连通子空间, $B \subset X$ 既开又闭. 证明若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 $A \subseteq B$.

解答. 假设 $A \not\subseteq B$, 那么我可以构造两个非空开集 $U = A \cap B, V = A \setminus B$, 使得 $A = U \sqcup V$. 由于 B 是既开又闭的, 所以 $A \cap B$ 是开集, $V = A \setminus B = A \cap (X - B)$ 也是开集. 同时 $U \cap V$ 显然是空集. 于是 $A = (A \cap B) \cup (A \cap (X - B))$ 就被分成了两个非空不相交的开集, 这与 A 连通矛盾, 因此假设不成立, 必有 $A \subseteq B$.

题目 4.6. 设 X 是一个拓扑空间, $A \subset X$ 是连通子空间, $B \subset X$ 既开又闭. 证明 $A \subseteq B$, 或 $A \subseteq X - B$.

解答. 假设 $A \cap B \neq \emptyset$, 则由上一题得知 $A \subseteq B$.

假设 $A \cap B = \emptyset$, 那么就是 $A \subseteq X - B$.

题目 4.7. 证明每个开集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的连通分支可数.

解答. 首先因为 $\mathbb{R}^n$ 是局部连通的, 所以任意 $x \in A \subset \mathbb{R}^n$, 存在连通子集 (也就是一个小开球) $B(x, \varepsilon)$, 使得 $x \in B(x, \varepsilon) \subset A$, 又因为连通子集必然含于某一个连通分支之中, 所以 A 的每个连通分支是开集, 并且两两不相交. 由于有理数是稠密的, 所以每个分支必然包含一个有理数点, 所以总的分支的基数与不超过 $\mathbb{Q}^n$ 的基数, 所以可数.

题目 4.8. 证明 n 维球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, d(x, 0) = 1\}$ 道路连通.

解答. 设 $p, q \in S^n$, 定义

$$\gamma(t) = \frac{(1-t)p + tq}{d[(1-t)p + tq, 0]}$$

当分母不为 0, 也就是 $p \neq -q$ 时, $\gamma(t)$ 就是连续映射, $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$.

当 $p = q$ 时, 只需另取一点 $r \in S^n$, 构造道路 γ_1 链接 p, r , γ_2 链接 r, q , 然后拼接这两条道路就得到了 p 到 q 的路径.

因此任意两点 $p, q \in S^n$ 都可用连续的路径连接, 故 S^n 道路连通.

题目 4.9. 设 $C \subset \mathbb{R}^2$ 是一个可数集. 证明补空间 $\mathbb{R}^2 - C$ 道路连通.

解答. (这真没想出来还能这么做)

设 $C \subset \mathbb{R}^2$ 是可数集, 取任意两点 $A, B \in \mathbb{R}^2 \setminus C$. 考虑所有过 A 且经过 C 中点的直线, 即集合 $\{\text{直线 } Ac \mid c \in C\}$, 以及所有过 B 且经过 C 中点的直线, 即 $\{\text{直线 } Bc \mid c \in C\}$. 这些直线至多可数条, 可数条直线的并集不能覆盖整个 $\mathbb{R}^2$, 故存在点 P 不属于这两个集合的并集, 且 $P \notin C$. 此时, 线段 AP 和 PB 均不包含 $\setminus(C \setminus)$ 中的点. 因为若某点 $c \in C$ 在线段 AP 上, 则 c 在直线 AP 上, 但 P 不在直线 Ac 上, 矛盾; 因此, 折线 APB 是 $\mathbb{R}^2 \setminus C$ 中连接 A 和 B 的连续道路. 故 $\mathbb{R}^2 \setminus C$ 道路连通.

题目 4.10. 令 $A = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2, s, t \in \mathbb{Q}\}$ 是平面中全体有理点的集合. 证明它的补空间 $\mathbb{R}^2 - A$ 道路连通.

解答. 由于 A 是可数集, 所以由上一题可得道路连通.

定义：欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间 Ω 称为凸子空间，如果对于任意两点 $a, b \in \Omega$ ，它们之间的连线位于 Ω 。

补注：空集也是凸集。

在 $\mathbb{R}^n$ 中， $a, b \in \mathbb{R}^n$ 之间线段的参数方程是

$$\alpha(t) = tb + (1-t)a, \quad t \in [0, 1].$$

题目 4.11. 证明.

- 1) 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集是道路连通空间；
- 2) 设 $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ 是凸子空间，则 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 也是凸子空间。

解答. 1) 设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是凸集，任意两点 $a, b \in X$ ，存在线段 $\alpha(t) = tb + (1-t)a$ ，且 $\alpha \in X$ ， $\alpha(0) = a, \alpha(1) = b$ ， α 连续，所以 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集是道路连通空间。

2) 设 $a, b \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ 。那么由 $a, b \in \Omega_1$ 得到他们之间的连线 $\alpha \subset \Omega_1$ ，也就是点集 $\{tb + (1-t)a \mid t \in [0, 1]\} \subset \Omega_1$ ，同理， $\{tb + (1-t)a \mid t \in [0, 1]\} \subset \Omega_2$ ，所以 $\alpha(t) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ ，所以 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 是凸集。

题目 4.12. 考虑 n 元二次多项式函数

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i^2$$

其中的系数 $a_i > 0$ 。设 $r > 0$ 是一个正实数，证明

$$\Omega(f, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq r\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸子空间。

(提示：方程 $f(x) = r$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个椭球面， $\Omega(f, r)$ 是该椭球面所界的闭椭球体)。

解答. 任意的 $x, y \in \Omega(f, r)$ ，定义 $\alpha(t) = ty + (1-t)x$ ， $t \in [0, 1]$ ，只要能证明对任

意的 $z \in \alpha(t)$, $z \in \Omega(f, r)$, 就可以说明他是一个凸子空间。

$$\begin{aligned}
 f(z_1, \dots, z_n) &= \sum_{i=1}^n a_i z_i^2 = \sum_{i=1}^n a_i (ty_i + (1-t)x_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i [t^2 y_i^2 + 2(1-t)tx_i y_i + (1-t)^2 x_i^2] \\
 &\leq t^2 r^2 + (1-t)^2 r^2 + 2t(1-t) \sum_{i=1}^n (\sqrt{a_i} x_i) (\sqrt{a_i} y_i) \\
 \text{Cauchy 不等式} &\leq (1-2t+2t^2) r^2 + (2t-2t^2) \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n a_i y_i^2\right)} \\
 &\leq r^2
 \end{aligned}$$

所以 $f(z) \leq r \implies z \in \Omega(f, r)$, 所以 $\Omega(f, r)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸子空间。

题目 4.13. 考虑 n 元一次多项式函数

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

其中的系数 a_i 不全为 0. 对于一个实数 $r \in \mathbb{R}$, 令

$$\Omega^+(f, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \geq r\},$$

$$\Omega^0(f, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = r\},$$

$$\Omega^-(f, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq r\}$$

证明 $\Omega^+, \Omega^0, \Omega^- \subseteq \mathbb{R}^n$ 是凸子空间.

提示: $\Omega^0(f, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一张超平面, Ω^+, Ω^- 位于它的两侧.

解答. 任意的 $x, y \in \Omega^+$, 定义 $\alpha(t) = ty + (1-t)x$, $t \in [0, 1]$, 只要能证明对任意的 $z \in \alpha(t)$, $z \in \Omega^+$, 就可以说明他是一个凸子空间。

$$\begin{aligned}
 f(z_1, \dots, z_n) &= \sum_{i=1}^n a_i z_i = \sum_{i=1}^n a_i (ty_i + (1-t)x_i) \\
 &= t \sum_{i=1}^n a_i y_i + (1-t) \sum_{i=1}^n a_i x_i \\
 &\geq tr + (1-t)r = r
 \end{aligned}$$

所以 $f(z) \geq r \implies z \in \Omega^+$, 所以 Ω^+ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸子空间。其他两个同理, 不过是 $=$ 和 $\leq$.

题目 4.14. 证明局部连通空间中的开子空间局部连通.

解答. 设 X 是局部连通空间, Y 是他的开子空间。所以在 Y 中, $\forall x \in Y$, 存在一个邻域 U , $x \in U \subset X$, 所以存在连通邻域 V , $x \in V \subset U \subset Y \subset X$, 所以 Y 是局部连通的。

第五章 第 5 周拓扑作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

备注 5.1. 题 5.5 满射的证明不会，问的 AI. 然后同胚的一些等价条件还是不会使用。

题目 5.1. 验证定理 5 结论 A 的证明中所构造的映射对 f, g 互逆；

验证定理 5 结论 B 的证明中所构造的映射对 f, g 互逆；

证明定理 5 结论 C 的证明中所构造的映射对 f 是连续双射。

解答. (1)

$$\begin{aligned}f(y) &= \frac{y}{1+|y|}, g(x) = \frac{x}{1-|x|} \\f(g(x)) &= \frac{\frac{x}{1-|x|}}{1+\left|\frac{x}{1-|x|}\right|} = \frac{x}{1-|x|+|x|} = x, \\g(f(y)) &= \frac{\frac{y}{1+|y|}}{1-\left|\frac{y}{1+|y|}\right|} = \frac{y}{1+|y|-|y|} = y.\end{aligned}$$

所以对 f, g 互逆。

(2)

$$\begin{aligned}f(x, t) &= \frac{x}{1-t}, g(y) = \left(\frac{2y}{1+|y|^2}, \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1} \right) \\f(g(y)) &= \frac{\frac{2y}{1+|y|^2}}{1-\frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}} = \frac{2y}{|y|^2+1-|y|^2+1} = y\end{aligned}$$

$$g(f(x, t)) = \left(\frac{2x(1-t)}{(1-t)^2 + x^2}, \frac{x^2 - (1-t)^2}{x^2 + (1-t)^2} \right) = \left(\frac{2x(1-t)}{2-2t}, \frac{-2t^2 + 2t}{2-2t} \right) = (x, t)$$

所以对 f, g 互逆。

(3) f 的单射和满射已经在书上证明过了, 只需证明 f 是连续的。

任意的 $\varepsilon > 0$, 设 $x \in B(x, \delta)$, $\delta < \frac{\varepsilon|x|}{\varepsilon+2}$ 是 x 的一个小邻域, 也就是 $|x| - \delta < |y| < |x| + \delta$, $\forall y \in B(x, \delta)$ 所以

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= \left| \frac{y}{|y|} - \frac{x}{|x|} \right| < \left| \frac{y}{|x| - \delta} - \frac{x}{|x|} \right| = \left| \frac{y|x| - x|x| + x\delta}{|x|(|x| - \delta)} \right| \\ &\leq \frac{|y - x||x| + |x\delta|}{|x|(|x| - \delta)} < \frac{2\delta}{|x| - \delta} < \varepsilon \end{aligned}$$

所以 $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$, 所以 f 是连续的。

题目 5.2. 证明下述拓扑空间彼此同胚:

- 1) $S^{n-1} \times \mathbb{R}$;
- 2) $\mathbb{R}^n - \{0\}$;
- 3) $\mathbb{R}^n - D^n$.

提示: 结论 A: $S^{n-1} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n - \{0\}$. 由于 $\mathbb{R} \cong (0, +\infty)$, 只需要证明 $S^{n-1} \times (0, +\infty) \cong \mathbb{R}^n - \{0\}$. 考虑映射

$$f: S^{n-1} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad g: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1} \times (0, +\infty)$$

分别为

$$f(x, t) = tx; \quad g(y) = \left(\frac{y}{|y|}, |y| \right).$$

它们均是连续映射, 且互为逆映射。

解答. “1) $\cong$ 2)”：令 $f: S^{n-1} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$, $f(x, t) = tx$, $g: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1} \times (0, \infty)$, $g(y) = \left(\frac{y}{|y|}, |y| \right)$, 其中 $x^2 + t^2 = 1$, 且 $|x| = 1$ 连续映射和前面那个题差不多。所以只验证互逆。

$$f(g(y)) = \frac{y}{|y|} \cdot |y| = y, \quad g(f(x, t)) = \left(\frac{tx}{|tx|}, |tx| \right) = (t, x)$$

所以 $S^{n-1} \times (0, +\infty) \cong \mathbb{R}^n - \{0\}$, 又因为 $(0, +\infty) \cong \mathbb{R}$, 所以 $S^{n-1} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n - \{0\}$.

“2) $\cong$ 3)”：令 $f: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - D^n$, $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$; $g: \mathbb{R}^n - D^n \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$,

$g(y) = y - \frac{y}{|y|}$. f, g 连续是显然的, 因为每一部分都连续。

$$f(g(y)) = y - \frac{y}{|y|} + \frac{y|y| - y}{|y|y| - y|} = y - \frac{y}{|y|} + \frac{y(|y| - 1)}{|y||y - 1|}$$

由于 $|y| - 1 = |y - 1|$, 所以 $f(g(y)) = y$.

$$g(f(x)) = x + \frac{x}{|x|} - \frac{x|x| + x}{|x|x| + x|} = x + \frac{x}{|x|} - \frac{x(|x| + 1)}{|x||x + 1|}$$

由于 $|x| + 1 = |x + 1|$, 所以 $g(f(x)) = x$. 所以 f, g 连续互逆, 也就是 $\mathbb{R}^n - \{0\} \cong \mathbb{R}^n - D^n$.
所以这三个两两同胚。

题目 5.3. 证明单位圆周的一个自同胚可以扩张为单位圆盘的自同胚。

解答. 设单位圆周 $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi)\}$, 单位圆盘 $D^1 = \{re^{i\theta} : r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi)\}$, 设 f 是 S^1 上的自同胚, 连续, 存在逆 g . 那么定义 $F: D^1 \rightarrow D^1$ 为 $F(re^{i\theta}) = rf(e^{i\theta})$, 因为 r, f 连续, 所以 F 连续, 逆为 $G(se^{i\varphi}) = sg(e^{i\varphi})$.

$$F(G(se^{i\varphi})) = sf(g(e^{i\varphi})) = se^{i\varphi}, G(F(re^{i\theta})) = G(rf(e^{i\theta})) = re^{i\theta}$$

所以这是单位圆盘的一个自同胚, 于是单位圆周的一个自同胚可以扩张为单位圆盘的自同胚。

题目 5.4. 叙述群的定义。

证明在矩阵的乘法和求逆运算下, 全体实正交矩阵的集合 $O(n)$ 是一个以 n 阶单位矩阵 I_n 为乘法单位的群, 它称为 n 阶正交群。

解答. 群的定义: 一个集合 G 上定义一个二元运算 $\cdot$, 满足以下四条公理:

1. 运算封闭: $\forall a, b \in G, a \cdot b \in G$.
2. 结合律: $\forall a, b, c \in G, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
3. 有单位元: $\forall a, \exists e \in G, a \cdot e = e \cdot a = a$.
4. 有逆元: $\forall a, \exists b \in G, a \cdot b = b \cdot a = e$.

验证正交矩阵的集合 $O(n)$ 在乘法运算下构成一个群。

1. $A, B \in O(n)$, $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$, 所以 $AB \in O(n)$, 也是一个 n 阶正交矩阵。
2. 结合律由矩阵运算的结合律保证。
3. 单位元是 I_n .
4. A 是正交矩阵, A^{-1} 自然也是正交矩阵。

题目 5.5. 令 $I(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ 的全体等距变换所构成的集合, $\sigma, \tau \in I(\mathbb{R}^n)$ 。证明:

1. $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个连续双射, 且 $\sigma^{-1} \in I(\mathbb{R}^n)$;
2. $\sigma \circ \tau \in I(\mathbb{R}^n)$ 。

解答. 1. 因为是等距变换, 所以 $|\sigma(x) - \sigma(y)| = |x - y|$ 。

连续性: $\forall y \in B(x, r)$, $|\sigma(x) - \sigma(y)| = |x - y| < r$, 所以 $\sigma(y) \in B(\sigma(x), r)$, 所以连续。

单射: 若 $\sigma(x) = \sigma(y)$, $|\sigma(y) - \sigma(x)| = |y - x| = 0$, 所以可以得到 $x = y$, 所以是单射。

满射: 先说明 σ 保持中点。 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, 记 $m = \frac{x+y}{2}$, 则 $|x - m| = |y - m| = \frac{|x-y|}{2} = \frac{|\sigma(x) - \sigma(y)|}{2}$, 由等距性,

$$|\sigma(x) - \sigma(m)| = |x - m| = \frac{|x - y|}{2}, \quad |\sigma(y) - \sigma(m)| = |y - m| = \frac{|x - y|}{2}$$

因此 $\sigma(m)$ 到 $\sigma(x)$ 和 $\sigma(y)$ 的距离均为 $\frac{|\sigma(x) - \sigma(y)|}{2}$, 故 σ 保持中点。

令 $\tau(x) = \sigma(x) - \sigma(0)$, τ 仍为等距, 由中点保持性质, 可知对任意有理数 q , $\tau(qx) = q\tau(x)$, 再由连续性得 $\tau(\lambda x) = \lambda\tau(x)$, 对任意实数 λ 都成立, 进而

$$\tau(x + y) = 2\tau\left(\frac{x + y}{2}\right) = \tau(x) + \tau(y)$$

所以 τ 是线性映射。又因 $|\tau(x)| = |x|$, τ 保持范数, 从而可逆。所以存在唯一的 $x = \tau^{-1}(y)$ 使得 $\tau(x) = y$, 即 $\sigma(x) = \sigma(0) + y$, 故 σ 是满射。

逆映射: 任意的 $\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y) \in \mathbb{R}$,

$$|\sigma^{-1}(x) - \sigma^{-1}(y)| = |\sigma(\sigma^{-1}(x)) - \sigma(\sigma^{-1}(y))| = |x - y|$$

所以 $\sigma^{-1} \in I(\mathbb{R}^n)$ 。

题目 5.6. 设 $e \in I(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的恒同映射。证明 $I(\mathbb{R}^n)$ 是以 e 为乘法单位的群，其中 $I(\mathbb{R}^n)$ 中的乘法和求逆运算分别是：

$$I(\mathbb{R}^n) \times I(\mathbb{R}^n) \rightarrow I(\mathbb{R}^n), \quad \sigma \times \tau = \sigma \circ \tau$$

$$I(\mathbb{R}^n) \rightarrow I(\mathbb{R}^n), \quad (\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}$$

$I(\mathbb{R}^n)$ 称为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的刚体运动群，或等距变换群。

解答. 由上一个题可知运算封闭，且逆仍然属于 $I(\mathbb{R}^n)$ 。结合律由映射的结合律保证，单位元是 e ，所以构成一个群。

题目 5.7. 设 $I_0(\mathbb{R}^n) = \{\sigma \in I(\mathbb{R}^n) \mid \sigma(O) = O\}$ ，其中 $O \in \mathbb{R}^n$ 是原点。证明：

1. $I_0(\mathbb{R}^n) \subset I(\mathbb{R}^n)$ 是一个子群；

2. 映射 $h : O(n) \rightarrow I_0(\mathbb{R}^n)$, $h(A) = A$ ，是一个群同构。

提示：设 $e_i = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的标准单位正交基底。则映射 h 的逆是

$$h^{-1}(\sigma) = (\sigma(e_1), \dots, \sigma(e_n)).$$

解答. 1. 只需验证 $\forall \sigma, \tau \in I_0(\mathbb{R}^n)$, $\sigma\tau^{-1} \in I_0(\mathbb{R}^n)$ 。

$$\sigma(\tau^{-1}(O)) = \sigma(O) = O$$

所以是子群。

2. 首先先验证 h 是一个同态。 $\forall A, B \in O(n)$, $h(AB) = AB = A \cdot B = h(A)h(B)$ ，所以是同态。

再验证双射。

$$h \circ h^{-1}(\sigma) = h(\sigma(e_1), \dots, \sigma(e_n)) = (\sigma(e_1), \dots, \sigma(e_n)) = \sigma$$

$$h^{-1} \circ h(A) = h^{-1}(A) = (A(e_1), \dots, A(e_n)) = A$$

所以是双射。进而 h 是群同构。

题目 5.8. 表示定理证明映射

$$f : I_0(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow I(\mathbb{R}^n), \quad f(\sigma, a) = \sigma \circ P_a,$$

是一个群同构，它的逆映射是

$$h^{-1}(\sigma) = (P_{-\sigma(0)} \circ \sigma, \sigma(0)).$$

解答. 群同态:

$$f(\sigma \circ \tau, a + b) = \sigma \circ \tau \circ P_{a+b} = \sigma P_a \circ \tau P_b = f(\sigma, a) f(\tau, b)$$

所以 f 是群同态。

$$f(f^{-1}(\sigma)) = f(P_{-\sigma(0)} \circ \sigma, \sigma(0)) = P_{-\sigma(0)} \circ \sigma \circ \sigma(0) = \sigma$$

$$f^{-1}(f(\sigma, a)) = f^{-1}(\sigma \circ P_a) = (P_{-\sigma(0) \circ P_a} \circ \sigma, \sigma \circ P_a(0)) = (\sigma, a)$$

所以 f 是双射，所以群同构成立。

题目 5.9. 乘积空间 $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ 称为 n 维环面。在 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中规定关系 $(x_1, \cdots, x_n) \sim (y_1, \cdots, y_n) \Leftrightarrow x_i - y_i \in \mathbb{Z}$ 。证明

1) $\sim$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个等价关系;

2) T^n 同胚于商空间 $\mathbb{R}^n / \sim$ 。

解答. 1) 自反性: $(x_1, \cdots, x_n) \sim (x_1, \cdots, x_n)$, 因为 $x_i - x_i = 0$.

对称性: 假如 $x_i - y_i \in \mathbb{Z}$, 那么 $y_i - x_i \in \mathbb{Z}$ 。

传递性: 假如 $x \sim y, y \sim z, x_i - y_i \in \mathbb{Z}, y_i - z_i \in \mathbb{Z}$, 所以 $x_i - z_i \in \mathbb{Z}$, 所以 $x \sim z$ 。

2) 定义映射 $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ 为 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = (e^{2\pi i x_1}, \cdots, e^{2\pi i x_n})$ 。定义 $\psi : \mathbb{R}^n / \sim \rightarrow T^n$ 为 $\psi([x]) = \varphi(x)$ 。 φ, ψ 连续都是显然的，只需要证明 ψ 是双射。

若 $\psi(x) = \psi(y)$, 那么 $\varphi(x) = \varphi(y)$, 于是 $x_i = y_i$ 于是 $x = y$, 所以 ψ 是单射。满射是因为任意的 $(e^{2\pi i x_1}, \cdots, e^{2\pi i x_n})$, 都会对应一个 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, 那么 $\psi([x]) = \varphi(x) = (e^{2\pi i x_1}, \cdots, e^{2\pi i x_n})$ 。

考虑商映射 $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \sim$, 限制在紧集 $I = [0, 1]^n$ 上。由于每个等价类与 K 至少交于一点, 故 $\pi(I) = \mathbb{R}^n / \sim$, 由于 $I, \pi(I)$ 都是紧的, 所以 $\mathbb{R}^n / \sim$ 是紧的。又因为 T^n 是 T_2 的, 所以 ψ 是连续双射也是同胚。

题目 5.10. 在商空间 X/A 的定义中, 为何要求 $A \subset X$ 是一个闭子空间?

解答. 若 A 不是闭集, 由于 π 是将 A 映成一个点, 通常拓扑空间满足 T_1 性质, 单点集是闭集, 这样 π 就是把闭集映成闭集, 性质会变得好。

题目 5.11. 设 S^{n-1} 是 $n-1$ 维球面。证明 $CS^{n-1} \cong D^n$ 。

提示: 考虑映射的分解问题

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} \times I & & \\ \downarrow & \searrow F & \\ CS^{n-1} & \dashrightarrow & D^n \end{array}$$

其中 $F(x, t) = (1-t)x$ 。它的解即所求同胚。

解答. 定义 $F: S^{n-1} \times I \rightarrow D^n$, $F(x, t) = (1-t)x$, 定义 $S^{n-1} \times I$ 上的等价关系 $(x, 1) \sim (x', 1)$ 对所有 x, x' 等同, $\pi: S^{n-1} \times I \rightarrow CS^{n-1}$ 是商映射。任意的 $(a, 1) \in S^{n-1} \times I$, $F((a, 1)) = 0$, 故可以诱导出映射 $f: CS^{n-1} \rightarrow D^n$, $f([x, t]) = (1-t)s$, 且满足 $t=1$ 时 $f([x, 1]) = 0 = F(a, 1)$. 且 f 是连续的。

满射: 任取 $y \in D^n$ 。若 $y = 0$, 则 $f([x, 1]) = 0$; 若 $y \neq 0$, 令 $t = 1 - \|y\|$, $x = y/\|y\| \in S^{n-1}$, 则 $f([x, t]) = (1-t)x = \|y\| \cdot (y/\|y\|) = y$ 。

单射: 设 $f([x, t]) = f([x', t'])$, 即 $(1-t)x = (1-t')x'$ 。两边取范数得 $1-t = 1-t'$, 故 $t = t'$, 进而 $x = x'$, 所以 $[x, t] = [x', t']$ 。

因此 f 是连续双射。

又由于 S^{n-1} 和 $[0, 1]$ 都是紧空间, 所以 $S^{n-1} \times [0, 1]$ 紧, 由于商映射连续, 所以 CS^{n-1} 也是紧空间, D^n 是 Hausdorff 空间, 连续双射从紧空间到 Hausdorff 空间必为同胚。

故 $CS^{n-1} \cong D^n$ 。

题目 5.12. 设 $A \subset X$ 是闭子空间。证明

- 1) 如果 X 连通, 则商空间 X/A 连通;
- 2) 如果 X 紧致, 则商空间 X/A 紧致;
- 3) X 是 $T_1 + T_3$ 空间, 则商空间 X/A 是 T_2 空间。

解答. 1)2) 定义商映射 $X \rightarrow X/A$, 由于商映射是连续的, 所以 12 自然成立。

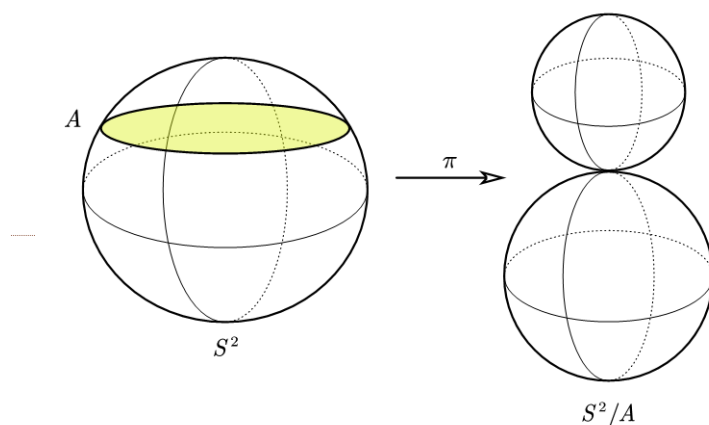
3) 在 X/A 中, A 是一个点 a , 任意的 $x \in X/A$, 由于 X 是 T_3 空间, 存在 U, V 是开集, 使得 $\pi^{-1}(x) \in U, A \subset V, U \cap V = \emptyset$ 。由于 π 是连续的, 两边同时作用 π , 就会存在 $\pi(U), \pi(V)$ 作为 X/A 中的开集, $x \in \pi(U), a \in \pi(V), \pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$ 。

当任意两个点 x, y 都不为 a 时, 由 T_1 和 T_3 可以推出 T_2 , 在 X 中存在 U, V 是开集, 使得 $\pi^{-1}(x) \in U, \pi^{-1}(y) \in V, U \cap V = \emptyset$ 。由于 π 是连续的, 两边同时作用 π , 就会存在 $\pi(U), \pi(V)$ 作为 X/A 中的开集, $x \in \pi(U), y \in \pi(V), \pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$ 。

综上, X/A 是 T_2 空间。

题目 5.13. 设 $A \subset S^2$ 是一个纬圆, 画出商空间 S^2/A 以商映射 $\pi: S^2 \rightarrow S^2/A$ 。

解答.



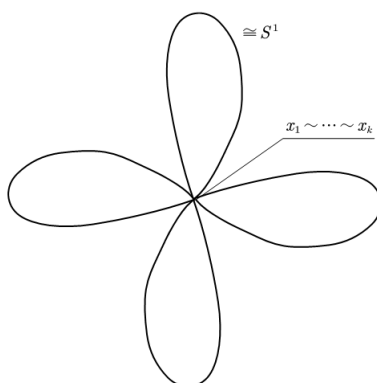
题目 5.14. 设 $\{x_1, \dots, x_k\} \subset S^1$ 是一个有限点集。

1) $S^1/\{x_1, \dots, x_k\} = ?$

2) 画出商空间及商映射 $\pi: S^1 \rightarrow S^1/\{x_1, \dots, x_k\}$ 。

解答. 1) $S^1/\{x_1, \dots, x_k\} = \bigvee_{i=1}^k S^1$.

2)



题目 5.15. 设 $\{x_1, \dots, x_n\} \subset S^2$ 是一个有限点集。令

$$a = \min\{d(x_i, x_j), 1 \leq i \neq j, x_i \leq n\};$$

$$B\left(x_i, \frac{a}{3}\right) = \left\{x \in S^2, d(x_i, x) < \frac{a}{3}\right\}$$

$$A = S^2 - \bigcup B\left(x_i, \frac{a}{3}\right)$$

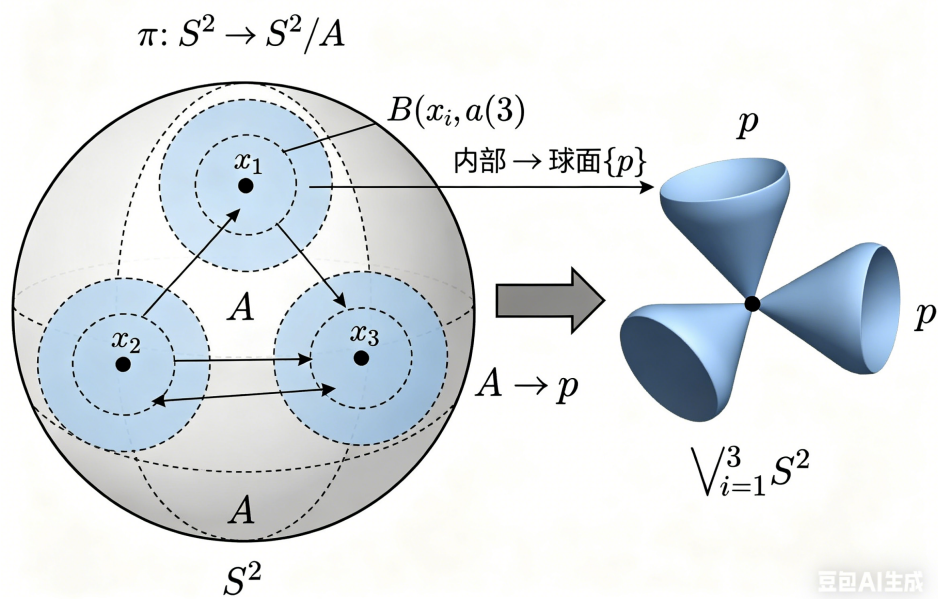
1) $S^2/A = ?$

2) 画出商空间与商映射 $\pi : S^2 \rightarrow S^2/A$ 。

解答. 1) $S^2/A \sim \bigvee_{i=1}^n S^2$.

2) 虽然我知道他是 n 个球交于一点, 但由于我确实画不出来 n 个球交于一点, 所以就用了豆包, 下面这张图来自豆包, 但我看画的也挺一般。

商映射 $\pi: S^2 \rightarrow S^2/A$, 其中 A 为球面去掉三个开圆盘



第六章 第 6 周拓扑作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

备注 6.1.

题目 6.1 的 3) 不会，问了 AI 也没太搞懂。题 6.3,6.4,6.5 都是用的裁剪粘贴，不知道合不合适。

题目 6.1. 利用定理 4.7 证明

- 1) 若 A 紧致, 则 $A \cup_f D^n$ 紧致;
- 2) 若 A 道路连通, 则 $A \cup_f D^n$ 道路连通;
- 3) 若 A 是 T_2 空间, 则 $A \cup_f D^n$ 是 T_2 空间.

解答. 1) 由于 A 紧致, D^n 紧致, 所以无交并 $A \sqcup D^n$ 是紧的. 商映射 $\pi: A \sqcup D^n \rightarrow A \cup_f D^n$ 连续, 由于连续像保持紧致性, 所以 $A \cup_f D^n$ 也是紧致的.

2) 因为 A 道路连通, 所以 $\pi(A)$ 道路连通. 因为 D^n 道路连通, 所以 $\pi(D^n)$ 道路连通. 因为 $\pi(S^{n-1}) = f(S^{n-1}) \subset \pi(A) \cap \pi(D^n)$, 所以交集非空. 于是 $A \cup_f D^n = \pi(A) \cup \pi(D^n)$ 是两个道路连通且交非空的子空间之并, 因此道路连通.

3) 分两种情况进行讨论. $\forall x, y \in A \cup_f D^n$,

若 $x, y \in \pi(A)$ 或 $x, y \in \pi(D^n)$, 这两种情况是几乎相同的, 所以只看 $x, y \in \pi(A)$ 的情况. 由于 A 是 T_2 的, 所以存在 $U, V \subset A$, 使得 $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$. 因为 f 连续, 所以 $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ 是 S^{n-1} 中不相交的开集, 在 D^n 中取开集 U', V' , 使得

$$U' \cap S^{n-1} = f^{-1}(U), V' \cap S^{n-1} = f^{-1}(V)$$

则 $U \cup U', V \cup V'$ 是 $A \sqcup D^n$ 中不相交的开集, 故 $\pi(U_1 \cup U_2), \pi(V_1 \cup V_2)$ 是 $A \cup_f D^n$ 中分别包含 x, y 的不相交开集。

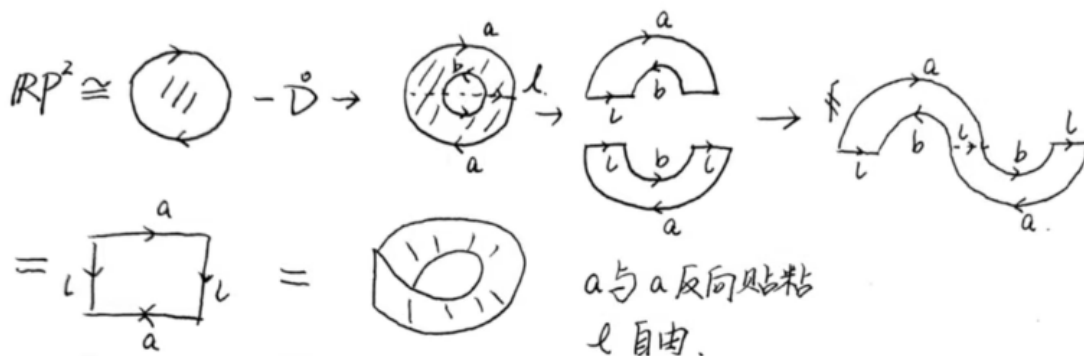
若 $x \in \pi(A) \setminus \pi(S^{n-1}), y \in \pi(D^n) \setminus \pi(S^{n-1})$, 则存在 $a \in A \setminus f(S^{n-1}), b \in \mathring{D}^n$, 使得 $\pi(a) = x, \pi(b) = y$ 。取 A 中开集 U 使得 $a \in U$ 且 $U \cap f(S^{n-1}) = \emptyset$, 则 $\pi(U)$ 就是 x 的一个开邻域。同理可以找到 D^n 中的一个开集 V , $\pi(V)$ 是 y 的一个开邻域。并且 $\pi(U), \pi(V)$ 不相交。

所以 $A \cup_f D^n$ 是 T_2 空间。

题目 6.2. 证明连通曲面道路连通。

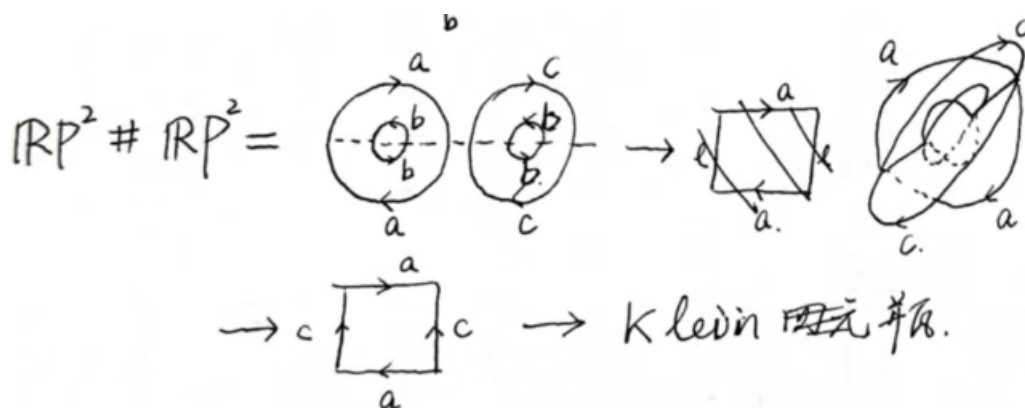
解答. 设拓扑空间 (M, τ) 是一张曲面, 由于每一点 $x \in M$, 存在开邻域 $x \in U$, 满足 $(U, x) \cong (\mathbb{R}^2, 0)$ 或 $(\mathbb{R}_+^2, 0)$, 而后面这两个是道路连通的, 所以曲面是局部道路连通的。所以 X 的道路连通分支都是既开且闭的。因为 M 是连通曲面, 所以既开又闭的子集只有 M 和 $\emptyset$ 。所以 M 仅含有一个道路连通分支, 也就是 M 是道路连通的。

题目 6.3. 设 $D \subset \mathbb{R}P^2$ 是以点 $x \in \mathbb{R}P^2$ 为中心的开圆盘。证明补空间 $\mathbb{R}P^2 - \mathring{D} \cong$ Mobius 带。



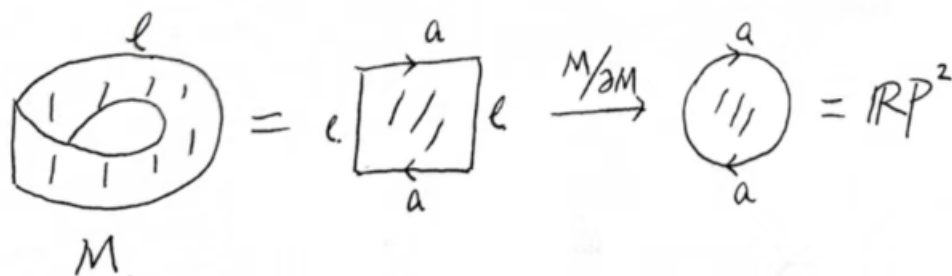
解答.

题目 6.4. 证明 $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong S^1 \times I / (e^{2\pi \cdot it}, 0) \sim (e^{-2\pi \cdot it}, 1)$, 后者是克莱因瓶。



解答.

题目 6.5. 设 M 是闭莫比乌斯带. 证明商空间 $M/\partial M$ 同胚于射影平面 $\mathbb{RP}^2$.



解答.

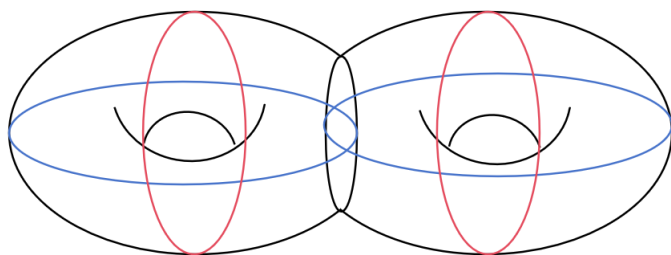
题目 6.6. 在射影平面中分别找出两个嵌入圆周 $C_1, C_2 \subset \mathbb{RP}^2$, 使得

- 补空间 $\mathbb{RP}^2 - C_1$ 是莫比乌斯带和一个圆盘的无交并;
- 补空间 $\mathbb{RP}^2 - C_2$ 是一个圆盘.

解答. a) 和问题 6.3 一样, 选取一个同心小圆, 小圆内部是一个圆盘, 外部经过裁剪粘贴以后是莫比乌斯带。

b) C_2 选取莫比乌斯带的中轴线, 剪开以后就是一个圆柱面, 同胚于圆盘。

题目 6.7. 画出双环面 $2 \cdot T^2$, 并在其中画出四条简单闭曲线 $C_1, C_2, C_3, C_4 \subset 2 \cdot T^2$, 使得补空间 $T^2 - \cup C_i$ 同胚于开圆盘. 此处简单闭曲线是指同胚于单位圆周的曲线.



$$2T^2$$

解答.

题目 6.8. 对于一个有限维胞腔复形 X , 令 $\beta_k(X)$ = X 中 k 维胞腔的个数. 则 X 的欧拉示性数是:

$$\chi(X) = \beta_0 - \beta_1 + \cdots + (-1)^k \beta_k + \cdots .$$

计算下列空间的欧拉示性数:

- 1) 若干球面的一点并空间 $S^{n_1} \vee \cdots \vee S^{n_k}$;
- 2) 所有闭曲面;
- 3) n 维实射影空间 $\mathbb{R}P^n$.

解答. 1) 把不同球面粘贴在一个一个共同的点, 这个点是 0 胞腔, 每个球面贡献自己维数的一个胞腔, 所以

$$\chi(S^{n_1} \vee \cdots \vee S^{n_k}) = 1 + \sum_{i=1}^k (-1)^{n_i}$$

2) 由闭曲面分类定理, 设闭曲面为 $\mathcal{S}$, 于是

$$\mathcal{S} = S^2 \# nT^2 \# m\mathbb{R}P^2$$

S^2 欧拉数是 2, nT^2 欧拉数是 0, $\mathbb{R}P^2$ 欧拉数是 1, 所以 $\chi(\mathcal{S}) = 2 - 2n - m$.

3) $\mathbb{R}P^2$ 是将 n 维球面的对径点粘贴得到, 每维一个胞腔

$$\chi(\mathbb{R}P^n) = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots (\text{共 } n+1 \text{ 项})$$

第七章 第 7 周拓扑作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 7.1. 证明 n 阶酉群 $U(n)$ 是一个紧致、道路连通的 T_2 空间.

提示: $U(n)$ 是欧氏空间 $M_n(\mathbb{C})$ 中的有界闭集. 道路连通性的证明可利用 Jordan 标准型定理: 对于每个 $A \in U(n)$, 存在 $P \in U(n)$, 使得

$$A = P \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \overline{P}^T$$

解答. (1) 证明 $U(n)$ 有界. 设 $A \in U(n)$, 则 $A\overline{A}^T = I_n$, 定义内积

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : U(n) \times U(n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \operatorname{Re} \left(\operatorname{Tr} \left(\overline{B}^T A \right) \right) \end{aligned}$$

于是自然可以有范数

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\operatorname{Re} \left(\operatorname{Tr} \left(\overline{A}^T A \right) \right)} = \sqrt{n}$$

所以 $U(n) \subset B(0, \sqrt{n})$, 所以 $U(n)$ 有界.

(2) 证明 $U(n)$ 是闭集. 定义映射

$$\begin{aligned} \varphi : U(n) &\rightarrow U(n) \\ A &\mapsto A\overline{A}^T \end{aligned}$$

由于 φ 是连续的, $\{I_n\}$ 是闭集, 所以 $U(n) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$ 也是闭的.

由于 $U(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$, 有界且闭, 所以 $U(n)$ 是紧集。

(3) 证明道路连通。我们构造从 A 到 I_n 的道路, 然后就自然可以构造出任意两个矩阵之间的道路。令 $D(t) = \text{diag}(e^{it\theta_1}, \dots, e^{it\theta_n})$ 设 $A = PD(1)\overline{P}^T$, 易知 $I_n = PD(0)\overline{P}^T$

$$\begin{aligned}\gamma: [0, 1] &\rightarrow U(n) \\ t &\mapsto PD(t)\overline{P}^T\end{aligned}$$

只需验证 γ 连续即可。

设 $t_0 \in [0, 1], |t - t_0| < \delta$, 于是

$$\begin{aligned}\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| &= \sqrt{\text{Re}\left(\text{Tr}\left[\left(\overline{\gamma(t)}^T - \overline{\gamma(t_0)}^T\right)(\gamma(t) - \gamma(t_0))\right]\right)} \\ &= \sqrt{\text{Re}\left(\text{Tr}\left(I_n + I_n - P\overline{D(t)}^T D(t_0)\overline{P}^T - P\overline{D(t_0)}^T D(t)\overline{P}^T\right)\right)} \\ &= \sqrt{\text{Re}\left(\text{Tr}(I_n + I_n - D(t_0 - t) - D(t - t_0))\right)} \\ &= \sqrt{\text{Re}\left(\sum_{i=1}^n [2 - e^{i(t_0-t)\theta_i} - e^{i(t-t_0)\theta_i}]\right)} \\ &= \sqrt{\text{Re}\left(\sum_{i=1}^n [2 - 2\cos(t_0 - t)\theta_i]\right)} \\ &= \sqrt{2n - 2\sum_{i=1}^n \cos(t_0 - t)\theta_i} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (t_0 - t)^2 \theta_i^2} = \delta \sqrt{\sum_{i=1}^n \theta_i^2}.\end{aligned}$$

所以 γ 是连续的, 从而就得到了道路连通。

(4) 证明 T_2 . 由于 $U(n)$ 是度量空间的子空间, 所以可以继承度量, 所以就是 T_2 的。

题目 7.2. 证明拓扑空间之间的连续映射 $f: O(n) \times T(n) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}), f(A, C) = A \cdot C$ 是一个同胚。

提示: 证明 f 是一个连续单射, 它的逆映射由 Gram-Schmidt 正交化给出。

解答. (1) 先证明 f 是单射。设 $A_1 \cdot C_1 = A_2 \cdot C_2$, 两边同时左乘上 A_2^{-1} , 右乘 C_1^{-1} , 于是

$$A_2^{-1}A_1 = C_2C_1^{-1} = M$$

此时可以发现 M 既是上三角矩阵, 又是正交矩阵, 所以只能是对角矩阵. 又因为

$$\det M = \frac{\det C_2}{\det C_1} > 0$$

所以 $M = I_n$. 所以 $A_1 = A_2, C_1 = C_2$. 所以 f 是单射.

(2) 再证明 f 是连续的. 由于 $O(n) \times T(n)$ 是 $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ 的子空间, 矩阵乘法是每个分量均为多项式函数的映射, 因此是连续的, 从而 f 连续.

(3) 再给出 f 的逆映射 g . 设 $g: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow O(n) \times T(n)$. 设 $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $M = (m_1, \dots, m_n)$. 定义

$$v_1 = m_1, v_2 = m_2 - \frac{m_2 \cdot v_1}{|v_1|} \frac{v_1}{|v_1|}, \dots, v_n = m_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m_n \cdot v_i}{|v_i|^2} v_i$$

$$e_1 = \frac{v_1}{|v_1|}, e_2 = \frac{v_2}{|v_2|}, \dots, e_m = \frac{v_m}{|v_m|}$$

令 $Q = (e_1, \dots, e_n) \in O(n)$, R 是由这些系数给出, 因此 $M = QR$, 定义 $g(M) = (Q, R)$, 由矩阵中 QR 分解的唯一性, 就可以知道 g 是 f 的逆映射.

(4) 然后证明 g 是连续的. 在 g 的每一步构造过程中, 所用的函数都是连续的, 且不存在除以 0 的情况, 因此 g 也是连续的.

因此, f 是同胚.

题目 7.3. 证明连通分支 $O^+(n) \subset O(n)$ 是一个正规子群 (称为 n 阶特殊正交群).

连通分支 $GL^+(n; \mathbb{R}) \subset GL(n; \mathbb{R})$ 是一个正规子群 (称为 n 阶一般特殊线性群).

解答. (1) 对任意 $A \in O^+(n), P \in O(n)$, 只要证明 $PAP^{-1} \in O^+(n)$ 就可以说明正规.

$$\det(PAP^{-1}) = \det P \det A \det P^{-1} = \det A = 1$$

所以 $PAP^{-1} \in O^+(n)$, 所以 $O^+(n) \triangleleft O(n)$.

(2) 也是一样的.

题目 7.4. 证明两个拓扑群的乘积空间是一个拓扑群.

尤其是, 单位圆周群 S^1 的 n 重乘积 $T^n := S^1 \times \dots \times S^1$ 是一个拓扑群, 称作 n 维环面群.

解答. 证明两个的即可, n 个的可由归纳法证得.

设 $(G_1, \mu_1, v_1, e_1), (G_2, \mu_2, v_2, e_2)$ 是两个拓扑群, G_1, G_2 都是 T_2 的, 且 $\mu_i : G_i \times G_i \rightarrow G_i, v : G_i \rightarrow G_i$. 所以 $G_1 \times G_2$ 是 T_2 的。然后定义

$$\begin{aligned}\mu : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) &\rightarrow G_1 \times G_2 \\ ((A, B), (C, D)) &\mapsto (\mu_1(A, C), \mu_2(B, D))\end{aligned}$$

μ 是连续的, 因为 μ 的每个分量 μ_1, μ_2 都是连续的。

$$\begin{aligned}v : G_1 \times G_2 &\rightarrow G_1 \times G_2 \\ (A, B) &\mapsto (v_1(A), v_2(B))\end{aligned}$$

v 是连续的, 因为 v 的每个分量 v_1, v_2 都是连续的。单位元 $e = (e_1, e_2) \in G_1 \times G_2$. μ, v 的定义使得 $G_1 \times G_2$ 是一个群, 且是连续的, 加上 T_2 , 所以两个拓扑群的乘积空间是一个拓扑群。

题目 7.5. 证明 Abel 群 $\mathbb{R}$ 的任何一个离散子群是无限循环群 $\mathbb{Z}$.

解答. 设 $G \subset \mathbb{R}$, 若 $G = \{0\}$, 则结论显然。

若 $G \neq \{0\}$. 则 $0 \in G$, 且假如 $x \in G$, 则 $-x \in G$. 定义 $a = \inf\{x \in G : x > 0\}$. 由于 G 是离散的, 所以 $a > \varepsilon > 0$, 且 $a \in G$. 因为假如 a 不属于 G , 则 a 是一个聚点, 就不离散了。然后, 断言 $G \cong a\mathbb{Z}$ 的, G 中的元素都是形如 $0, a, 2a, \dots, -a, -2a, \dots$ 这种形式。假如 $x \in G$, $ka < x < (k+1)a$, 那么 $0 < x - ka < a$, 与之前 a 是下确界矛盾。所以断言正确, $G \cong \mathbb{Z}$.

题目 7.6. 证明圆周群 S^1 是一个 Abel 群。它的任何一个离散子群是一个有限循环群 $\mathbb{Z}_n$.

解答. 圆周群 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, 设 H 是 S^1 的离散子群, 设 $G = H + \mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{R}$ 的离散子群, 且 $\mathbb{Z} \subset G$. 又因为 $G = a\mathbb{Z}$, 所以这个 a 只能是 $\frac{1}{b}$, $b \in \mathbb{N}$, 所以 $H = G/\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ 是 S^1 的离散子群, 是有限循环群。

第八章 第 8 周拓扑作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 8.1. 如果 $f : X \rightarrow S^n$ 不是满射, 则 f 同伦于某个常值映射.

解答. 因为 $f : X \rightarrow S^n$ 不是满射, 所以存在一点 $p \in S^n$, 使得 $p \notin f(X)$. 取球面上与 p 对径的点 $-p$, 然后定义一个同伦

$$H : (S^n - \{p\}) \times I \rightarrow S^n - \{p\}$$
$$(y, t) \mapsto \frac{(1-t)y - tp}{\|(1-t)y - tp\|}.$$

这里 $y \in S^n - \{p\}, t \in [0, 1]$. 且满足

$$H(y, 0) = \frac{(1-t)y}{\|(1-t)y\|} = y, \quad H(y, 1) = \frac{-tp}{\|-tp\|} = -p.$$

因为 $y = f(x)$, 所以定义同伦 $K : X \times I \rightarrow S^n - \{p\}$ 为 $K(x, t) = H(f(x), t)$. 满足

$$K(x, 0) = f(x), \quad K(x, 1) = -p =: c_{-p}(x)$$

因此 $f \simeq c_{-p}$ 为常值映射。

题目 8.2. 如果 $f : S^n \rightarrow S^n$ 不同伦于恒同映射, 则方程 $f(x) = -x$ 存在一个解.

解答. 使用反证法, 假设 $f(x) = -x$ 不存在解. 我们构造一个同伦, 将 id_{S^n} 和 f 连接起来:

$$H : S^n \times I \rightarrow S^n$$
$$(x, t) \mapsto \frac{(1-t)f(x) + tx}{\|(1-t)f(x) + tx\|}$$

满足

$$H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = x$$

由于 $f(x) \neq -x$, 所以分母不会为 0, 因为两个向量的线性组合想为 0, 必须是等大反向。从而 H 是连续的。这就说明 $f \simeq \text{id}_{S^n}$, 矛盾! 所以 $f(x) = -x$ 存在一个解。

题目 8.3. 设 M_f 是连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 的映射柱, $i: Y \rightarrow M_f$ 是含入映射。证明对于任一连续映射 $g: W \rightarrow M_f$, 存在一个连续映射 $g': W \rightarrow Y$, 满足 $g \simeq i \circ g'$ 。

解答. (这个不会, 问的 AI)

设 $\pi: X \times I \sqcup Y \rightarrow M_f$ 是商映射。 $M_f = (X \times I \sqcup Y) / (x, 0) \sim f(x)$, 并且 $i: Y \rightarrow M_f$ 为 $i(y) = \pi(y)$ 。

定义 $r: M_f \rightarrow Y$ 如下:

$$r(\pi(x, s)) = f(x), r(\pi(y)) = y$$

这个定义是良好定义的。因为在 M_f 中有 $\pi(x, 0) = \pi(f(x))$, 而上面两个代表元都被 r 送到 $f(x)$ 。由商空间的泛性质可知 r 连续, 并且 $r \circ i = \text{id}_Y$ 。

定义同伦 $H: M_f \times I \rightarrow M_f$ 为

$$H(\pi(x, s), t) = \pi(x, ts), H(\pi(y), t) = \pi(y)$$

则 $H(-, 1) = \text{id}_{M_f}$, 而 $H(-, 0) = i \circ r$ 。因此 $\text{id}_{M_f} \simeq i \circ r$ 。

现在给定任意连续映射 $g: W \rightarrow M_f$, 取 $g' = r \circ g: W \rightarrow Y$ 。于是

$$i \circ g' = i \circ r \circ g.$$

由 $\text{id}_{M_f} \simeq i \circ r$, 复合 g 得到

$$g = \text{id}_{M_f} \circ g \simeq (i \circ r) \circ g = i \circ g'$$

因此存在连续映射 $g': W \rightarrow Y$, 使得 $g \simeq i \circ g'$ 。

提示: 习题 4, 5 的解答需要用到下述胞腔分解, 以及命题 6.

$$nT^2 = \left(\bigvee_{2n} S^1\right) \cup_{f_n} D^2; n\mathbb{R}P^2 = \left(\bigvee_n S^1\right) \cup_{g_n} D^2, \mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{\nu_{n-1}} D^n.$$

其中 $f_n = \prod_{1 \leq i \leq n} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}: S^1 \rightarrow \bigvee_{2n} S^1; g_n = \prod_{1 \leq i \leq n} a_i a_i: S^1 \rightarrow \bigvee_n S^1$, 见第二章第三节。

题目 8.4. 证明下列子空间 $A \subset X$ 均是强形变收缩核:

A. $c_0 \in \Omega$, 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸子集;

提示: 对于 $c_0 \in \Omega$, 常值映射 $r: \Omega \rightarrow A = \{c_0\}$ 是一个收缩映射。令 $H: \Omega \times I \rightarrow \Omega$ 为 $H(x, t) = (1-t)x + tc_0$, $x \in \Omega$. 则有

i) $H|_{t=0} = \text{id}_\Omega: \Omega \rightarrow \Omega$

ii) $H|_{t=1} = \text{id}_{c_0}: c_0 \rightarrow c_0$

iii) 对于 $t \in I$, 有 $H(c_0, t) = c_0$.

它表明 $\text{id}_\Omega \simeq i_{c_0} \circ r \text{ rel } \{c_0\}$.

解答. 提示基本已经做完了。只需要补充:

由于 Ω 是凸集, 故 $H(x, t) \in \Omega$, 所以 H 定义良好且连续。然后这三条成立, 所以 $A = \{c_0\}$ 是 Ω 的强形变收缩核。

题目 8.5. B. $X \times \{0\} \subset X \times I$;

提示: 对于 $X \times \{0\} \subset X \times I$, 收缩映射 $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\}$ 是 $r(x, t) = (x, 0)$. 令 $H: (X \times I) \times I \rightarrow X \times I$ 为 $H(x, t; s) = (x, ts)$. 则有

i) $H|_{s=1} = \text{id}_{X \times I}$; $H|_{s=0} = i_{X \times 0} \circ r$;

ii) 对于所有 $x \in X$, 有 $H(x, 0, s) = (x, 0)$. 从而

$$\text{id}_{X \times I} \simeq i_X \circ r \text{ rel } (X \times 0).$$

解答. 提示已经很详细了。

题目 8.6. C. $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$;

提示: 对于子空间 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$, 收缩映射 $r: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ 是 $r(x) = x/\|x\|$. 令

$$H: (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times I \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$$

为 $H(x, t) = (1-t) \cdot x + t \cdot r(x)$, 则有

$$\text{id}_{X \times I} \simeq i_{S^{n-1}} \circ r \text{ rel } (S^{n-1}).$$

解答. 因为 $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$, 所以 r 的确是从 X 到 S^{n-1} 的映射。其次 $r|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$ 。这说明 r 是一个收缩映射。

然后验证 H 定义良好。

$$H(x, t) = (1 - t)x + t \frac{x}{\|x\|} = \left(1 - t + \frac{t}{\|x\|}\right)x \neq 0.$$

所以 H 的确落在 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 中。

验证同伦两端:

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) = r(x)$$

$$H(-, 0) = id_x, \quad H(-, 1) = i \circ r$$

最后, 若 $x \in S^{n-1}$, 则 $r(x) = x$, 于是 $H(x, t) = x$, 这说明同伦过程中 S^{n-1} 上的点保持不动。

因此 $id_X \simeq i \circ r \text{ rel } (S^{n-1})$ 。

题目 8.7. D. $S^{n-1} \subset D^n - \{0\}$ (或 $S^{n-1} \subset D^n - D^n(\frac{1}{2})$.) 其中 $D^n(\frac{1}{2})$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 $\frac{1}{2}$ 的闭球体。

解答. 由 $D^n - \{0\} \cong D^n - D^n(\frac{1}{2}) \cong \mathbb{R}^n - \{0\}$, 所以也是强形变收缩核。

题目 8.8. 在 2 维闭曲面 nT^2 和 $n\mathbb{R}P^2$ 中, 取嵌入的开圆盘 (半径充分小)

$$\mathring{D}^2 \subset nT^2, \quad \mathring{D}^2 \subset n\mathbb{R}P^2.$$

证明

$$nT^2 - \mathring{D}^2 \simeq \bigvee_{2n} S^1, \quad n\mathbb{R}P^2 - \mathring{D}^2 \simeq \bigvee_n S^1.$$

尤其是:

$$[nT^2 - \mathring{D}^2] = \left[\bigvee_{2n} S^1 \right], \quad [n\mathbb{R}P^2 - \mathring{D}^2] = \left[\bigvee_n S^1 \right].$$

解答. 由闭曲面的胞腔分解, 有

$$nT^2 = \left(\bigvee_{2n} S^1 \right) \cup_{f_n} D^2, \quad n\mathbb{R}P^2 = \left(\bigvee_n S^1 \right) \cup_{g_n} D^2$$

其中 $f_n : S^1 \rightarrow \bigvee_{2n} S^1, g_n : S^1 \rightarrow \bigvee_n S^1$ 为相应的粘贴映射。

先考虑一般情形 $A \cup_f D^2$,

$$(A \cup_f D^2) - \mathring{D}_0^2 = A \cup_f (D^2 - \mathring{D}_0^2)$$

而 $D^2 - \mathring{D}_0^2$ 是一个圆环, 外边界 $S^1 \times \{0\}$ 按照 f 粘到 A 上, 故该空间同胚于映射柱 M_f , 而 M_f 强形变收缩到 A , 因此

$$(A \cup_f D^2) - \mathring{D}_0^2 \simeq A$$

分别取 $A = \bigvee_{2n} S^1, A = \bigvee_n S^1$ 。就可以得到答案。

题目 8.9. 在 n 维流形 $\mathbb{R}P^n$ 中, 设 $\mathring{D}^n \subset \mathbb{R}P^n$ 是半径充分小嵌入开圆盘. 证明

$$\mathbb{R}P^n - \mathring{D}^n \simeq \mathbb{R}P^{n-1}.$$

解答. 由于 $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{\nu_{n-1}} D^n$, 所以由一般情形

$$(A \cup_f D^2) - \mathring{D}_0^2 = A \cup_f (D^2 - \mathring{D}_0^2) \simeq A$$

可以得到

$$\mathbb{R}P^n - \mathring{D}^n \simeq \mathbb{R}P^{n-1}.$$

第九章 第 9 周拓扑作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 9.1. 设 $A \subset X$ 是一个收缩核, $a \in A$ 。证明

1) 含入映射 $i_A : A \rightarrow X$ 诱导基本群同态

$$i_{A*} : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a);$$

2) 收缩映射 $r : X \rightarrow A$ 诱导基本群同态

$$r_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(A, a).$$

解答. 1) 含入映射 $i_A : A \rightarrow X$ 满足 $i_A(a) = a$, 所以是一个保持基点的连续映射。对任意 $[\gamma] \in \pi_1(A, a)$, 其中 γ 是以 a 为基点的闭道路, 定义

$$i_{A*}([\gamma]) = [i_A \circ \gamma]$$

先说明他是良定义的。首先因为 $i_A(a) = a$, 所以

$$i_A \circ \gamma(0) = a, i_A \circ \gamma(1) = a$$

因此 $i_A \circ \gamma$ 是在 X 中以 a 为基点的闭道路。并且假如 γ, γ' 在 A 中定端同伦, 也就是存在同伦 H , 那么 $i_A \circ H$ 就是在 X 中, γ 和 γ' 的定端同伦, 因此 $[i_A \circ \gamma] = [i_A \circ \gamma']$, 这说明定义良好。

最后说明他是群同态。对任意 $[\gamma], [\delta] \in \pi_1(A, a)$,

$$i_{A*}([\gamma][\delta]) = [i_A \circ (\gamma \cdot \delta)] = [i_A \circ \gamma \cdot i_A \circ \delta] = [i_A \circ \gamma] \cdot [i_A \circ \delta] = i_{A*}([\gamma]) i_{A*}([\delta])$$

所以 i_{A*} 诱导了基本群同态。

2) 收缩映射 $r: X \rightarrow A$ 连续, 且 $r|_A = \text{id}_A$, 所以 $r(a) = a$, 于是 r 是保持基点的收缩映射, 由连续映射诱导基本群同态的性质, 得到

$$r_*: \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(A, a), \quad r_*([\gamma]) = [r \circ \gamma].$$

(其实 1) 说那一大堆也是多余的)

题目 9.2. 设 $X = \{p\}$ 是单点空间。证明 $\pi_1(X, x_0) = 0$ 是平凡群。

解答. 设 $\gamma: I \rightarrow X$ 是任意一条以 p 为基点的闭道路, 对任意的 $s \in I$, 有 $\gamma(s) = p$, 因此 $\gamma = c_p$ 是一个常值道路。所以 (X, p) 中以 p 为基点的闭道路只有一条, 即 c_p , 于是所有闭道路的定端同伦类也只有一个, 即 $[c_p]$, 因此 $\pi_1(X, p) = \{[c_p]\}$ 这是一个只含有单位元的平凡群。

题目 9.3. 设 $A = \{a\} \subset X$ 是单点子空间, 如果 a 是 X 的形变收缩核, 则称 X 是可缩空间。证明

- 1) 如果 X 是可缩空间, 则它的基本群 $\pi_1(X, a)$ 是平凡群。
- 2) 证明下列空间的基本群平凡:

$X =$ 欧氏空间的凸子集; $S^n - \{p\}$; 相交于一点的若干线段。

解答. 1) 如果 X 是可缩空间, 那么 a 作为 X 的形变收缩核, 就会存在一个连续映射 $H: X \times I \rightarrow X$, 满足

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) = a, \quad H(a, s) = a \quad (\forall s \in I)$$

现在任取一条以 a 为基点的闭道路 $\gamma \in (X, a)$, 只需要证明 $\gamma \simeq_p c_a$. 令

$$K: I \times I \rightarrow X, \quad K(s, t) = H(\gamma(s), t)$$

$$K(s, 0) = H(\gamma(s), 0) = \gamma(s), \quad K(s, 1) = H(\gamma(s), 1) = a$$

所以 K 把闭道路 γ 连续变形到了常值道路 c_a 。同时

$$K(0, t) = H(\gamma(0), t) = a, \quad K(1, t) = H(\gamma(1), t) = a$$

所以这个同伦是定端同伦, 因此 $\gamma \simeq_p c_a$, 所以 $[\gamma] = [c_a]$, 所以 $\pi_1(X, a) = 0$.

2) 凸子集是可缩空间, 构造同伦 $H_1(x, t) = (1 - t)x + ta$ 。

$S^n - \{p\} \cong \mathbb{R}^n$, 由球极投影给出, $\mathbb{R}^n$ 是凸子集, 所以 $S^n - \{p\}$ 的基本群也是平凡的。

设这些线段相交于一点 a , 构造同伦 $H_2(x, t) = (1 - t)x + ta$, 就可以把每个线上的点拉回到 a , 所以也是可缩空间。

题目 9.4. 已知连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 同伦于一个常值映射 $g: X \rightarrow y_0 \in Y$. 证明诱导同态 $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ 平凡。

解答. 要证明平凡映射, 即需要证明 $f_*([\gamma]) = [c_{f(x_0)}]$. 对任意 $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ 都成立。

因为 $f: X \rightarrow Y$ 同伦于一个常值映射 $g: X \rightarrow y_0 \in Y$, 所以存在连续映射 $H: X \times I \rightarrow Y$, 使得

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = y_0$$

定义 $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$, $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$, 考虑映射 $K: I \times I \rightarrow Y$, $K(s, t) = H(\gamma(s), t)$,

$$K(0, t) = H(\gamma(0), t) = f(x_0), \quad K(1, t) = H(\gamma(1), t) = f(x_0)$$

$$K(s, 0) = H(\gamma(s), 0) = f \circ \gamma(s), \quad K(s, 1) = H(\gamma(s), 1) = y_0 = f(x_0)$$

也就是说, $f \circ \gamma \simeq_p c_{f(x_0)}$, 所以 $f_*([\gamma]) = [c_{f(x_0)}]$, 从而基本群平凡。

题目 9.5. 对于连续映射 $F: D^2 \rightarrow S^1$, 令 $f = F|_{\partial D^2}: S^1 \rightarrow S^1$. 证明诱导同态 f_* 平凡。

提示. 令

$$G: S^1 \times I \rightarrow D^2 = \frac{S^1 \times I}{S^1 \times 0}$$

为商映射。则有 $f \simeq_{F \circ G} c$, 其中 $c: S^1 \rightarrow F(0) \in S^1$ 是常值映射。

解答. 证明 f 在 $F \circ G$ 这个伦移下, 同伦于 $c_{F(0)}$, 然后就可以用上一问的结论得到同态平凡。定义 $G(s, t) = (1 - t)s, s \in S^1, t \in I$, 这样

$$F \circ G(s, 0) = F(s) = f(s), \quad F \circ G(s, 1) = F(0)$$

所以有 $f \simeq_{F \circ G} c_{F(0)}$ 。

题目 9.6. 证明下列空间的基本群同构于 $\pi_1(S^1, 1)$:

$$X = \text{Mobius 带}, \quad D^2 - \{0\}, \quad \mathbb{R}^2 - \{0\}, \quad S^1 \times I.$$

解答. $D^2 - \{0\} \simeq \mathbb{R}^2 - \{0\} \simeq S^1 \simeq S^1 \times I$ 是显然的。因为 S^1 是这三个的形变收缩核。

把 Mobius 带写成

$$X = \frac{I \times I}{(0, u) \sim (1, 1 - u)}$$

定义同伦 $H : (I \times I) \times I \rightarrow I \times I$, $[(u, v), t] \mapsto (u, (1 - t)v + \frac{1}{2}t)$, 这表示把莫比乌斯带上的点拉到中心圆周上, 从而 $X \simeq S^1$ 。

因为基本群是同伦不变的, 所以这些的基本群都同构于 $\pi_1(S^1, 1)$ 。

题目 9.7. 设 $0 \in D^n$ 为原点, $f : S^{n-1} \rightarrow A$ 连续,

$$\pi : D^n \sqcup A \rightarrow A \cup_f D^n$$

是商映射。证明含入映射

$$i = \pi|_A : A \rightarrow A \cup_f D^n = \pi(0)$$

诱导基本群同构。

解答. 只要证明 A 和 $A \cup_f D^n = \pi(0)$ 同伦等价, 就可以说明存在映射 i_* 诱导基本群同构。

将穿孔圆盘 $D^n - \{0\}$ 收缩到 S^{n-1} 上, 而 S^{n-1} 又粘到了 A 上, 且 A 上的点在收缩过程中保持不动, 所以 A 是 $Y = A \cup_f D^n = \pi(0)$ 的强形变收缩核。因为 $i : A \rightarrow Y$ 是含入映射, 所以是同伦等价, 从而诱导基本群同构。

题目 9.8. 设 $\bigvee^n S^1$ 是 n 个单位圆周的一点并, $x_0 \in \bigvee^n S^1$ 是粘合点。证明

1)

$$\pi_1(n \cdot T^2 - \{p\}, x_0) = \pi_1\left(\bigvee_{2n} S^1, x_0\right),$$

其中 $p \in n \cdot T^2$ 。

2)

$$\pi_1(n \cdot \mathbb{R}P^2 - \{p\}, x_0) = \pi_1 \left(\bigvee_n S^1, x_0 \right),$$

其中 $p \in n \cdot \mathbb{R}P^2$ 。

解答. $n \cdot T^2 - \{p\} \simeq \bigvee_{2n} S^1$, $n \cdot \mathbb{R}P^2 - \{p\} \simeq \bigvee_n S^1$, 所以基本群相等。

题目 9.9. 已知空间 X 中首尾相接的三条道路 $\gamma, \sigma, \delta : I \rightarrow X$, 且

$$\gamma(1) = \sigma(0), \quad \sigma(1) = \delta(0).$$

证明

- 1) $\gamma \cdot (\sigma \cdot \delta) \simeq (\gamma \cdot \sigma) \cdot \delta \quad \text{rel } (\partial I)$.
- 2) $\gamma \cdot \gamma^{-1} \simeq \gamma(0) \quad \text{rel } (\partial I)$, $\gamma^{-1} \cdot \gamma \simeq \gamma(1) \quad \text{rel } (\partial I)$.
- 3) 如果存在道路的定端同伦

$$\gamma \simeq \gamma' \quad \text{rel } (\partial I), \quad \sigma \simeq \sigma' \quad \text{rel } (\partial I),$$

则

$$\gamma \cdot \sigma \simeq \gamma' \cdot \sigma' \quad \text{rel } (\partial I).$$

解答. 1)

$$\sigma \cdot \delta = \begin{cases} \sigma(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \delta(2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \Rightarrow \gamma \cdot (\sigma \cdot \delta) = \begin{cases} \gamma(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma(4s-2), & s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \delta(4s-3), & s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

$$\gamma \cdot \sigma = \begin{cases} \gamma(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma(2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \Rightarrow (\gamma \cdot \sigma) \cdot \delta = \begin{cases} \gamma(4s), & s \in [0, \frac{1}{4}] \\ \sigma(4s-1), & s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \delta(2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

定义同伦 $H : I \times I \rightarrow X$,

$$H(s, t) = \begin{cases} \gamma\left(\frac{4s}{2-t}\right), & s \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t\right] \\ \sigma(4s + t - 2), & s \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}t, \frac{3}{4} - \frac{1}{4}t\right] \\ \delta\left(\frac{4s+t-3}{1+t}\right), & s \in \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4}t, 1\right] \end{cases}$$

$$H(s, 0) = \gamma \cdot (\sigma \cdot \delta), \quad H(s, 1) = (\gamma \cdot \sigma) \cdot \delta$$

$$H(0, t) = \gamma(0), \quad H(1, t) = \delta(1) = \gamma(0)$$

所以 $\gamma \cdot (\sigma \cdot \delta) \simeq (\gamma \cdot \sigma) \cdot \delta \quad \text{rel } (\partial I)$.

2)

$$\gamma \cdot \gamma^{-1}(s) = \begin{cases} \gamma(2s), & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma^{-1}(2 - 2s), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

定义同伦 $K : I \times I \rightarrow X$,

$$K(s, t) = \begin{cases} \gamma[(1-t)(2s)], & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma[(1-t)(2-2s)] & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$K(0, t) = \gamma(0), \quad K(1, t) = \gamma(0)$$

$$K(s, 0) = \gamma \cdot \gamma^{-1}(s), \quad K(s, 1) = \gamma(0)$$

所以 $\gamma \cdot \gamma^{-1} \simeq \gamma(0) \quad \text{rel } (\partial I)$, 类似地, 第二个只需要构造同伦

$$K'(s, t) = \begin{cases} \gamma[(1-t)(1-2s) + t], & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma[(1-t)(2s-1) + t] & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

3) 设 P, Q 分别是 γ, γ' 和 σ, σ' 的定端同伦。

$$P(s, 0) = \gamma, \quad P(s, 1) = \gamma', \quad P(0, t) = \gamma(0) = \gamma'(0), \quad P(1, t) = \gamma(1) = \gamma'(1)$$

$$Q(s, 0) = \sigma, \quad Q(s, 1) = \sigma', \quad Q(0, t) = \sigma(0) = \sigma'(0), \quad Q(1, t) = \sigma(1) = \sigma'(1)$$

现在定义 $R : I \times I \rightarrow X$, 为

$$R(s, t) = \begin{cases} P(2s, t), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ Q(2s-1, t), & \frac{1}{2} < s \leq 1 \end{cases}$$

满足

$$R(s, 0) = \begin{cases} P(2s, 0), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ Q(2s-1, 0), & \frac{1}{2} < s \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \gamma(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2s-1), & \frac{1}{2} < s \leq 1 \end{cases} = \gamma \cdot \sigma$$

$$R(s, 1) = \gamma' \cdot \sigma', \quad R(0, t) = P(0, t) = \gamma(0), \quad R(1, t) = Q(1, t) = \sigma(1) = \gamma(0)$$

所以 R 是一个定端同伦, 即 $\gamma \cdot \sigma \simeq_p \gamma' \cdot \sigma'$.

题目 9.10. 映射度的同伦不变性: 如果 $f \simeq g: S^1 \rightarrow S^1$, 则 $\deg(f) = \deg(g)$.

解答. 设 $H: S^1 \times I \rightarrow S^1$ 是 f 到 g 的同伦. 令 $\alpha_1(s) = e^{2\pi i s}$, 定义 $K(s, t) = H(\alpha_1(s), t)$.

$$K(s, 0) = H(\alpha_1(s), 0) = f(\alpha_1(s)) = f \circ \alpha_1(s),$$

$$K(s, 1) = H(\alpha_1(s), 1) = g(\alpha_1(s)) = g \circ \alpha_1(s).$$

K 是从 $f \circ \alpha_1$ 到 $g \circ \alpha_1$ 的同伦. 取覆盖映射 $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1, p(u) = e^{2\pi i u}$. K 有提升 $\tilde{K}: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$, 使得 $p \circ \tilde{K} = K$. 对每个固定的 t , 因为 $K(0, t) = K(1, t)$, 所以 $p(\tilde{K}(0, t)) = p(\tilde{K}(1, t))$, 由于 p 的性质, 所以 $\tilde{K}(0, t) - \tilde{K}(1, t) \in \mathbb{Z}$, 而 $k(t) = \tilde{K}(0, t) - \tilde{K}(1, t)$ 应当是对于 t 连续的, 所以只能是常值函数, 所以 $k(0) = k(1)$, 而 $k(0)$ 和 $k(1)$ 分别是闭道路 $f \circ \alpha_1$ 和 $g \circ \alpha_1$ 的绕圈数, 所以 $\deg f = \deg g$.

题目 9.11. 设 $B(a) \subset \mathbb{R}^2$ 是半径为 $a > 0$ 的闭圆盘. 对于连续映射

$$F: B(a) \rightarrow S^1,$$

令 $f = F|_{\partial B(a)}: S^1 \rightarrow S^1$. 证明 $\deg(f) = 0$.

提示: 参见第 99 页习题 5.

解答. 先证明 $f \simeq c_{F(0)}$. 定义同伦 $H: S^1 \times I \rightarrow S^1$,

$$H(z, t) = F((1-t)az)$$

$$H(z, 0) = F(az) = f(z), \quad H(z, 1) = F(0)$$

从而 H 给出了 f 与常值映射 $c_{F(0)}$ 的同伦, 即 $f \simeq c_{F(0)}$, 由于同伦保持映射度, 所以 $\deg(f) = 0$.

题目 9.12. 视 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z \cdot \bar{z} = 1\}$. 令 $f_n : S^1 \rightarrow S^1$ 为 $f_n(z) = z^n$. 证明 $\deg(f_n) = n$.

提示: 根据定义, 我们有关系 $f_n \circ \alpha_1 = \alpha_n$.

解答. 设 $\alpha_1 : I \rightarrow S^1$, $\alpha_1(s) = e^{2\pi i s}$. f_n 是一个连续映射, 诱导了基本群的同态 f_* 为

$$f_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1), \quad f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma] \quad (\forall \gamma \in (S^1, 1))$$

此时, f_* 满足 $f_*([\alpha_1]) = [\alpha_n] = n \cdot [\alpha_1]$, 所以 $\deg(f_n) = n$.

题目 9.13. 一个映射 $f : S^1 \rightarrow S^1$ 称为奇映射, 如果

$$f(-z) = -f(z), \quad z \in S^1.$$

证明如果 f 是一个奇映射, 则 $\deg(f)$ 是奇数。

提示: 由于 f 是奇映射, S^1 中的闭道路

$$f \circ \alpha_1 : (I, 0) \rightarrow (S^1, f(1))$$

满足性质

$$f \circ \alpha_1 \left(s + \frac{1}{2} \right) = -f \circ \alpha_1(s), \quad s \in \left[0, \frac{1}{2} \right].$$

由此知, 存在一个奇数 k , 使得

$$\widetilde{f \circ \alpha_1} \left(s + \frac{1}{2} \right) = \widetilde{f \circ \alpha_1}(s) + \frac{k}{2}, \quad s \in \left[0, \frac{1}{2} \right],$$

其中 $\widetilde{f \circ \alpha_1}$ 是闭道路 $f \circ \alpha_1$ 的唯一提升。

在上式中取 $s = 0, \frac{1}{2}$, 可以推出 $\widetilde{f \circ \alpha_1}(1) = k$. 后者表明 $\deg(f) = k$.

解答. 令 $\alpha_1(s) = e^{2\pi i s}$, 考虑闭道路 $\beta = f \circ \alpha_1$, 由于 f 是奇映射, 所以

$$\beta \left(s + \frac{1}{2} \right) = f \left(\alpha_1 \left(s + \frac{1}{2} \right) \right) = f(-\alpha_1(s)) = -f(\alpha_1(s)) = -\beta(s)$$

取覆盖映射 $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, p(u) = e^{2\pi i u}$, 令 $\tilde{\beta}$ 是 β 的一个提升, 所以

$$p \left(u + \frac{1}{2} \right) = -\beta(s) = \beta \left(s + \frac{1}{2} \right)$$

所以 $s \mapsto \tilde{\beta}(s + \frac{1}{2})$ 和 $s \mapsto \tilde{\beta}(s) + \frac{1}{2}$ 都是同一条道路 $s \mapsto \beta(s + \frac{1}{2})$ 的提升。而他们之

间只会差一个整数，这就是

$$\widetilde{f \circ \alpha_1} \left(s + \frac{1}{2} \right) = \widetilde{f \circ \alpha_1}(s) + \frac{k}{2}, \quad s \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$$

分别取 $s = 0, \frac{1}{2}$ ，得到

$$\tilde{\beta} \left(\frac{1}{2} \right) = \tilde{\beta}(0) + \frac{k}{2}, \quad \tilde{\beta}(1) = \tilde{\beta} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{k}{2}$$

所以闭道路 β 的提升终点差是 $\tilde{\beta}(1) - \tilde{\beta}(0) = k$ ，也就是 f 的映射度，因此 $\deg f = k$ 是一个奇数。

第十章 第 11 周拓扑作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 10.1. 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为单位圆盘, $f: D \rightarrow D$ 连续, 它保持 $\partial D = S^1$ 上每一点不动。证明 f 是满射。

解答. 假设存在 $y \in D, \forall x \in D, f(x) \neq y$, 也就是说 f 不是满射。 y 一定不在 ∂D 上, 因为映射保持边界不动, 所以 $y \in \mathring{D}$, 那么 $\overrightarrow{yf(x)}$ 这条射线一定会与圆周存在交点 $a(x)$, 定义 $g: D \rightarrow S$ 为 $g(x) = a(x)$, g 连续。

若 $x \in S^1$, 则 $f(x) = x$, 所以 $g(x) = a(x) = x$ 。所以 $g|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$, 也就是说 $g: D \rightarrow S^1$ 是一个保持 S^1 的收缩映射。下面用基本群推出矛盾。

令 $i: S^1 \hookrightarrow D$ 为包含映射, 则 $g \circ i = \text{id}_{S^1}$, 取基点 $p \in S^1$, 诱导基本群同态得到

$$g_* \circ i_* = (\text{id}_{S^1})_* = \text{id}_{\pi_1(S^1, p)}$$

但是 D 是凸集, 所以 $\pi_1(D, p) = 0$ 。于是

$$i_*: \pi_1(S^1, p) \rightarrow \pi_1(D, p)$$

是零同态。从而 $g_* \circ i_*$ 也是零同态, 但是 $\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$, 得到矛盾。

因此 f 必为满射。

题目 10.2. 设 $f: S^1 \rightarrow S^1$ 零伦, 证明 f 有一个不动点 $f(x) = x, x \in S^1$ 。

解答. (这个映射度的乘法第一次听说) 假设 f 没有不动点, 也就是说任意的 $y \in S^1$, 都有 $f(y) \neq y$. 定义映射

$$g(z) = \frac{f(z)}{z}, \quad z \in S^1$$

由于 $f(z) \neq z$, 所以 $g(z) \neq 1$, 因此 g 的值域包含在 $S^1 \setminus \{1\}$ 中。因为 $S^1 \setminus \{1\}$ 同胚于开区间, 是可缩的, 所以 g 是零伦的。从而

$$\deg(f) = \deg(g \cdot \text{id}) = \deg(g) + \deg(\text{id}) = 1$$

这与 $\deg(f) = 0$ 矛盾。所以 f 必然存在不动点。

题目 10.3. 设 $A \subset X$ 。证明在下列情况中不存在收缩映射 $r: X \rightarrow A$:

- 1) $X = \mathbb{R}^3, A \cong S^1$;
- 2) $X = D^2 \times S^1; A = \partial X$;
- 3) $X = S^2, A$ 是 S^2 的赤道。

解答. 1) 假设存在收缩映射 $r: X \rightarrow A$, 那么定义嵌入映射 $i: A \rightarrow X$, 那么 $r \circ i = \text{id}_A$. 从而取定基点 $p \in A$ 后, 由连续映射诱导基本群同态, 得到

$$(r \circ i)_* = r_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_1(A, p)}$$

也就是说,

$$\pi_1(A, p) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathbb{R}^3, p) \xrightarrow{r_*} \pi_1(A, p)$$

这个复合必须是恒等同态。但是 $\mathbb{R}^3$ 是凸集, 可缩, 所以 $\pi_1(\mathbb{R}^3, p) = 0$, 从而 $r_* \circ i_*$ 是零同态, 从而得到 $\pi_1(A, p)$ 必须是平凡群, 但是 $A \cong S^1$, 也就是说 $\pi_1(A, p) \cong \mathbb{Z}$, 不是平凡群, 矛盾。

所以不会存在这样的收缩映射。

2) 假设存在收缩映射 $r: X \rightarrow A$, 那么定义嵌入映射 $i: A \rightarrow X$, 那么 $r \circ i = \text{id}_A$. 从而取定基点 $p \in A$ 后, 由连续映射诱导基本群同态, 得到

$$(r \circ i)_* = r_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_1(A, p)}$$

也就是说,

$$\pi_1(\partial D^2 \times S^1, p) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2 \times S^1, p) \xrightarrow{r_*} \pi_1(\partial D^2 \times S^1, p)$$

这个复合必须是恒等同态。于是 i_* 必须是单射, 因为假如 $\alpha \in \pi_1(A, p)$, $i_*(\alpha) = 0$, 那么

$$\alpha = \text{id}_{\pi_1(A, p)}(\alpha) = r_*(i_*(\alpha)) = r_*(0) = 0$$

所以 $\ker i_* = \{0\} \implies i_*$ 是单射。

但是现在取 $\pi_1(\partial D^2 \times S^1, p)$ 中的一条道路 $\gamma = (e^{2\pi it}, 0)$, 是一个扣住轮胎面的圆, 它在 $D^2 \times S^1$ 中可缩到一个点, 所以 $i_*(\gamma) = [\gamma] = 0$, 但是 $\gamma \neq 0$. 所以 i_* 不是单射, 矛盾。

所以不会存在这样的收缩映射。

3) 和 1) 几乎一样。

题目 10.4. 已知一个“正矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}, a_{ij} > 0$ ”。考虑线性映射

$$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \rightarrow A \cdot x$$

证明矩阵 A 有一个正特征值 $\lambda > 0$, 从属于它的特征向量位于第一象限。

提示: 令 $E = \mathbb{R}^3$ 中的单位球面在第一象限的部分 ($\cong D^2$)。则 A 决定了一个连续映射

$$f_A: E \rightarrow E, \quad f_A(v) = \frac{Av}{|Av|}$$

解答. 定义提示中的映射。因为 $E \cong D^2$, 所以设 $\varphi: E \rightarrow D^2$ 是同胚。定义

$$F_A: D^2 \rightarrow D^2, \quad F_A(x) = \varphi \circ f_A \circ \varphi^{-1}(x)$$

因为 φ, φ^{-1} 都是连续的, 所以 F_A 是连续的。因此由 Brouwer 不动点定理, 可以得到存在 $x_0 \in D^2, F_A(x_0) = x_0$. 也就是

$$x_0 = \varphi \circ f_A \circ \varphi^{-1}(x_0) = \varphi \circ \frac{A\varphi^{-1}(x_0)}{|A\varphi^{-1}(x_0)|} \implies \varphi^{-1}(x_0) = \frac{A\varphi^{-1}(x_0)}{|A\varphi^{-1}(x_0)|}$$

令 $y = \varphi^{-1}(x_0) \in E$, 则

$$y = \frac{Ay}{|Ay|} \implies Ay = |Ay|y$$

也就是 A 存在一个正特征值 $\lambda = |Ay|$, 特征向量是 y .

题目 10.5. 设 $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, 其中 $A_i \subset S^2$ 是闭子空间。证明存在 $x \in S^2$, 满足

$$\pm x \in A_i \quad (i = 1 \text{ 或 } 2 \text{ 或 } 3)$$

提示: 对于 $i = 1, 2$, 令 $d_i: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $d_i(x) = d(x, A_i)$ 。考虑映射

$$f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (d_1(x), d_2(x))$$

由 Borsuk-Ulam 定理, 存在 $x_0 \in S^2$ 满足

$$d_1(x_0) = d_1(-x_0); \quad d_2(x_0) = d_2(-x_0)$$

下分情形讨论:

1) 如果 $d_1(x_0) = d_1(-x_0) = 0$ (或 $d_2(x_0) = d_2(-x_0) = 0$) 则有 $\pm x_0 \in A_1$ (或 $\pm x_0 \in A_2$);

2) 如果 $d_1(x_0) = d_1(-x_0) \neq 0$ (或 $d_2(x_0) = d_2(-x_0) \neq 0$) 则有 $\pm x_0 \notin A_1, A_2$, 由此知 $\pm x_0 \in A_3$ 。

解答. 提示基本已经做完了吧, 也不需要补充啥了。

题目 10.6. 设 $A_i \subseteq \mathbb{R}^3$ 为紧致子集, $i = 1, 2, 3$ 。证明存在一张平面 $L \subset \mathbb{R}^3$, 它将每个 A_i 分为测度相等的两部分。

解答. 定义平面为 $ax + by + cz + d = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, 记这个平面将 A_i 分成的两部分的测度比为 α_i , 其中 $\alpha_i > 1$ 。定义 $F: S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(a, b, c, d) = (2\alpha_1 - 1, 2\alpha_2 - 1, 2\alpha_3 - 1)$$

这是一个连续函数。

由 Borsuk-Ulam 定理, 方程 $f(x) = f(-x)$ 必有一个解。而可以发现 $f(-x) = -f(x)$, 所以 $f(x) = -f(x)$ 会有一个解, 也就是说 $f(x) = 0$ 有解, 从而这样的平面就存在。

题目 10.7. 证明 $\mathbb{R}_+^2$ 与 $\mathbb{R}^2$ 不同胚。

由此证明, 如果 M 是一张曲面, ∂M 和 $\overset{\circ}{M}$ 分别是它的边界和内部, 则 $\partial M \cap \overset{\circ}{M} = \emptyset$ 。

提示: 利用 $\pi_1(\mathbb{R}_+^2 - \{0\}, 1) = 0$, $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{p\}, q) = \mathbb{Z}$, 其中 $p \neq q$ 。(见 Armstrong 定理 5.23)。

解答. 先证明不同胚。假设存在同胚映射 $f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 那么就会存在映射

$$\tilde{f}: \mathbb{R}_+^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{f(0)\}$$

从而诱导了基本群的同构 $\tilde{f}_*$, 但是 0 与 $\mathbb{Z}$ 不同构, 矛盾。

假设 $x \in \partial M \cap \overset{\circ}{M}$, 那么 x 的小邻域会同时与 $\mathbb{R}_+^2$ 与 $\mathbb{R}^2$ 同构, 这是不可能的, 所以 $\partial M \cap \overset{\circ}{M} = \emptyset$.

题目 10.8. 设 $f: M \rightarrow N$ 是带边曲面之间的同胚, 证明 $f(\partial(M)) = \partial(N)$ 。进而说明莫比乌斯带与圆柱面 $S^1 \times I$ 不同胚。

解答. 假设 $\exists x \in \partial M, f(x) \in \overset{\circ}{N}$ 。由于 f 是连续映射, 所以存在一个 x 的小邻域 U , 使得 $f(U) \subset \overset{\circ}{N}$, 且 $U \cong \mathbb{R}_+^2$, 这就得到了矛盾, 因为任意的开集 $V \in \overset{\circ}{N}, V \cong \mathbb{R}^2$ 。所以 $f(\partial M) = \partial N$ 。

莫比乌斯带的边界是由一个连通的圆周构成, 同构于 S^1 , 圆柱面的边界由两个互不相交的圆周构成, 这两个不会同胚, 所以莫比乌斯带与圆柱面不同胚。

题目 10.9. 设 S_n 是 n 元置换群, 证明 S_n 是一个有限表示群, 写出该群的生成元与关系。

解答. 生成元为 $s_1 = (1, 2), s_2 = (2, 3), \dots, s_{n-1} = (n-1, n)$, 关系为 $s_i^2 = 1, s_i s_j = s_j s_i, (s_i s_{i+1})^3 = 1$ 。所以

$$S_n = \langle s_1, \dots, s_n \mid s_i^2 = 1, s_i s_j = s_j s_i, (s_i s_{i+1})^3 = 1 \rangle$$

题目 10.10. 如果 $X = \bigvee_k S^1$ 是 k 个定向圆周的一点并, $x_0 \in X$ 是粘合点, 则

$$\pi_1(X, x_0) = F(a_1, \dots, a_k)$$

其中 $a_i: I \rightarrow \bigvee_k S^1$ 是绕第 i 圆周保定向绕行一周的闭路。

解答. 当 $k = 1$ 时, $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z} = F(a)$ 。

当 $k = 2$ 时, 根据提示对两个圆的一点并进行分割, $\pi_1(A) = F(a_1), \pi_1(B) = F(a_2), \pi_1(A \cap B) = 0$ 。所以由 Van Kampen 定理可得,

$$\pi_1(X, x_0) = F(a_1) * F(a_2) = F(a_1, a_2)$$

对于一般情形, 取 $C_1 = S^1, C_2 = \bigvee_{k-1} S^1 \subset X, U =$ 粘合点 x_0 的一个开邻域, 他同胚于 k 个开线段在一点并空间, 令

$$A = C_1 \cup U, B = C_2 \cup U$$

则 $X = A \cup B, A \cap B = U$, 应用 Van Kampen 定理, 可得

$$\pi_1(X, x_0) = F(a_n) * F(a_1, \dots, a_{n-1}) = F(a_1, \dots, a_n).$$

题目 10.11. 对于任一元素 $z \in F(a_1, \dots, a_k)$, 存在一个连续映射 $f: S^1 \rightarrow S_1^1 \vee \dots \vee S_k^1$, 使得诱导同态

$$f_*: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S_1^1 \vee \dots \vee S_k^1, x_0) = F(a_1, \dots, a_k)$$

满足 $f_*[\alpha_1] = z$, 此处 $[\alpha_1] \in \pi_1(S^1, 1)$ 是生成元。

解答. 任意元素 $z = a_{i_1}^{r_1} \dots a_{i_m}^{r_m} \in F(a_1, \dots, a_k)$, 决定了一点并空间 $A = S_1^1 \vee \dots \vee S_k^1$ 的一条闭路 $f: (S^1, 1) \rightarrow (A, *)$, 它的定义如下:

第一步: 在 S^1 中逆时针方向选取 m 个分点 $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, 他们将 S^1 分成 m 段 $A_1, \dots, A_m$, 且 $A_1 \cup \dots \cup A_m = S^1$. 令 $f(B) = x_0$ 是粘合点。

第二步: 若 $r_s > 0$, 则 $f|_{A_s}$ 是保定向绕圆周 $S_{i_s}^1 \subset A$ 运行 r_s 圈的映射, 若 $r_s < 0$, 则是反过来绕 r_s 圈的映射。由焊接引理可知, f 连续, 所以有上一道题可知, $f_*[\alpha_1] = z$.

题目 10.12. 如果 $X = \bigvee_k S^{n_j}$, $n_j \geq 2$, 则 $\pi_1(X, x_0) = 0$ 。

解答. 对于 $k = 1$, 设 $X = S^n$. 取开子空间 $A, B \subset S^n$ 如图所示 (书上的图)。则有:

1) $A \cong B \cong \mathring{D}^n$, 从而 $\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) = 0$.

2) $A \cap B \cong S^{n-1} \times (0, 1)$, 从而 $\pi_1(A \cap B, x_0) = \pi_1(S^{n-1}, x_0)$

由 Van Kampen 定理知, $\pi_1(S^n, x_0)$ 是 $\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$ 的一个商群, 也就是 $\{e\}$ 的商群, 所以 $\pi_1(S^n, x_0) = 0$.

对于 $k \geq 2$, 取 $C_1 = S^{n_1}, C_2 = \bigvee_{2 \leq j \leq k} S^{n_j} \subset X$, $U =$ 粘合点 x_0 的一个开邻域, 他同胚于 k 个开球体在一点并空间 $\bigvee_k D^{n_j}$, 令

$$A = C_1 \cup U, B = C_2 \cup U$$

则有 $X = A \cup B$, $U = A \cap B$, 应用 Van Kampen 定理, 得到 $\pi_1(X, x_0)$ 是

$$\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) = 0 * 0 = 0$$

的商群, 因此 $\pi_1(X, x_0) = 0$ 。

综上, $\pi_1\left(\bigvee_{j=1}^k S^{n_j}, x_0\right) = 0$.

第十一章 第 12 周拓扑作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

题目 11.1. 构造出基本群同构于下述群的二维胞腔复形：

$$(1) \mathbb{Z}_p; (2) \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q; (3) \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q.$$

解答. (1) $\mathbb{Z}_p \cong \langle a \mid a^p \rangle$. 可以构造胞腔复形 $X = S^1 \cup_f D^2$, 其中 $f : (S^1, 1) \rightarrow (S^1, *)$, $f_*[S^1] = a^p$.

(2) $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q \cong \langle a, b \mid a^p, b^q, aba^{-1}b^{-1} \rangle$. 构造胞腔复形 $X = (S^1 \vee S^1) \cup_{f_1} D^2 \cup_{f_2} D^2 \cup_{f_3} D^2$, 其中

$$f_1 : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1, f_{1*}([\alpha]) = a^p,$$

$$f_2 : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1, f_{2*}([\alpha]) = b^q,$$

$$f_3 : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1, f_{3*}([\alpha]) = aba^{-1}b^{-1}.$$

(3) $\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q \cong \langle a, b \mid a^p, b^q \rangle$. 构造胞腔复形 $X = (S^1 \vee S^1) \cup_{f_1} D^2 \cup_{f_2} D^2$, 其中

$$f_1 : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1, f_{1*}([\alpha]) = a^p,$$

$$f_2 : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1, f_{2*}([\alpha]) = b^q.$$

题目 11.2. 利用推论 3 证明

$$1) \pi_1(T^2, *) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$2) \pi_1(\mathbb{R}P^2, *) = \mathbb{Z}_2.$$

解答. 1) $\pi_1(T^2, *) = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$, 也就是说两个独立的生成元, 且可交换, 那么就是 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

2) $\pi_1(\mathbb{R}P^2, *) = \langle a \mid a^2 \rangle$, 也就是说一个单位元, 平方等于 1, 就是同构于 $\mathbb{Z}_2$.

题目 11.3. 设 (A, a) 道路连通且局部可缩. 证明对于任意连续映射 $f: (S^0, 1) \rightarrow (A, a)$

1) $A \cup_f D^1 \simeq A \vee S^1$

2) $\pi_1(A \vee S^1, a) = \pi_1(A, a) * F(t)$, 其中 $F(t)$ 是一个生成元 t 的自由群.

解答. 1) 设 $D^1 = [0, 1]$, $S^0 = \{0, 1\}$, 且 $f(1) = a, f(0) = b$. 因为 A 道路连通, 取一条道路 $\lambda: I \rightarrow A$, 满足 $\lambda(0) = a, \lambda(1) = b$. 令 $Y = A \vee S^1$, S^1 与基点 a 粘合. 定义映射 $\Phi: Y \rightarrow X$, 在 A 上恒同, 在 S^1 上沿 λ 走一圈. 再定义 $\Psi: X \rightarrow Y$: 在 A 上取恒等映射, 在新线段 e 上令它沿道路 λ^{-1} 走. 于是, 在 A 上, 复合是恒等映射, 在新填的部分上, 由道路同伦, 可知

$$\Psi \circ \Phi = \text{id}, \Phi \circ \Psi = \text{id}$$

故二者同伦.

2) 取 a 的一个可缩开邻域 $U \subset A$, 在 S^1 中取基点附近的小弧 V , 于是令

$$Y_1 = A \cup V, Y_2 = U \cup S^1$$

由于 Y_1 形变收缩到 A , Y_2 形变收缩到 S^1 , 且 $Y_1 \cup Y_2 = A \vee S^1$, $Y_1 \cap Y_2 = U \cup V$ 可缩, 所以由 Van Kampen 定理,

$$\pi_1(A \vee S^1, a) \cong \pi_1(A, a) * \pi_1(S^1, a) = \pi_1(A, a) * F(t)$$

题目 11.4. 计算下面平面图形的基本群, 并标出它们的一组生成元.

解答. 这四个都是 $\simeq S^1 \vee S^1$, 所以 $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_2 \cong F(a, b)$.

题目 11.5. 已知连续映射 $f: Y \rightarrow X$ 的两个提升, 如果存在一点 $r \in Y$ 使得 $\tilde{f}_1(r) = \tilde{f}_2(r)$, 则 $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2: Y \rightarrow \tilde{X}$.

解答. 取基点 $x_0 = f(r)$, 那么 $\tilde{x}_0 = \tilde{f}_1(r) = \tilde{f}_2(r)$. 有

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow^{(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)} & \uparrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

对于任意 $y \in Y$, 令 $\gamma: (I, 0) \rightarrow (Y, r)$ 是从 r 到 y 的一条道路, 则 $\widetilde{f_1 \circ \gamma}$ 和 $\widetilde{f_2 \circ \gamma}$ 是空间 X 中同道路 $f \circ \gamma$ 的两个起点相同的提升, 因为道路提升是唯一的, 所以

$$\widetilde{f_1 \circ \gamma}(t) = \widetilde{f_2 \circ \gamma}(t)$$

令 $t = 1$, 可得

$$\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$$

题目 11.6. 已知连续映射的复合:

$$p = p_1 \circ p_2: \tilde{X}_2 \xrightarrow{f} \tilde{X}_1 \xrightarrow{p_1} X$$

其中 p, p_1 均是复迭映射, 证明 p_2 也是复迭映射。

解答. 取任意 $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$, 令 $x = p_1(\tilde{x}_1)$, 因为 p_1 是复迭映射, 所以存在 x 的开邻域 $U \subset X$, 使得

$$p_1^{-1}(U) = \bigsqcup_{\beta} V_{\beta},$$

且每个 $p_1|_{V_{\beta}}: V_{\beta} \rightarrow U$ 是同胚。设 $\tilde{x}_1 \in V_{\beta_0}$ 。

又因为 p 是复迭映射, 可取 U 也被 p 均匀覆盖, 即

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha} W_{\alpha}$$

且每个 $p|_{W_{\alpha}}: W_{\alpha} \rightarrow U$ 是同胚。现在看 $p_2^{-1}(V_{\beta_0})$ 。对满足 $p_2(W_{\alpha}) \subset V_{\beta_0}$ 的那些 W_{α} , 有

$$p_2|_{W_{\alpha}} = \left(p_1|_{V_{\beta_0}}\right)^{-1} \circ (p|_{W_{\alpha}})$$

所以 $p_2|_{W_{\alpha}}$ 是同胚的复合也是同胚。

因此

$$p_2^{-1}(V_{\beta_0}) = \bigsqcup_{\alpha} W_{\alpha},$$

并且每一片都是同胚。由于 $\tilde{x}_1$ 是任意的, 所以 p_2 是复迭映射。

第十二章 第 13 周拓扑作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 12.1. If we change the 0-th boundary operator to be

$$\partial_0^* : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}, \sum n_i x_i \mapsto \sum n_i$$

prove:

1) $\partial_0^* \circ \partial_1 = 0$.

2) we have a chain complex

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0^*} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Define

$$\tilde{H}_i(X) := \begin{cases} \frac{\ker \partial_i}{\text{Im} \partial_{i+1}}, & i \geq 1 \\ \frac{\ker \partial_0^*}{\text{Im} \partial_1}, & i = 0 \end{cases}$$

Show that $H_i(X) \cong \begin{cases} \tilde{H}_i(X), & i \geq 1 \\ \tilde{H}_i(X) \oplus \mathbb{Z}, & i = 0 \end{cases}$.

解答. 1) 对一个生成元 $\sigma : I \rightarrow X$ 进行验证。由于 $\partial_1 \sigma = \sigma(1) - \sigma(0)$ ，所以

$$\partial_0^* (\partial_1 \sigma) = \partial_0^* (\sigma(1) - \sigma(0)) = 1 - 1 = 0$$

所以对任意奇异 1-单形 σ ，都有 $\partial_0^* \circ \partial_1 (\sigma) = 0$ ，从而对任意 1-链 $c \in S_1(X)$ ，也有 $\partial_0^* \circ \partial_1 (c) = 0$ ，因此 $\partial_0^* \circ \partial_1 = 0$ 。

2) (这不会做呀，问的 AI) 由于原本的奇异链复形中已有 $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ ，新加入的部分也满足 $\partial_0^* \circ \partial_1 = 0$ ，所以这是一个链复形。然后比较同调群。

当 $i \geq 1$ 时, 同调群的定义相同。

当 $i = 0$ 时, 普通的 0 维同调为

$$H_0(X) = \frac{S_0(X)}{\text{Im} \partial_1}$$

取定一点 $x_0 \in X$, 定义映射

$$\Phi: \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} \rightarrow H_0(X), \quad \Phi([c], n) = [c + nx_0]$$

其中 $c \in \ker \partial_0^*$.

首先 Φ 是良定义的。将 c 换成 $c + \partial_1 b$, 则

$$[c + \partial_1 b + nx_0] = [c + nx_0]$$

在 $H_0(X)$ 中相同, 所以 Φ 不依赖于代表元的选取, 是良定义的。

其次证明 Φ 是满射。任取 $[d] \in H_0(X)$, 其中 $d \in S_0(X)$, 令

$$n = \partial_0^*(d), \quad c = d - nx_0$$

则

$$\partial_0^*(c) = \partial_0^*(d) - n\partial_0^*(x_0) = n - n = 0$$

所以 $c \in \ker \partial_0^*$, 于是 $[d] = [c + nx_0] = \Phi([c], n)$, 所以 Φ 是满射。

最后证明 Φ 是单射。若 $\Phi([c], n) = 0$, 则 $[c + nx_0] = 0 \in H_0(X)$. 也就是说 $c + nx_0 \in \text{Im} \partial_1$. 所以由 $\partial_0^* \circ \partial_1 = 0$, 可得

$$\partial_0^*(c + nx_0) = 0.$$

又因为 $c \in \ker \partial_0^*$, 所以 $n = 0$, 于是 $c \in \text{Im} \partial_1$, 从而 $[c] = 0 \in \tilde{H}_0(X)$. 所以 $([c], n) = (0, 0)$, 故 Φ 是单射。

综上 Φ 是同构, 因此 $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

题目 12.2. Suppose X has 2 path connected components X_1, X_2 . Show that

$$S_q(X) \cong S_q(X_1) \oplus S_q(X_2)$$

$$\partial_q(S_q(X_i)) \subset S_{q-1}(X_i), \quad i = 1, 2$$

$$H_q(X) \cong H_q(X_1) \oplus H_q(X_2).$$

解答. (1) 因为 X 有两个道路连通分支 X_1, X_2 , 于是 $X = X_1 \sqcup X_2$. 对任意奇异 q -单形 $\sigma: \Delta^q \rightarrow X$, 由于 Δ^q 是道路连通的, 且连续映射保持道路连通性, 所以 $\sigma(\Delta^q)$ 是 X 中的道路连通子集, 因此 $\sigma(\Delta^q)$ 必包含在某一个道路连通分支中. 因此每一个奇异 q -单形都可以唯一的看做 X_1 或 X_2 中的奇异 q -单形, 于是由于 $S_q(X)$ 是有所有奇异 q -单形自由生成的 Abel 群, 所以生成元集合分成两部分

$$\{\Delta^q \rightarrow X\} = \{\Delta^q \rightarrow X_1\} \sqcup \{\Delta^q \rightarrow X_2\}$$

于是自然得到同构

$$S_q(X) \cong S_q(X_1) \oplus S_q(X_2)$$

(2) 设 $\sigma: \Delta^q \rightarrow X_i$, 是一个奇异 q -单形. 他的边界为

$$\partial_q \sigma = \sum_{j=0}^q (-1)^j \sigma|_{[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_q]}$$

每一个面限制 $\sigma|_{[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_q]}$ 都是 X_i 中的奇异 $(q-1)$ -单形, 因此

$$\partial_q \sigma \in S_{q-1}(X_i)$$

因此对于任意 $c \in S_q(X_i)$, 都有

$$\partial_q c \in S_{q-1}(X_i)$$

所以 $\partial_q(S_q(X_i)) \subset S_{q-1}(X_i)$.

(3) 由上面的分解,

$$\ker \partial_q = \ker \partial_q^{(1)} \oplus \ker \partial_q^{(2)}, \quad \text{Im} \partial_{q+1} = \text{Im} \partial_{q+1}^{(1)} \oplus \text{Im} \partial_{q+1}^{(2)}$$

所以

$$H_q(X) \cong \frac{\ker \partial_q^{(1)} \oplus \ker \partial_q^{(2)}}{\text{Im} \partial_{q+1}^{(1)} \oplus \text{Im} \partial_{q+1}^{(2)}} \cong \frac{\ker \partial_q^{(1)}}{\text{Im} \partial_{q+1}^{(1)}} \oplus \frac{\ker \partial_q^{(2)}}{\text{Im} \partial_{q+1}^{(2)}} \cong H_q(X_1) \oplus H_q(X_2).$$

这个直和分解的公式 $\frac{A \oplus B}{C \oplus D} \cong \frac{A}{C} \oplus \frac{B}{D}$ 的证明. 使用群同态基本定理, 设

$$\begin{aligned} \varphi: A \oplus B &\rightarrow \frac{A}{C} \oplus \frac{B}{D} \\ (a, b) &\mapsto (a + C, b + D) \end{aligned}$$

φ 容易验证是群同态且是满射, $\ker \varphi = (c, d), c \in C, d \in D$, 由群同态基本定理便可以得到结果。

题目 12.3. Let $\sigma^{-1} : \Delta^1 \rightarrow X$ be the inverse path of $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$. Show that $\sigma + \sigma^{-1} \in B_1(X)$.

解答. 只需要构造一个奇异 2-链 $C \in S_2(X)$, 使得 $\partial_2 C = \sigma + \sigma^{-1}$. 记 $x_0 = \sigma(0)$, 定义奇异 2-单形 $\tau : \Delta^2 \rightarrow X$ 为

$$\tau(s, t) = \sigma(s)$$

按照边缘算子的定义,

$$\partial_2 \tau = \tau|_{[e_1, e_2]} - \tau|_{[e_0, e_2]} + \tau|_{[e_0, e_1]}.$$

固定标准二维单形

$$\Delta^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \geq 0, t \geq 0, s + t \leq 1\}.$$

三个顶点是

$$e_0 = (0, 0), e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$$

在边 $[e_1, e_2]$ 上, 可以参数化为 $(1 - u, u)$, 于是

$$\tau(1 - u, u) = \sigma(1 - u) = \sigma^{-1}(u) \implies \tau|_{[e_1, e_2]} = \sigma^{-1}$$

在边 $[e_0, e_2]$ 上, 可以参数化为 $(0, u)$, 于是

$$\tau(0, u) = \sigma(0) = x_0 \implies \tau|_{[e_0, e_2]} = x_0$$

在边 $[e_0, e_1]$ 上, 可以参数化为 $(u, 0)$, 于是

$$\tau(u, 0) = \sigma(u) \implies \tau|_{[e_0, e_1]} = \sigma$$

因此 $\partial_2 \tau = \sigma^{-1} - c_{x_0} + \sigma$. 所以只需要再定义 $\eta(s, t) = x_0$, 就可以得到

$$\partial_2(\tau + \eta) = \partial_2 \tau + \partial_2 \eta = \sigma + \sigma^{-1}$$

所以

$$\sigma + \sigma^{-1} \in \text{Im} \partial_2 = B_1(X).$$

题目 12.4. If $\sigma \simeq_p \tau : \Delta^1 \rightarrow X$, then $\sigma - \tau \in B_1(X)$.

解答. 我们要证明 $\sigma - \tau$ 是某个奇异 2-链的边界。

因为 $\sigma \simeq_p \tau$, 则存在连续映射 $H : \Delta^1 \times I \rightarrow X$ 使得

$$H(s, 0) = \sigma(s), H(s, 1) = \tau(s),$$

并且端点固定:

$$H(0, t) = x_0, H(1, t) = x_1$$

设 $A(0, 0), B(1, 0), C(0, 1), D(1, 1)$, 把这个正方形沿 AD 拆成两个三角形, 这两个三角形经过 H 映到 X 里, 得到两个奇异 2-单形, 把他们加起来, 得到一个奇异 2 单形链, 记作 $S \in S_2(X)$ 。他的边界是

$$\partial S = \sigma + BD - \tau - AC$$

其中 BD 和 AC 是常值 1-单形, 他们本身也是边界。可以定义 $c_a : \Delta^2 \rightarrow X$ 是恒等于 a 的奇异 2-单形, 那么 $\partial c_a = AC$ 。类似地, $\partial c_b = BD$ 。因此

$$\sigma - \tau = \partial(S + c_b - c_a)$$

于是 $\sigma - \tau$ 是某个奇异 2-链的边界, 所以 $\sigma - \tau \in B_1(X)$ 。

题目 12.5. Let $\sigma, \tau : \Delta^1 \rightarrow X$ be loops of X at x_0 , prove that $[\sigma * \tau] = [\sigma] + [\tau] \in H_1(X)$.

解答. 取标准二维单形

$$\Delta^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \geq 0, t \geq 0, s + t \leq 1\}.$$

三个顶点是

$$e_0 = (0, 0), e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$$

定义映射 $F : \Delta^2 \rightarrow X$ 为

$$F(s, t) = \begin{cases} \sigma(s + 2t), & s + 2t \leq 1 \\ \tau(s + 2t - 1), & s + 2t \geq 1 \end{cases}$$

计算 $\partial_2 F$ 为

$$\partial_2 F = F|_{[e_1, e_2]} - F|_{[e_0, e_2]} + F|_{[e_0, e_1]}$$

在边 $[e_1, e_2]$ 上, 可以参数化为 $(1-u, u)$, 于是

$$F(1-u, u) = \tau(u) \implies F|_{[e_1, e_2]} = \tau$$

在边 $[e_0, e_2]$ 上, 可以参数化为 $(0, u)$, 于是

$$F(0, u) = \begin{cases} \sigma(2u), & 0 \leq u \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2u-1), & \frac{1}{2} \leq u \leq 1 \end{cases} \implies F|_{[e_0, e_2]} = \sigma * \tau$$

在边 $[e_0, e_1]$ 上, 可以参数化为 $(u, 0)$, 于是

$$F(u, 0) = \sigma(u) \implies F|_{[e_0, e_1]} = \sigma$$

所以

$$(\sigma * \tau) - \sigma - \tau = -\partial_2 F \in \text{Im} \partial_2 = B_1(X)$$

于是他们在 H_1 中代表一个同调类

$$[\sigma * \tau] = [\sigma] + [\tau] \in H_1(X).$$

第十三章 第 14 周拓扑作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 13.1. If X is path-connected, then $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

解答. 因为 $\partial_0 = 0$, 所以

$$Z_0(X) = S_0(X), \quad H_0(X) = \frac{S_0(X)}{B_0(X)}$$

定义同态

$$\varepsilon : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \varepsilon \left(\sum_i n_i x_i \right) = \sum_i n_i.$$

然后只需要证明 $B_0(X) = \ker \varepsilon$ 就可以了。

一方面, 若 $\sigma : I \rightarrow X$ 是一条道路, 设 $\sigma(0) = x, \sigma(1) = y$, 则 $\partial_1 \sigma = y - x$, 于是

$$\varepsilon(\partial_1 \sigma) = 1 + (-1) = 0$$

所以 $B_0(X) = \text{Im} \partial_1 \subset \ker \varepsilon$.

另一方面, 若 $\varepsilon(c) = 0$, 设 $c = \sum_i n_i x_i$, 则 $\sum_i n_i = 0$. 由于 X 道路连通, 所以对任意 x_0, x_i , 可以构造道路 σ_i , 使得 $\sigma_i(0) = x_0, \sigma_i(1) = x_i$, 且 $\partial_1 \sigma_i = x_i - x_0$, 因此 $x_i - x_0 \in B_0(X)$. 于是

$$c = \sum_i n_i x_i = \sum_i n_i (x_i - x_0) + \sum_i n_i x_0 = \sum_i n_i (x_i - x_0) \in B_0(X)$$

所以 $B_0(X) \supset \ker \varepsilon$. 于是 $B_0(X) = \ker \varepsilon$. 然后由于 ε 是满射, 所以由同态基本定理, 可得

$$\mathbb{Z} \cong \frac{S_0(X)}{B_0(X)} = H_0(X).$$

题目 13.2. If X is contractible, i.e. $X \simeq \{*\}$ then

$$H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

解答. 首先当 $q = 0$ 时, 因为 X 是可缩的, 所以 X 是道路连通的, 所以由上一个题, 可知 $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

其次当 $q > 0$ 时, 由于同调群是同伦不变的, 所以不妨只计算单点空间 $\{*\}$ 的同调群. 对每个 $q \geq 0$, $\{*\}$ 中只有一个奇异 q -单形, 记为

$$\sigma_q : \Delta^q \rightarrow \{*\}$$

因此 $S_q(\{*\}) \cong \mathbb{Z}\sigma_q$, 边缘算子满足

$$\partial_q \sigma_q = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma_{q-1} = \begin{cases} 0, & q \text{ 为奇数} \\ \sigma_{q-1}, & q \text{ 为偶数} \end{cases}$$

所以单点空间的链复形为

$$\cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

由此可得

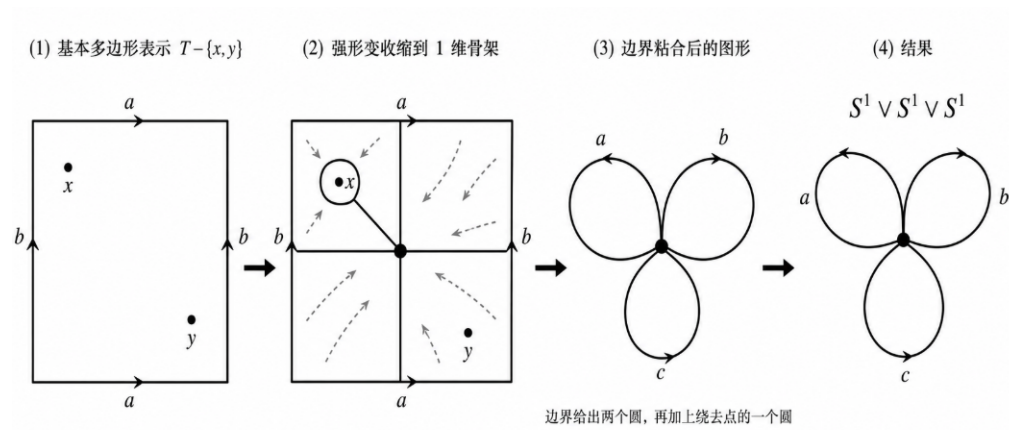
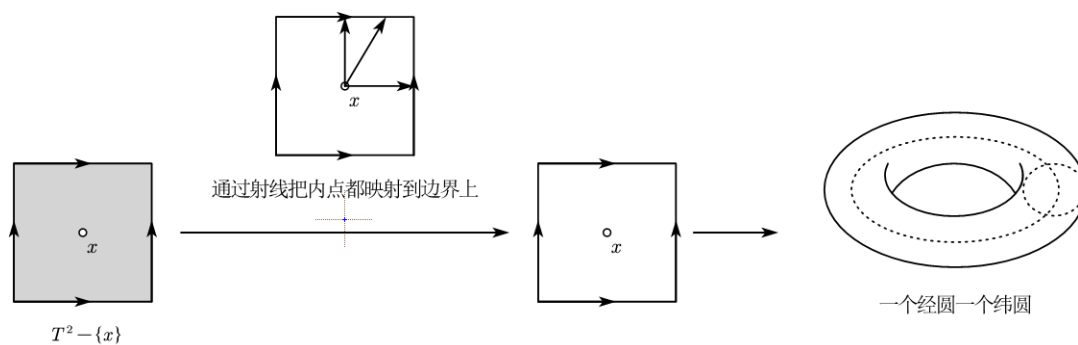
$$H_q(\{*\}) = 0, \quad q > 0.$$

因此

$$H_q(X) \cong H_q(\{*\}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ 0, & q > 0. \end{cases}$$

题目 13.3. Show that $H_q(T - \{x\}) \cong H_q(S_1 \vee S_1)$, $H_q(T - \{x, y\}) \cong H_q(S^1 \vee S^1 \vee S^1)$.

解答. 只需要证明 $T - \{x\} \simeq S_1 \vee S_1$ 和 $T - \{x, y\} \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1$, 由图可得 (第一个图自己画的, 第二个不好画用 AI 画的):



题目 13.4. Show that if

$$O \rightarrow A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} B \rightarrow O$$

is a splittable short exact sequence, then $G \cong A \oplus B$.

解答. 设存在同态 $s: B \rightarrow G$, 使得 $g \circ s = \text{id}_B$ 且 f 是单射, g 是满射, $\text{Im} f = \ker g$, 然后证明 $G \cong A \oplus B$.

因为 $g \circ s = \text{id}_B$, 所以 g 是满射, s 是单射, 设 $\varphi: A \times B \rightarrow G$, 为 $(a, b) \mapsto f(a) + s(b)$. φ 是同态, 因为

$$\begin{aligned} \varphi((a_1 + a_2, b_1 + b_2)) &= f(a_1 + a_2) + s(b_1 + b_2) \\ &= f(a_1) + f(a_2) + s(b_1) + s(b_2) \\ &= \varphi(a_1, b_1) + \varphi(a_2, b_2) \end{aligned}$$

φ 是单射, 因为假如 $f(a) + s(b) = 0$, 则两边同时作用 g , 有

$$g \circ f(a) + b = 0$$

由于 $\text{Im} f = \ker g$, 所以 $g \circ f(a) = 0$, 所以 $b = 0$, 然后由于 f 是单同态, 所以 $a = b = 0$, 从而 $\ker \varphi = (0, 0)$.

φ 是满射, 设 $x \in G$, 只需证明 $x - s(b) = f(a)$ 对某个 a 成立, 那么就会有 $\varphi(a, b) = f(a) + s(b) = g \cdot$ 对 $x - s(b) = f(a)$ 两边同时作用 g , 有

$$g(x) - b = 0$$

所以 $x - s(b) \in \ker g$, 也就是 $x - s(b) \in \text{Im} f$, 所以会存在这样的 a 。

从而 φ 是一个同态也是一个双射, 所以 φ 是同构。

题目 13.5. The definition of δ_q is independent of the choice of $\tilde{z}$. Show that δ_q is a group homomorphism.

解答. 短正合列

$$0 \longrightarrow A_q \xrightarrow{i_q} B_q \xrightarrow{p_q} C_q \longrightarrow 0,$$

设 $\tilde{z}, \tilde{z}' \in B_q$, $p_q(\tilde{z}) = z, p_q(\tilde{z}') = z$. 于是 $p_q(\tilde{z}' - \tilde{z}) = 0$, 由正合性,

$$\tilde{z}' - \tilde{z} \in \ker p_q = \text{Im} i_q$$

所以存在 $b \in A_q$, 使得

$$\tilde{z}' - \tilde{z} = i_q(b)$$

若 $i_{q-1}(a) = \partial \tilde{z}, i_{q-1}(a') = \partial \tilde{z}'$, 则

$$i_{q-1}(a' - a) = \partial(\tilde{z}' - \tilde{z}) = \partial i_q(b) = i_{q-1}(\partial b)$$

因为 i_{q-1} 是单射, 所以 $a' - a = \partial b$, 因此 $[a'] = [a] \in H_{q-1}(A)$. 所以 $\delta_q([z])$ 不依赖于 $\tilde{z}$ 的选择。

然后证明 δ_q 是群同态。

任取 $[z_1], [z_2] \in H_q(C)$. 取 $p_q(\tilde{z}_1) = z_1, p_q(\tilde{z}_2) = z_2$, 设 $i_{q-1}(a_1) = \partial \tilde{z}_1, i_{q-1}(a_2) = \partial \tilde{z}_2$, 则有

$$p_q(\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2) = z_1 + z_2$$

$$\partial(\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2) = \partial\tilde{z}_1 + \partial\tilde{z}_2 = i_{q-1}(a_1) + i_{q-1}(a_2) = i_{q-1}(a_1 + a_2).$$

所以

$$\begin{aligned}\delta_q([z_1] + [z_2]) &= \delta_q([z_1 + z_2]) = [a_1 + a_2] = [a_1] + [a_2] \\ &= \delta_q([z_1]) + \delta_q([z_2])\end{aligned}$$

所以是群同态。

题目 13.6. Prove Thm 4.4.2 by diagram chesing.

Thm 4.4.2: The sequence (LESH) is an exact sequence called the long exact sequence of homology spaces of (X, A) . It is natural w.r.t maps between pairs

$$\begin{array}{ccccccc} (X, A) & \xrightarrow{f} & (Y, B) \\ \text{LESH}(X, A) & \xrightarrow{f} & \text{LESH}(Y, B) \\ \cdots \rightarrow & H_q(A) & \xrightarrow{i_*} & H_q(X) & \xrightarrow{j_*} & H_q(X, A) & \xrightarrow{\delta_q^X} & H_{q-1}(A) \rightarrow \cdots \\ & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ \cdots \rightarrow & H_q(B) & \xrightarrow{i_*} & H_q(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_q(Y, B) & \xrightarrow{\delta_q^Y} & H_{q-1}(B) \rightarrow \cdots \end{array}$$

解答. 第一步, 证明 $\text{Im} i_* = \ker j_*$.

显然 $j_* i_* = (j_{\#} i_{\#})_* = 0$, 所以 $\text{Im} i_* \subset \ker j_*$.

反过来, 取 $[z] \in H_q(X)$, 且 $j_*([z]) = 0$, 这里 $\partial z = 0$, 由 $j_*([z]) = 0$ 可知, 存在 $\bar{u} \in S_{q+1}(X, A)$, 使得 $j_{\#} z = \partial \bar{u}$. 取 $u \in S_{q+1}(X)$, 使得 $j_{\#} u = \bar{u}$, 于是

$$j_{\#} z = \partial j_{\#} u = j_{\#} \partial u$$

从而 $j_{\#}(z - \partial u) = 0$. 所以

$$z - \partial u \in \ker j_{\#} = \text{Im} i_{\#}.$$

所以存在 $a \in S_q(A)$, 使得 $z - \partial u = i_{\#} a$. 所以在 $H_q(X)$ 中, $[z] = [i_{\#} a]$. 故 $[z] \in \text{Im} i_*$, 因此 $\text{Im} i_* = \ker j_*$.

第二步, 证明 $\text{Im} j_* = \ker \delta_q^X$. (简记 $\delta = \delta_q^X$)

若 $[z] \in H_q(X)$, 则 $\partial z = 0$, 所以

$$\delta j_*[z] = \delta[j_{\#} z] = [\partial z] = 0$$

所以 $\text{Im} j_* \subset \ker \delta$.

反过来, 设 $[\bar{z}] \in H_q(X, A)$, 且 $\delta[\bar{z}] = 0$. 取 $z \in S_q(X)$, 使得 $j_{\#}z = \bar{z}$, 由定义

$$\delta[\bar{z}] = [\partial z] = 0 \in H_{q-1}(A)$$

所以存在 $a \in S_q(A)$, 使得 $\partial z = \partial a$, 也就是 $\partial(z - a) = 0$, 因此 $z - a \in Z_q(X)$. 并且

$$j_{\#}(z - a) = j_{\#}z = \bar{z}$$

所以 $[\bar{z}] = j_*[z - a]$, 所以 $\ker \delta \subset \text{Im} j_*$, 因此 $\text{Im} j_* = \ker \delta$.

第三步, 证明 $\text{Im} \delta = \ker i_*$.

先取 $[\bar{z}] \in H_q(X, A)$, 设 $j_{\#}z = \bar{z}$, 则

$$i_*\delta[\bar{z}] = i_*[\partial z].$$

但是 ∂z 在 $S_{q-1}(X)$ 中本来就是边界, 所以 $[\partial z] = 0 \in H_{q-1}(X)$, 所以 $\text{Im} \delta \subset \ker i_*$. 反过来, 取 $[a] \in H_{q-1}(A)$, 且 $i_*[a] = 0$, 这说明在 X 中, a 是边界。因此存在 $z \in S_q(X)$, 使得 $\partial z = i_{\#}a$. 于是

$$\partial(j_{\#}z) = j_{\#}\partial z = j_{\#}i_{\#}a = 0.$$

所以 $j_{\#}z$ 是相对闭链, 且 $\delta[j_{\#}z] = [a]$. 所以 $[a] \in \text{Im} \delta$, 从而 $\text{Im} \delta = \ker i_*$.

综上, 序列是正合列。

题目 13.7. Consider the short exact sequence

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

- 1) if G is abelian, classify G .
- 2) if G is non-abelian, classify G .

解答. 这个短正合列表示 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 可以看成 G 的一个正规子群, 而且

$$\frac{G}{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

所以 G 是一个含有 4 阶循环正规子群的群, 并且商群是 2 阶循环群, 所以

$$|G| = 4 \times 2 = 8$$

而 8 阶群, 且满足商群条件的 G 只可能同构于

$$\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2, D_8, G_8$$

- 1) G 是阿贝尔群, 就会同构于 $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$.
- 2) G 是非阿贝尔群, 就会同构于 D_8, G_8 .

题目 13.8. Let $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow 0$ be a short exact sequence. Show that G is abelian and $G \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

How about $0 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$.

解答. (1) 由短正合列的性质可得 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 可以看成 G 的一个正规子群, 而且

$$\frac{G}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

所以 G 是一个含有 2 阶循环正规子群的群, 并且商群是 3 阶循环群, 且 $|G| = 6$. 六阶群只有两个 S_3 和 $\mathbb{Z}_6$.

$$S_3 = \{e, (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 2)(1, 3), (1, 3)(1, 2)\}$$

S_3 的二阶循环子群只有三个, 但是他们都不是正规的。所以 $G \cong \mathbb{Z}_6$, 且是阿贝尔的。

(2) 这次变成了 G 是一个含有 3 阶循环正规子群的群, 并且商群是 2 阶循环群, 此时 S_3 就有 3 阶正规子群 $\{e, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$ 了。所以 G 同构于 $\mathbb{Z}_6$ 或者是 S_3 .

题目 13.9. Prove if B is free abelian, then the SES

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$$

splits.

解答. 由于 B 是自由的, 设一组基为 $\{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, 那么 B 中的任何元素 b 都可以表示成为

$$b = \sum_{\lambda} n_{\lambda} b_{\lambda}$$

由于 p 是一个满同态, 所以对每个基元素 b_λ , 在 G 中都会找到一个 $\tilde{b}_\lambda$, 使得

$$p(\tilde{b}_\lambda) = b_\lambda$$

于是, 就可以定义 $s: B \rightarrow G$, $s(b_\lambda) = \tilde{b}_\lambda$, 由 p 是一个满同态可知 s 定义良好并且也是一个同态。然后验证 $p \circ s = \text{id}$.

$$p(s(b_\lambda)) = p(\tilde{b}_\lambda) = b_\lambda$$

通过线性组合就知道对任意 $b \in B$, $p \circ s(b) = b$ 。所以短正合列分裂。

题目 13.10. (The Five Lemma) Suppose there is a morphism of exact seqs

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{k} & E & \text{exact} \\ \varphi_1 \downarrow \cong & & \varphi_2 \downarrow \cong & & \varphi_0 \downarrow & & \varphi_3 \downarrow \cong & & \varphi_4 \downarrow \cong & \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{k'} & E' & \text{exact} \end{array}$$

If $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ are isomorphisms. Show that φ_0 is an isomorphism.

解答. 从图表交换可以得到

$$\varphi_2 f = f' \varphi_1, \varphi_0 g = g' \varphi_2, \varphi_3 h = h' \varphi_0, \varphi_4 k = k' \varphi_3.$$

首先证明 φ_0 是单射。

取 $c \in C$, 假设 $\varphi_0(c) = 0$. 由图表交换

$$\varphi_3(h(c)) = h' \varphi_0(c) = h'(0) = 0 \implies h(c) = 0$$

从而 $c \in \ker h$, 由正合性, $c \in \text{Im } g$, 所以存在 $b \in B$, 使得 $g(b) = c$. 从而

$$g'(\varphi_2(b)) = \varphi_0 g(b) = \varphi_0(c) = 0$$

从而 $\varphi_2(b) \in \ker g' = \text{Im } f'$. 所以存在 $a' \in A'$, 使得 $f'(a') = \varphi_2(b)$. 因为 φ_1 是同构, 所以存在 $a \in A$, 使得 $a' = \varphi_1(a)$, 也就是 $f'(\varphi_1(a)) = \varphi_2(b)$. 再由交换性,

$$\varphi_2 f(a) = f' \varphi_1(a) = \varphi_2(b)$$

因为 φ_2 是同构, 所以 $f(a) = b$. 因此,

$$c = g(b) = g(f(a)) = 0$$

这是因为 $\ker g = \text{Im } f$. 所以这就得到了 $\ker \varphi_0 = 0$, 所以 φ_0 是单射。

再证明 φ_0 是满射。

对任意 $c' \in C$, 要找 $c \in C$, 使得 $\varphi_0(c) = c'$. 考虑 $h'(c') \in D'$, 因为 φ_3 是同构, 所以存在 $d \in D$, 使得 $\varphi_3(d) = h'(c')$. 由于交换性,

$$\varphi_4(k(d)) = k'(\varphi_3(d)) = k'(h'(c')) = 0$$

因为 φ_4 是单射, 所以 $k(d) = 0$. 因为 $\text{Im} h = \ker k$, 所以存在 $c_* \in C$, 使得 $h(c_*) = d$, 再由交换性,

$$h'(\varphi_0(c_*)) = \varphi_3 h(c_*) = \varphi_3(d) = h'(c')$$

所以 $\varphi_0(c_*) - c' \in \ker h' = \text{Im} g'$, 也就存在 $b' \in B'$, 使得 $g'(b') = \varphi_0(c_*) - c'$, 因为 φ_2 是满射, 所以存在 $b \in B$, 使得 $\varphi_2(b) = b'$, 再由交换性,

$$\varphi_0(c_*) - c' = g'(b') = g'(\varphi_2(b)) = \varphi_0(g(b))$$

这样, 我就找到了 $c = c_* - g(b)$, 使得 $\varphi_0(c) = c'$. 从而 φ_0 是满射。

所以, φ_0 是同构。

题目 13.11. Let (X, x_0) be a based space. Prove that

$$H_q(X) \cong \begin{cases} H_q(X, x_0), & q > 0 \\ H_0(X, x_0) \oplus \mathbb{Z}, & q = 0 \end{cases}$$

Hence $H_*(X, x_0) \cong \tilde{H}(X)$ is the reduced homology group.

解答. 已知

$$H_q(\{x_0\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}$$

考虑空间对 $(X, \{x_0\})$ 的同调长正合列:

$$\cdots \rightarrow H_q(\{x_0\}) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, \{x_0\}) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(\{x_0\}) \rightarrow H_{q-1}(X) \rightarrow \cdots$$

当 $q > 1$ 时, 长正合列变成

$$\cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, \{x_0\}) \xrightarrow{\partial} 0 \rightarrow H_{q-1}(X) \rightarrow \cdots$$

于是由正合性, $H_q(X) \cong H_q(X, \{x_0\})$ 。

当 $q = 1$ 时,

$$\cdots \rightarrow 0 \xrightarrow{i_*} H_1(X) \xrightarrow{j_*} H_1(X, \{x_0\}) \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \xrightarrow{i'_*} H_0(X) \xrightarrow{j'_*} H_0(X, \{x_0\}) \xrightarrow{\partial'} 0$$

由正合性:

$$\operatorname{Im} i_* = \ker j_* = 0 \implies j_* \text{ 是单射}$$

$$\operatorname{Im} \partial = \ker i'_* = 0 \text{ (这是因为 } i'_* \text{ 把 } [x_0] \text{ 送到 } X \text{ 中所在道路连通分支对应的生成元)}$$

$$\operatorname{Im} j_* = \ker \partial = H_1(X, \{x_0\}) \implies j_* \text{ 是满射}$$

从而得到 j_* 是同构, 所以 $H_1(X) \cong H_1(X, \{x_0\})$.

当 $q = 0$ 时 (这种情况不会, 问的 AI), 长正合列在低维处给出

$$H_0(\{x_0\}) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X, \{x_0\}) \rightarrow 0.$$

同样, i_* 是单射, 得到短正合列

$$0 \rightarrow H_0(\{x_0\}) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X, \{x_0\}) \rightarrow 0.$$

只要能说明这个短正合列分裂, 就能说明 $H_0(X) \cong H_0(X, \{x_0\}) \oplus \mathbb{Z}$.

取增广同态 $\varepsilon: H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, 他把一个 0-维同调类的系数和送到 $\mathbb{Z}$, 显然

$$\varepsilon \circ i_*(n) = \varepsilon(n[x_0]) = n \implies \varepsilon \circ i_* = \operatorname{id}_{\mathbb{Z}}$$

从而短正合列分裂。

所以最终有

$$H_q(X) \cong \begin{cases} H_q(X, x_0), & q > 0 \\ H_0(X, x_0) \oplus \mathbb{Z}, & q = 0 \end{cases}$$

约化同调满足 $\tilde{H}_q(X) \cong H_q(X), q > 0$, 当 $q = 0$ 时, $\tilde{H}_0(X) = \ker(\varepsilon)$, 上面的短正合列说明

$$H_0(X, x_0) \cong H_0(X) / \langle [x_0] \rangle \cong \ker \varepsilon = \tilde{H}_0(X).$$

因此对所有 $q \geq 0$, 都有 $H_q(X, x_0) \cong \tilde{H}_q(X)$.

第十四章 第 15 周拓扑作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 14.1. Show that (S^n, D_+^n, D_-^n) is an exact triple.

解答. $D_+^n \cup D_-^n = S^n$, $D_+^n \cap D_-^n = S^{n-1}$. 只需要证明

$$H_q(D_+^n, S^{n-1}) \cong H_q(S^n, D_-^n)$$

另一边完全同理。

设

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_i^2 = 1\}$$

$$D_+^n = \{x \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}, D_-^n = \{x \in S^n : x_{n+1} \leq 0\}$$

令 $U = \{x \in S^n : x_{n+1} < -\varepsilon\}$. 则 $\bar{U} \subset \text{int} D_-^n$, $(S^n - U, D_-^n - U)$ 是可以形变收缩到 (D_+^n, S^{n-1}) , 所以

$$H_q(S^n - U, D_-^n - U) \cong H_q(D_+^n, S^{n-1}).$$

也就是

$$H_q(D_+^n, S^{n-1}) \cong H_q(S^n, D_-^n).$$

题目 14.2. If $q > 1$, $H_{q-1}(X) \cong H_q(\Sigma X)$, where

$$\Sigma X := \frac{X \times I}{X \times \{0\} \sim (x, 0), X \times \{1\} \sim (x, 1)}$$

is the suspension of X .

解答. 容易发现

$$\Sigma X = C_+X \cup C_-X$$

其中 $C_+X \simeq \{p_+\}$, $C_-X \simeq \{p_-\}$, 是两个锥分别可缩到顶点。且 $C_+X \cap C_-X = X$. 于是对 $(\Sigma X, C_+X, C_-X)$ 使用约化同调的 MA 序列

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_q(X) \rightarrow \tilde{H}_q(C_+X) \oplus \tilde{H}_q(C_-X) \rightarrow \tilde{H}_q(\Sigma X) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(X) \rightarrow \cdots$$

因为可缩, 所以

$$\tilde{H}_q(C_+X) \oplus \tilde{H}_q(C_-X) = 0$$

所以就有

$$\tilde{H}_q(\Sigma X) \cong \tilde{H}_{q-1}(X)$$

因为 $q > 1$, 所以约化同调和普通同调相同, 所以

$$H_q(\Sigma X) \cong H_{q-1}(X)$$

题目 14.3. $H_q(X \vee Y) \cong H_q(X) \oplus H_q(Y)$, if $q > 0$. (X, Y cell complex).

解答. 设楔合点为 p , 取 p 在 X 里的可缩邻域记为 U , 在 Y 中的可缩邻域记为 V , 令

$$A = X \cup V, B = U \cup Y$$

则

$$A \cup B = X \vee Y, A \simeq X, B \simeq Y, A \cap B \simeq \{*\}$$

对 $(X \vee Y, A, B)$ 这个正合三元组使用约化 MV 正合列:

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_q(A \cap B) \rightarrow \tilde{H}_q(A) \oplus \tilde{H}_q(B) \rightarrow \tilde{H}_q(X \vee Y) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

因为 $A \cap B$ 可缩, 所以 $\tilde{H}_q(A \cap B) = \tilde{H}_{q-1}(A \cap B) = 0$. 从而得到

$$\tilde{H}_q(A) \oplus \tilde{H}_q(B) \cong \tilde{H}_q(X \vee Y)$$

当 $q > 0$ 时, 约化同调与普通同调相同, 且由于同伦不变性, 最终就有

$$H_q(X \vee Y) \cong H_q(X) \oplus H_q(Y), \quad q > 0.$$

题目 14.4. (The Barrett-Whithead Thm) Given a commute diagram of abelian gps

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \rightarrow & C_{i+1} & \xrightarrow{h_{i+1}} & A_i & \xrightarrow{f_i} & B_i & \xrightarrow{g_i} & C_i & \xrightarrow{h_i} & A_{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & B_{i-1} & \rightarrow \cdots \\
 & & \downarrow \gamma_{i+1} & & \downarrow \alpha_i & & \downarrow \beta_i & & \downarrow \gamma_i & & \downarrow \alpha_{i-1} & & \downarrow \beta_{i-1} & \\
 \cdots & \rightarrow & C'_{i+1} & \xrightarrow{h'_{i+1}} & A'_i & \xrightarrow{f'_i} & B'_i & \xrightarrow{g'_i} & C'_i & \xrightarrow{h'_i} & A'_{i-1} & \xrightarrow{f'_{i-1}} & B'_{i-1} & \rightarrow \cdots
 \end{array}$$

such that rows are exact. γ_i is $\cong$. Then there is a long exact sequence

$$\cdots \rightarrow A_i \xrightarrow{(f_i, \alpha_i)} B_i \oplus A'_i \xrightarrow{\beta_i - f'_i} B'_i \xrightarrow{h_i \circ \gamma_i^{-1} \circ g'_i} A_{i-1} \rightarrow \cdots$$

解答. 只需证明每一处 $\text{Im} = \ker$. 设

$$u_i = (f_i, \alpha_i), \quad v_i(b, a') = \beta_i(b) - f'_i(a'), \quad \delta_i = h_i \circ \gamma_i^{-1} \circ g'_i$$

1. 在 $B_i \oplus A'_i$. 先有

$$v_i u_i(a) = \beta_i(f_i(a)) - f'_i(\alpha_i(a)) = 0$$

由交换性成立, 所以 $\text{Im} u_i \subset \ker v_i$. 反过来, 设 $(b, a') \in \ker v$, 也就是 $\beta_i(b) - f'_i(a') = 0$, 两边作用 g'_i , 有

$$\gamma_i g_i(b) = g'_i \beta_i(b) = g'_i f'_i(a') = 0.$$

因为 γ_i 是同构, 所以 $g_i(b) = 0$, 由正合性, 存在 $a \in A_i$, 使得 $b = f_i(a)$, 于是

$$f'_i(a' - \alpha_i(a)) = 0$$

由下面的正合性, 存在 $c' \in C'_{i+1}$, 使得 $a' - \alpha_i(a) = h'_{i+1}(c')$. 又因为 γ_{i+1} 是同构, 所以取 $c' = \gamma_{i+1}(c)$, 由交换性, $h'_{i+1} \gamma_{i+1}(c) = \alpha_i h_{i+1}(c)$. 所以

$$\alpha_i h_{i+1}(c) = h'_{i+1}(c') = a' - \alpha_i(a) \implies a' = \alpha_i(h_{i+1}(c) + a)$$

且

$$f_i(a + h_{i+1}(c)) = f_i(a) = b.$$

因此 $(b, a') = u_i(a + h_{i+1}(c))$. 故 $\ker v_i = \text{Im} u_i$.

23 也是类似的。

题目 14.5. Compute $H_*(T^2)$, $H_*(\text{Klein bottle})$.

解答. (1) 把环面看成正方形边的粘合:

$$T^2 = \frac{I^2}{aba^{-1}b^{-1}}$$

他有 0-维生成元 v , 两个 1-维生成元 a, b , 一个 2-维生成元 σ . 所以链群为

$$C_2 = \mathbb{Z}\langle\sigma\rangle, C_1 = \mathbb{Z}\langle a\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b\rangle, C_0 = \mathbb{Z}\langle v\rangle$$

因为 a, b 都是圈, 所以 $\partial_1(a) = 0, \partial_1(b) = 0$. 二位胞腔的边界是

$$\partial_2(\sigma) = a + b - a - b = 0$$

于是链复形为

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

所以

$$H_q(T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & q = 1, \\ \mathbb{Z}, & q = 2, \\ 0, & q > 2. \end{cases}$$

(2) 把 Klein 瓶 K 看成正方形边的粘合:

$$K = \frac{I^2}{aba^{-1}b}$$

同样有

$$C_2 = \mathbb{Z}\langle\sigma\rangle, C_1 = \mathbb{Z}\langle a\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b\rangle, C_0 = \mathbb{Z}\langle v\rangle, \partial_1 = 0$$

但此时二维边界是

$$\partial_2\sigma = a + b - a + b = 2b$$

所以链复形为

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

于是

$$H_2(K) = \frac{\ker \partial_2}{0} = \ker \partial_2 = 0$$

$$H_1(K) = \frac{\ker 0}{\operatorname{Im} \partial_2} = \frac{\mathbb{Z}\langle a \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b \rangle}{\langle 2b \rangle} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

又因为克莱因瓶连通所以可缩, 得到 $H_0(K) = \mathbb{Z}$, 最后

$$H_q(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & q = 1, \\ 0, & q \geq 2. \end{cases}$$

题目 14.6. Suppose $g : S^n \rightarrow S^n$ has no fixed point. Show that $\deg g = (-1)^{n+1}$.

解答. 先证明无不动点映射与对径映射同伦。

设 $a : S^n \rightarrow S^n, a(x) = -x$, 因为 g 没有不动点, 所以可以定义同伦

$$H : S^n \times I \rightarrow S^n, H(x, t) = \frac{(1-t)g(x) + t(-x)}{\|(1-t)g(x) + t(-x)\|}$$

H 是定义良好的连续映射, 从而说明 $g \simeq a$, 所以 $\deg g = \deg a$, a 是 $n+1$ 个坐标反射的复合, 每个反射的映射度都是 -1 , 所以

$$\deg g = \deg a = (-1)^{n+1}.$$

题目 14.7. Let $A \in O(n+1)$, define $f_A : S^n \rightarrow S^n, x \mapsto Ax$. $\deg(f_A) = ?$.

解答. 若 $\det A = 1$, 此时 $A \in SO(n+1)$, 由于 $SO(n+1)$ 是道路连通的, 所以存在连续道路,

$$A_t \in SO(n+1), A_0 = I, A_1 = A$$

定义

$$H : S^n \times I \rightarrow S^n, H(x, t) = A_t x$$

H 是从恒等映射到 f_A 的同伦, 所以 $\deg f_A = \deg(\operatorname{id}_{S^n}) = 1$.

若 $\det A = -1$, 则和上一种情况相同, 不过是需要定义反射矩阵 J , 构造 $B \in O(n+1) \setminus SO(n+1)$ 到 J 的道路, 从而

$$\deg f_A = \deg(-\operatorname{id}_{S^n}) = -1$$