

第1周拓扑作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

2026 年 3 月 9 日

问题 1. 在 1 维欧氏空间 $\mathbb{R}^1$ 中, 对于 $a < b$, 我们有 $(a, b) \in \tau_{\mathbb{R}^1}$, $[a, b), (a, b], [a, b] \notin \tau_{\mathbb{R}^1}$ 。

解答. $[a, b)$ 不是开集, 因为对点 a 来说, 不存在 $\delta > 0$, 使得 $(a - \delta, a + \delta) \subseteq [a, b)$ 。 $(a, b], [a, b]$ 同理。

问题 2. 设 $\mathbb{Q}, \mathbb{W} \subset \mathbb{R}$ 分别为全体有理数和无理数所构成的集合。证明 $\mathbb{Q}, \mathbb{W} \notin \tau_{\mathbb{R}^1}$ 。

解答. 假设 $\mathbb{Q}$ 是开集, 那么任意的 $q \in \mathbb{Q}$, 存在 $\delta > 0, \delta \in \mathbb{R}$, 使得区间 $(q - \delta, q + \delta) \subseteq \mathbb{Q}$ 。但由于无理数是稠密的, 不可能存在一个区间中没有无理数, 因此矛盾! 故 $\mathbb{Q}$ 不是开集, 不属于 $\tau_{\mathbb{R}^1}$ 。因为有理数也是稠密的, 所以无理数的证明同理。

问题 3. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个非常值的连续映射。则有无交并分解

$$\mathbb{R}^n = A^- \sqcup A^0 \sqcup A^+,$$

其中

$$A^- = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) < 0\}; \quad A^0 = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}; \quad A^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > 0\}.$$

证明: $A^-, A^+ \in \tau_{\mathbb{R}^n}$, $A^0 \notin \tau_{\mathbb{R}^n}$ 。

解答. A^- 和 A^+ 的证明基本一样, 所以只证明 A^- 的部分。

先证明 $A^- \in \tau_{\mathbb{R}^n}$ 。任意的 $x \in A^-$, 由 f 的连续保号性可知, 存在 $\delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $(x - \delta, x + \delta)$ 上不会变号, 仍然小于0, 故 $(x - \delta, x + \delta) \subseteq A^-$, 故 A^- 是开集。

再证明 $A^0 \notin \tau_{\mathbb{R}^n}$ 。假设 A^0 是开集。因为 f 是连续映射, $A^0 = f^{-1}(\{0\})$, 所以 A^0 是闭集。所以 A^0 既是开集又是闭集, 矛盾! 故 $A^0 \notin \tau_{\mathbb{R}^n}$ 。

问题 4. 已知度量空间 (X, d) 。证明

- 1) X 中的空集 $\emptyset$ 是 X 的闭子空间。
- 2) 如果 $A_1, \dots, A_n$ 是 X 中的有限个闭子空间, 则它们的并集 $A_1 \cup \dots \cup A_n$ 也是 X 的闭子空间。
- 3) 如果 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$, 是 X 中的一簇闭子空间, 则它们的交集 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 也是 X 的闭子空间。

解答. 1) $\emptyset$ 的补集是 X , 任意的 $x \in X$, x 的邻域仍然是 X 的子集, 所以 X 是开集。开集的补集是闭集, 所以 $\emptyset$ 是闭集。

2) 因为 $A_1, \dots, A_n$ 是 X 中的有限个闭子空间, 所以 $A_1^c, \dots, A_n^c$ 就是 X 中的开子空间。由德摩根定律

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$$

而有限个开集的交仍然是开集, 所以 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 是闭集。

3) 因为 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$, 是 X 中的一簇闭子空间, 所以 A_λ^c 是一簇开子空间, 由德摩根定律

$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

无穷个开集的并仍然是开集, 所以 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 是闭集。

问题 5. 设 A 是度量空间 (X, d) 的一个闭子空间, $x \in X$ 是一个点. 定义

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \in \mathbb{R} | a \in A\}.$$

证明:

- 1) $x \rightarrow d(x, A)$ 是 X 上的连续函数(称为到子集合 A 的距离函数);
- 2) $d(x, A) = 0$ 的充分必要条件是 $x \in A$ 。

解答. 1) 任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \varepsilon$, $d(x, y) < \delta$, 对任意的 $a \in A$,

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

两边取下确界可得

$$d(x, A) - d(y, A) \leq \delta = \varepsilon$$

交换 x, y 的位置, 可得

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \varepsilon$$

所以 $x \rightarrow d(x, A)$ 是 X 上的连续函数。

2) $\Rightarrow$: $d(x, A) = 0$, 说明 $\inf\{d(x, a) \in \mathbb{R} | a \in A\} = 0$, 即任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $a \in A$, 使得 $d(x, a) < \varepsilon$, 所以 x 是集合 A 的极限点。由于 A 是闭集, 所以不存在极限点在集合 A 之外, 故 $x \in A$ 。

$\Leftarrow$: 因为 $x \in A$, 所以 $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \in \mathbb{R} | a \in A\} = d(x, x) = 0$ 。

问题 6. 已知度量空间 (X, d) , (Y, d') 以及集合间的映射 $f: X \rightarrow Y$ 。证明 f 是连续映射的充要条件是, 对于 Y 中的任意一个闭集 $B \subset Y$, $f^{-1}(B)$ 是 X 中的闭集。

解答. 先证明 $\Rightarrow$, 因为 B 是 Y 中的闭集, 所以 $Y \setminus B$ 是开集, 由于 f 是连续映射, 所以 $f^{-1}(Y \setminus B)$ 是开集。因为逆像保运算, 所以 $f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$, 由于 $f^{-1}(Y \setminus B)$, $f^{-1}(Y)$ 都是开集, 所以 $f^{-1}(B)$ 是 X 中的闭集。

再证明 $\Leftarrow$, 对于任意的 $x \in X$, 任意的 $\varepsilon > 0$, $B(f(x), \varepsilon)$ 是 Y 中的开集, 于是 $Y - B(f(x), \varepsilon)$ 是 Y 中的闭集。于是 $f^{-1}(Y - B(f(x), \varepsilon))$ 是 X 中的闭集, 于是 $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ 是 X 中的开集。

存在 $\delta > 0$, $x \in B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, 于是 $f(x) \subseteq (f \circ f^{-1})(B(f(x), \varepsilon)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$, 故 f 是连续的。

问题 7. 设 $\mathbb{Q}^n$ 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中坐标为有理数的点的集合. 证明 $\mathbb{Q}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的稠密子空间.

解答. 要证明 $\mathbb{Q}^n = \mathbb{R}^n$, 只需证明 $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.

首先说明, 集合 $\mathbb{W} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \text{中至少存在一个是无理数}\}$ 是 $\mathbb{Q}^n$ 的导集, 也就是任意 $w \in \mathbb{W}$, 是 $\mathbb{Q}^n$ 的极限点。

$\forall \delta > 0$, 定义 w 的开邻域为 n 维正方体 $C_\delta: (x_1 - \delta, x_1 + \delta) \times \dots \times (x_n - \delta, x_n + \delta)$, 由于有理数的稠密性, 无论 δ 多小, 总会存在 $q_i \in (x_i - \delta, x_i + \delta), i = 1, \dots, n$, 从而每个 C_δ 中都会有 $\mathbb{Q}^n$ 中的点。于是 w 是 $\mathbb{Q}^n$ 的极限点, $\mathbb{W}$ 是 $\mathbb{Q}^n$ 的导集。

于是, $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{Q}^n \cup \mathbb{W} = \mathbb{R}^n$.

问题 8. 已知拓扑空间 (X, τ) 的一个子空间 $A \subseteq X$. 它的边界是

$$\partial A := \overline{A} - \overset{\circ}{A}.$$

证明:

$$(1) \partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$$

$$(2) \partial A = \emptyset \iff A \text{ 既开且闭.}$$

解答. (1) 由于对 $B \subset X$, $X - \overline{B} = (X - B)^\circ$, 令 $B = X - A$, 有 $\overset{\circ}{A} = X - \overline{X - A}$. 所以

$$\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus [X \setminus (\overline{X - A})] = \overline{A} \cap [X \setminus (\overline{X - A})]^c = \overline{A} \cap \overline{X - A}.$$

$$(2) \partial A = \emptyset \iff \overline{A} \text{ 与 } \overline{X - A} \text{ 没有交集.}$$

先证明 A 是闭集。设 $x \in \overline{A}$, 如果 $x \notin A$, 那么 $x \in X - A$, 那么 $x \in \overline{X - A}$, 从而有交集了。矛盾! 所以 A 是闭集。

同理, $X - A$ 是闭集, 所以 A 是开集。

所以 A 既开又闭。

问题 9. 考虑 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的下述两个拓扑:

1) τ_1 : 由距离函数 $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 所规定的拓扑;

2) τ_2 : $\mathbb{R}^n$ 上的余有限拓扑.

证明集合之间的恒同映射 $\text{id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

1) 是一个连续映射: $(\mathbb{R}^n, \tau_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \tau_2)$;

2) 不是一个连续映射: $(\mathbb{R}^n, \tau_2) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \tau_1)$.

解答. 1) τ_1 中的开集就是通常的开集。 τ_2 中的开集 U 要么是 $\emptyset$ ，要么 $\mathbb{R}^n \setminus U$ 是有限集。对任意 $U \in \tau_2$ ，若 $U = \emptyset$ ，则 $\text{id}^{-1}(U) = \emptyset \in \tau_1$ 。若 $U \neq \emptyset$ ，因为 $\mathbb{R}^n \setminus U$ 是有限集，所以 $\text{id}^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$ 也是有限的，在 τ_1 中是闭集，所以其补集是开集。所以恒同映射是连续映射。

2) 取 $U \in \tau_1$ ，使得 $\mathbb{R}^n \setminus U$ 是无限集。于是 $\text{id}^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$ 是无限集，即 $\mathbb{R}^n \setminus \text{id}^{-1}(U)$ 是无限集，所以 $\text{id}^{-1}(U)$ 是闭集。因此 id 不连续。

问题 10. 举例说明，焊接引理中 $A_1, A_2 \subset X$ 是闭子空间的条件不可去。

解答. 设 $X = \mathbb{R}$, $A_1 = (-\infty, 0)$, $A_2 = [0, +\infty)$ ，定义 $f_1 : A_1 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$, $f_2 : A_2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$ ，这样由于 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ，映射限制在空集上自然相等，但是合到一起后在 $\mathbb{R}$ 上不相等。所以条件不可以去掉。