

Hatcher 《Algebraic Topology》

Chapter 2, Section 2.1 严格中文译稿

本稿重新按本地 PDF 的 2.1 节逐段翻译制作。原书图像不裁剪插入，仅在相应位置标记“此处有图”。所有公式均以 $\text{\LaTeX}$ 重写。

2.1 Simplicial and Singular Homology

代数拓扑中最重要的同调理论，也是我们几乎将专门研究的同调理论，称为奇异同调 (singular homology)。由于奇异同调的技术装置稍微复杂，我们将首先引入一个更原始的版本，称为单纯同调 (simplicial homology)，以便在开始一般理论之前，先在较简单的情形中看看这些装置的一部分如何工作。

单纯同调的自然定义域是一类空间，我们称之为 Δ -复形 (Δ -complexes)。它们是比较经典的单纯复形概念的一种温和推广。历史上，奇异同调的现代定义最早由 Eilenberg 在 1944 年给出，而 Δ -复形不久以后由 Eilenberg–Zilber 在 1950 年引入，当时它们被称为半单纯复形 (semisimplicial complexes)。几年之内，这个术语开始被用于 Eilenberg 和 Zilber 所称的完全半单纯复形；后来术语又发生一次变化，后者被称为单纯集合 (simplicial sets)。理论上，这使得“半单纯复形”一词可以恢复其原来的含义；但为了避免潜在混淆，最好引入一个新名称，而 Δ -复形这个名称至少有简短的优点。

Δ -Complexes

环面、射影平面和 Klein 瓶都可以从一个正方形出发，按照下列图中箭头所示的方式识别相对边而得到：

此处有图：原书 p.102 的环面 T 、射影平面 $\mathbb{RP}^2$ 、Klein 瓶 K 的正方形边识别图。

沿一条对角线切开正方形会得到两个三角形，因此这些曲面也都可以由两个三角形通过成对识别其边而构造出来。类似地，任意边数的多边形都可以沿对角线切成三角形，所以事实上所有闭曲面都可以由三角形通过识别边来构造。这样我们就有了一个单一的构造块，即三角形，所有曲面都可以由它构造出来。只用三角形，我们还可以构造一大类严格意义上并非曲面的二维空间，只要允许一次把多于两条边识别在一起。

此处有图：原书 p.102 的多边形三角剖分示意图。

Δ -复形的思想，是把这类构造推广到任意维数。三角形的 n 维类似物是 n -单形 (n -simplex)。它是在某个欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 中包含 $n+1$ 个点 $v_0, \dots, v_n$ 的最小凸集，并且这些点不位于维数小于 n 的超平面中。这里所谓超平面，是指一组线性方程的解集。一个等价条件是差向量

$$v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$$

线性无关。点 v_i 是该单形的顶点，而单形本身记为

$$[v_0, \dots, v_n].$$

此处有图：原书 p.103 的 $\Delta^0, \Delta^1, \Delta^2, \Delta^3$ 示意图。

例如，标准 n -单形为

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i t_i = 1 \text{ 且对所有 } i \text{ 有 } t_i \geq 0 \right\},$$

其顶点是沿坐标轴的单位向量。

为了同调的目的，记录单形顶点的次序将是重要的，所以“ n -单形”实际上将意指“带有顶点排序的 n -单形”。对单形 $[v_0, \dots, v_n]$ 的顶点排序有一个副产品：它按照下标递增的方向确定边 $[v_i, v_j]$ 的取向，如前面两幅图所示。指定顶点的排序还确定从标准 n -单形 Δ^n 到任意另一个 n -单形 $[v_0, \dots, v_n]$ 的一个典范线性同胚，保持顶点次序，即

$$(t_0, \dots, t_n) \mapsto \sum_i t_i v_i.$$

系数 t_i 称为点 $\sum_i t_i v_i$ 在 $[v_0, \dots, v_n]$ 中的重心坐标 (barycentric coordinates)。

如果从一个 n -单形 $[v_0, \dots, v_n]$ 中删去 $n+1$ 个顶点之一，那么剩下的 n 个顶点张成一个 $(n-1)$ -单形，称为 $[v_0, \dots, v_n]$ 的一个面 (face)。我们采用如下约定：

一个面，或者由一部分顶点张成的任意子单形，其顶点总是按照它们在较大单形中的次序排序。

Δ^n 的所有面的并称为 Δ^n 的边界，记作 $\partial\Delta^n$ 。开单形 (open simplex) $\mathring{\Delta}^n$ 是 $\Delta^n - \partial\Delta^n$ ，即 Δ^n 的内部。

空间 X 上的一个 Δ -复形结构是一族映射 $\sigma_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$ ，其中 n 依赖于指标 α ，满足：

- (i) 限制 $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ 是单射，并且 X 的每一点恰好位于一个这样的限制 $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ 的像中。

- (ii) σ_α 到 Δ^n 的任一面的限制是某个映射 $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \rightarrow X$ 。这里我们用保持顶点次序的典范线性同胚，把 Δ^n 的这个面与 Δ^{n-1} 识别起来。
- (iii) 子集 $A \subset X$ 是开集，当且仅当对每个 σ_α ， $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ 在 Δ^n 中开。

除其他事情外，最后一个条件排除了诸如把 X 中所有点都看作单独顶点这类平凡情况。前面把环面、射影平面和 Klein 瓶分解为两个三角形、三条边以及一个或两个顶点的做法，定义了 Δ -复形结构：环面和 Klein 瓶共有六个 σ_α ，射影平面有七个。图中边的取向与每个单形顶点的唯一排序相容，而这些排序决定了映射 σ_α 。

条件 (iii) 的一个推论是， X 可以作为一族互不相交单形 Δ_α^n 的商空间构造出来，每个 $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$ 对应一个单形；商空间通过把每个 Δ_α^n 的面与 Δ_β^{n-1} 识别而得到，其中 Δ_β^{n-1} 对应于 σ_α 在该面上的限制 σ_β ，如条件 (ii) 所述。可以把这个商空间看作归纳构造：从离散顶点集开始，然后贴上边得到一个图，再把 2-单形贴到图上，如此继续。从这个观点看，指定一个 Δ -复形的数据可以纯组合地描述为：对每个 n 给定一族 n -单形 Δ_α^n ，以及把每个 n -单形 Δ_α^n 的每个面指定给某个 $(n-1)$ -单形 Δ_β^{n-1} 的函数。

更一般地， Δ -复形可以从互不相交单形的集合出发，通过识别由顶点子集张成的各类子单形来构造，其中识别使用保持顶点排序的典范线性同胚。前面环面、射影平面或 Klein 瓶上的 Δ -复形结构都可这样得到，即识别两个 2-单形的成对边。如果从一个单独的 2-单形出发，把三条边都按顶点排序给出的取向识别到同一条边上，便得到称为“笨蛋帽” (dunce cap) 的 Δ -复形。相反，如果把一个 2-单形的三条边按三条边的循环取向识别，如右边第一幅图所示，这并不产生 Δ -复形结构；不过若把该 2-单形绕一个中心顶点细分为三个较小的 2-单形，则确实在商空间上得到一个 Δ -复形结构。

此处有图：原书 p.104 的笨蛋帽与循环取向边识别示意图。

把 Δ -复形 X 看作一族互不相交单形的商空间，不难看出 X 必为 Hausdorff 空间。条件 (iii) 于是推出，每个限制 $\sigma_\alpha|_{\Delta^n}$ 是到其像的同胚，因此其像是 X 中的一个开单形。由附录命题 A.2 可知，这些开单形 $\sigma_\alpha(\Delta^n)$ 是 X 上某个 CW 复形结构的胞腔 e_α^n ，而 σ_α 是特征映射。不过我们现在并不需要这个事实。

Simplicial Homology

我们的目标现在是定义 Δ -复形 X 的单纯同调群。令 $\Delta_n(X)$ 为以 X 的开 n -单形 e_α^n 为基的自由阿贝尔群。 $\Delta_n(X)$ 的元素称为 n -链 (n -chains)，可写成有限形式和

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha}^n, \quad n_{\alpha} \in \mathbb{Z}.$$

等价地，我们也可写成 $\sum_{\alpha} n_{\alpha} \sigma_{\alpha}$ ，其中 $\sigma_{\alpha} : \Delta^n \rightarrow X$ 是 e_{α}^n 的特征映射，其像是 e_{α}^n 的闭包，如上所述。这样的和 $\sum_{\alpha} n_{\alpha} \sigma_{\alpha}$ 可看作 X 中 n -单形的一个有限族，或者一条“链”，带有整数重数 n_{α} 。

如下一幅图所示, n -单形 $[v_0, \dots, v_n]$ 的边界由 $(n-1)$ -维单形 $[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]$ 组成, 其中符号 $\widehat{v}_i$ 表示该顶点从序列 $v_0, \dots, v_n$ 中删除。用链的语言, 也许会希望说 $[v_0, \dots, v_n]$ 的边界是由这些面之和组成的 $(n-1)$ -链。然而, 更好的做法是插入某些符号, 而令

$$\partial[v_0, \dots, v_n] = \sum_i (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n].$$

从启发上讲, 插入这些符号是为了考虑取向, 使一个单形的所有面相干地定向, 如下图所示:

此处有图: 原书 p.105 的单形边界取向及三个边界公式图。

在最后一个情形中, 从 3-单形外部看, 两个隐藏面的取向也是逆时针的。

以这个几何直观为动机, 我们对一般 Δ -复形 X 定义边界同态 (boundary homomorphism)

$$\partial_n : \Delta_n(X) \longrightarrow \Delta_{n-1}(X)$$

在基元素上的值为

$$\partial_n(\sigma_\alpha) = \sum_i (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]}.$$

注意右端确实属于 $\Delta_{n-1}(X)$, 因为每个限制 $\sigma_\alpha|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]}$ 是 X 中某个 $(n-1)$ -单形的特征映射。

Lemma (2.1). 复合 $\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}(X)$ 为零。

证明. 设 σ 为 n -单形。由

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]}$$

得到

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}\partial_n(\sigma) &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]} \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n]}. \end{aligned}$$

后两个求和相消, 因为在第二个求和中交换 i 与 j 后, 它变成第一个求和的负。 $\square$

现在得到的代数情形是一列阿贝尔群同态

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

满足 $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ 对每个 n 成立。这样的序列称为链复形 (chain complex)。注意我们在右端补上一个 0, 且 $\partial_0 = 0$ 。由 $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ 可知 $\text{Im } \partial_{n+1} \subset \text{Ker } \partial_n$, 其中 Im 和 Ker 分

别表示像与核。因此我们可以定义这个链复形的第 n 个同调群为商群

$$H_n = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}.$$

$\text{Ker } \partial_n$ 的元素称为闭链 (cycles), $\text{Im } \partial_{n+1}$ 的元素称为边界 (boundaries)。 H_n 的元素是 $\text{Im } \partial_{n+1}$ 的陪集, 称为同调类 (homology classes)。代表同一同调类的两个闭链称为同调的 (homologous), 这意味着它们的差是一个边界。

回到 $C_n = \Delta_n(X)$ 的情形, 同调群 $\text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ 记作 $H_n^\Delta(X)$, 称为 X 的第 n 个单纯同调群。

Example 2.2. 令 $X = S^1$, 带有一个顶点 v 与一条边 e 。则 $\Delta_0(S^1)$ 与 $\Delta_1(S^1)$ 都是 $\mathbb{Z}$, 而边界映射 ∂_1 为零, 因为 $\partial e = v - v = 0$ 。当 $n \geq 2$ 时, 群 $\Delta_n(S^1)$ 为零, 因为没有这些维数的单形。因此

$$H_n^\Delta(S^1) \approx \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 1, \\ 0, & n \geq 2. \end{cases}$$

这说明了一个一般事实: 若链复形中所有边界映射为零, 则该复形的同调群同构于链群本身。

Example 2.3. 令 $X = T$, 为前面图示的带 Δ -复形结构的环面, 它有一个顶点、三条边 a, b, c , 以及两个 2-单形 U, L 。与上例一样, $\partial_1 = 0$, 所以 $H_0^\Delta(T) \approx \mathbb{Z}$ 。因为

$$\partial_2 U = a + b - c = \partial_2 L,$$

并且 $\{a, b, a + b - c\}$ 是 $\Delta_1(T)$ 的一组基, 所以 $H_1^\Delta(T) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, 以同调类 $[a]$ 和 $[b]$ 为基。由于没有 3-单形, $H_2^\Delta(T)$ 等于 $\text{Ker } \partial_2$, 它是由 $U - L$ 生成的无限循环群, 因为

$$\partial(pU + qL) = (p + q)(a + b - c) = 0$$

当且仅当 $p = -q$ 。因此

$$H_n^\Delta(T) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 1, \\ \mathbb{Z}, & n = 0, 2, \\ 0, & n \geq 3. \end{cases}$$

Example 2.4. 令 $X = \mathbb{RP}^2$, 如前所绘, 有两个顶点 v, w , 三条边 a, b, c , 以及两个 2-单形 U, L 。则 $\text{Im } \partial_1$ 由 $w - v$ 生成, 所以 $H_0^\Delta(X) \approx \mathbb{Z}$, 可由任一顶点生成。因为

$$\partial_2 U = -a + b + c, \quad \partial_2 L = a - b + c,$$

可见 ∂_2 是单射, 故 $H_2^\Delta(X) = 0$ 。接着, $\text{Ker } \partial_1 \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, 以 $a - b$ 与 c 为基; 而 $\text{Im } \partial_2$ 是 $\text{Ker } \partial_1$ 中指数为 2 的子群。事实上, 可取 c 与 $a - b + c$ 为 $\text{Ker } \partial_1$ 的基, 而取 $a - b + c$ 与

$$2c = (a - b + c) + (-a + b + c)$$

为 $\text{Im } \partial_2$ 的基。因此 $H_1^\Delta(X) \approx \mathbb{Z}_2$ 。

Example 2.5. 可以通过取两个 Δ^n 的拷贝并经由恒等映射识别它们的边界, 在 S^n 上得到一个 Δ -复形结构。把这两个 n -单形记为 U, L , 显然 $\text{Ker } \partial_n$ 是由 $U - L$ 生成的无限循环群。因此对此 Δ -复形结构有

$$H_n^\Delta(S^n) \approx \mathbb{Z}.$$

计算其他同调群将更加困难。

许多类似的例子, 例如其他闭的可定向曲面和不可定向曲面, 都可以毫无困难地计算。然而, 计算的复杂性确实会迅速增加, 特别是在高维复形中。

一些显然的普遍性问题随之出现: 群 $H_n^\Delta(X)$ 是否与 X 上 Δ -复形结构的选择无关? 换言之, 若两个 Δ -复形同胚, 它们是否有同构的同调群? 更一般地, 若它们仅仅同伦等价, 同调群是否同构? 为了回答这些问题并发展一般理论, 最好离开相当刚性的单纯领域, 转而引入奇异同调群。它们还有一个优点: 它们对所有空间都有定义, 而不仅仅对 Δ -复形定义。在本节末, 当理论发展到一定程度之后, 我们将证明, 对于 Δ -复形, 单纯同调与奇异同调一致。

历史上, 单纯同调是为单纯复形 (simplicial complexes) 定义的。单纯复形是每个单形都由其顶点唯一确定的 Δ -复形。等价地说, 每个 n -单形有 $n + 1$ 个互异顶点, 并且没有另一个 n -单形有同一组顶点。因此一个单纯复形可以纯组合地描述为: 一组顶点 X_0 , 以及对每个 n , 由 X_0 的 $(n + 1)$ -元子集组成的一个集合 X_n 。唯一要求是: 若 X_n 中有一个 n -单形, 则其顶点的每个 $(k + 1)$ -元子集都是 X_k 中的一个 k -单形。从这些组合数据可以构造一个 Δ -复形 X , 只需给顶点 X_0 选定一个偏序, 使其在每个单形的顶点上限制为全序。例如, 取 X_0 上的任意全序即可。单纯复形的优点是可以纯组合地定义, 不涉及拓扑。

Singular Homology

空间 X 中的一个奇异 n -单形 (singular n -simplex) 按定义只是一个映射

$$\sigma : \Delta^n \longrightarrow X.$$

这里使用“奇异”一词, 是为了表达 σ 不必是一个良好的嵌入, 它可以有“奇点”, 使得其像完全不像一个单形。唯一要求是 σ 连续。令 $C_n(X)$ 为以 X 中所有奇异 n -单形之集为基的自由阿贝尔群。 $C_n(X)$ 的元素称为 n -链, 或更准确地称为奇异 n -链, 是有限形式

和

$$\sum_i n_i \sigma_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad \sigma_i : \Delta^n \rightarrow X.$$

边界映射 $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ 由与前面相同的公式定义：

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]}.$$

这个公式中隐含了面 $[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$ 与 Δ^{n-1} 的典范识别，该识别保持顶点次序。因此 $\sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]}$ 被看成一个映射 $\Delta^{n-1} \rightarrow X$ ，即一个奇异 $(n-1)$ -单形。

当不会导致严重歧义时，我们常把从 $C_n(X)$ 到 $C_{n-1}(X)$ 的边界映射 ∂_n 简写为 ∂ 。Lemma 2.1 的证明同样适用于奇异单形，说明

$$\partial_n \partial_{n+1} = 0,$$

或更简洁地说 $\partial^2 = 0$ 。因此可以定义奇异同调群

$$H_n(X) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}.$$

由定义可明显看出，同胚空间有同构的奇异同调群 H_n ，这与 H_n^Δ 的情况形成对比。另一方面，由于群 $C_n(X)$ 非常大， X 中奇异 n -单形的数目通常不可数，因此完全不清楚：对一个只有有限多个单形的 Δ -复形 X ， $H_n(X)$ 是否应对所有 n 都有限生成；也不清楚当 n 大于 X 的维数时， $H_n(X)$ 是否应为零。而这两个性质对 $H_n^\Delta(X)$ 来说都是平凡的。

虽然奇异同调看起来比单纯同调一般得多，它实际上可以通过如下构造看作单纯同调的特殊情形。对任意空间 X ，定义奇异复形 $S(X)$ 为一个 Δ -复形：对每个奇异 n -单形 $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ ，取一个 n -单形 Δ_σ^n ；并以显然方式把 Δ_σ^n 贴到 $S(X)$ 中那些 $(n-1)$ -单形上，这些 $(n-1)$ -单形就是 σ 在 $\partial\Delta^n$ 的各 $(n-1)$ -单形上的限制。由定义清楚可见，对所有 n ， $H_n^\Delta(S(X))$ 与 $H_n(X)$ 完全相同。在这个意义下，奇异同调群 $H_n(X)$ 是单纯同调群的一个特殊情形。可以把 $S(X)$ 看成 X 的一个 Δ -复形模型，尽管相对于 X ，它通常是一个极其庞大的对象。

奇异同调中的闭链是代数地定义的，但它们可以用来自有限 Δ -复形的映射给出一种稍微更几何的解释。为看出这一点，首先注意，奇异 n -链 ξ 总可写成

$$\sum_i \varepsilon_i \sigma_i, \quad \varepsilon_i = \pm 1,$$

并允许奇异 n -单形 σ_i 重复出现。给定这样一个 n -链 $\xi = \sum_i \varepsilon_i \sigma_i$ ，当我们把 $\partial\xi$ 计算成带符号 ± 1 的奇异 $(n-1)$ -单形之和时，可能会有一些抵消对 (canceling pairs)，每一对由两个相同但符号相反的奇异 $(n-1)$ -单形组成。选取一组极大的这种抵消对。然后从互不相交的 n -单形 Δ_i^n (每个 σ_i 对应一个) 出发，构造一个 n -维 Δ -复形 K_ξ ，做法是识

别对应于所选抵消对的那些 $(n-1)$ -维面。于是 σ_i 诱导一个映射

$$K_\xi \longrightarrow X.$$

如果 ξ 是闭链, 那么 K_ξ 的所有 $(n-1)$ -单形都来自抵消对, 因而都是 K_ξ 中恰好两个 n -单形的面。因此, 除一个维数至多为 $n-2$ 的子复形之外, K_ξ 是局部同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的流形。通过计入 σ_i 的符号, K_ξ 的所有 n -单形可以被相容地定向, 所以 K_ξ 在非流形点之外实际上是一个定向流形。更仔细的考察表明, 在 $(n-2)$ -单形内部的点附近, K_ξ 仍是流形, 因此 K_ξ 的非流形点事实上至多为 $n-3$ 维。不过, 在 $(n-3)$ -单形内部附近, 确实可能发生 K_ξ 不是流形的情形。

特别地, $H_1(X)$ 的元素由 X 中的定向闭路族表示, 而 $H_2(X)$ 的元素由闭定向曲面到 X 的映射表示。稍加努力可以证明: 一个定向 1-闭链

$$\bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^1 \longrightarrow X$$

在 $H_1(X)$ 中为零, 当且仅当它可以扩张为一个定向曲面到 X 的映射; 对 2-闭链有类似陈述。在同调论的早期, 人们可能相信, 或至少希望, 这种与流形的紧密联系在所有更高维中继续成立, 但事实证明并非如此。有一种由流形建立的同调理论, 称为配边 (bordism), 但它比我们在这里研究的同调理论复杂得多。

在这些初步说明之后, 我们开始看看关于奇异同调可以证明些什么。

Proposition (2.6). 对应于空间 X 分解为道路连通分支 X_{α} , 有 $H_n(X)$ 与直和 $\bigoplus_{\alpha} H_n(X_{\alpha})$ 的同构。

证明. 因为奇异单形总有道路连通的像, $C_n(X)$ 分裂为其子群 $C_n(X_{\alpha})$ 的直和。边界映射 ∂_n 保持这个直和分解, 把 $C_n(X_{\alpha})$ 送到 $C_{n-1}(X_{\alpha})$, 所以 $\text{Ker } \partial_n$ 和 $\text{Im } \partial_{n+1}$ 也相应地分裂为直和, 从而同调群也分裂:

$$H_n(X) \approx \bigoplus_{\alpha} H_n(X_{\alpha}).$$

□

Proposition (2.7). 如果 X 非空且道路连通, 则 $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$ 。因此, 对任意空间 X , $H_0(X)$ 是若干个 $\mathbb{Z}$ 的直和, 每个道路连通分支贡献一个 $\mathbb{Z}$ 。

证明. 由定义, $H_0(X) = C_0(X)/\text{Im } \partial_1$, 因为 $\partial_0 = 0$ 。定义同态

$$\varepsilon : C_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

为

$$\varepsilon \left(\sum_i n_i \sigma_i \right) = \sum_i n_i.$$

若 X 非空, 这显然是满射。断言是: 若 X 道路连通, 则

$$\text{Ker } \varepsilon = \text{Im } \partial_1,$$

从而 ε 诱导同构 $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$ 。

先注意 $\text{Im } \partial_1 \subset \text{Ker } \varepsilon$ 。若 $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ 是奇异 1-单形, 则

$$\varepsilon \partial_1(\sigma) = \varepsilon(\sigma|_{[v_1]} - \sigma|_{[v_0]}) = 1 - 1 = 0.$$

反过来, 设

$$\varepsilon \left(\sum_i n_i \sigma_i \right) = 0,$$

即 $\sum_i n_i = 0$ 。这些 σ_i 是奇异 0-单形, 也就是 X 中的点。取基点 x_0 , 并为每个 i 选取一条从 x_0 到 $\sigma_i(v_0)$ 的道路 τ_i 。令 σ_0 为像为 x_0 的奇异 0-单形。把 τ_i 看作奇异 1-单形, 即映射 $\tau_i : [v_0, v_1] \rightarrow X$, 则

$$\partial \tau_i = \sigma_i - \sigma_0.$$

于是

$$\partial \left(\sum_i n_i \tau_i \right) = \sum_i n_i \sigma_i - \left(\sum_i n_i \right) \sigma_0 = \sum_i n_i \sigma_i,$$

因为 $\sum_i n_i = 0$ 。所以 $\sum_i n_i \sigma_i$ 是边界, 这证明 $\text{Ker } \varepsilon \subset \text{Im } \partial_1$ 。 $\square$

Proposition (2.8). 如果 X 是一点, 则 $H_n(X) = 0$ 对 $n > 0$ 成立, 而 $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$ 。

证明. 在这种情形中, 对每个 n 有唯一的奇异 n -单形 σ_n , 且

$$\partial(\sigma_n) = \sum_i (-1)^i \sigma_{n-1}.$$

这是 $n+1$ 项之和, 所以当 n 为奇数时为零, 当 n 为偶数时为 σ_{n-1} 。于是我们有链复形

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

边界映射交替为同构与零映射。除 C_0 所在项外, 核恰等于像, 所以 $n > 0$ 时同调群为零。 $\square$

定义同调群的一个约化版本 (reduced homology groups) $\tilde{H}_n(X)$ 常常很方便。它是增广链复形

$$\cdots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

的同调群, 其中

$$\varepsilon \left(\sum_i n_i \sigma_i \right) = \sum_i n_i,$$

如 Proposition 2.7 的证明中那样。这里 $\varepsilon\partial_1 = 0$ ，所以可把 ε 看作一个增广的边界映射，于是这个链复形是良定义的。因为 ε 在 X 非空且道路连通时诱导同构 $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$ ，所以对道路连通的非空 X ， $\tilde{H}_n(X)$ 与 $H_n(X)$ 在 $n > 0$ 时相同，而 $H_0(X) \approx \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ 。更一般地，当 X 非空时也有

$$H_0(X) \approx \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

对于空空间， $\tilde{H}_n(\emptyset) = 0$ 若 $n \neq -1$ ，而 $\tilde{H}_{-1}(\emptyset) \approx \mathbb{Z}$ 。约化同调中的闭链与通常同调相同，但在维数 0 时多要求链的系数和为零；边界在两个理论中相同。

Homotopy Invariance

我们要证明的第一个实质性结果是奇异同调群为同伦不变量。特别地，我们将证明同伦等价的空间有同构的同调群。这将通过说明映射

$$f : X \longrightarrow Y$$

诱导同态

$$f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$$

来完成，并且如果 $f \simeq g$ ，则 $f_* = g_*$ 。

对映射 $f : X \rightarrow Y$ ，定义链同态

$$f_\# : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y)$$

为：对奇异 n -单形 $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ ，令

$$f_\#(\sigma) = f\sigma : \Delta^n \rightarrow Y,$$

再线性延拓：

$$f_\# \left(\sum_i n_i \sigma_i \right) = \sum_i n_i f_\#(\sigma_i) = \sum_i n_i f\sigma_i.$$

映射 $f_\#$ 满足

$$f_\# \partial = \partial f_\#,$$

因为

$$\begin{aligned} f_\# \partial(\sigma) &= f_\# \left(\sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \right) \\ &= \sum_i (-1)^i f\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} = \partial f_\#(\sigma). \end{aligned}$$

因此得到链复形之间的交换图。

Proposition (2.9). 链复形之间的链映射在同调群上诱导同态。

证明. 链映射把闭链送到闭链, 因为它与边界映射交换; 它也把边界送到边界。因此若 $[c] \in H_n$ 是闭链 c 的同调类, 就可定义 $f_*[c] = [f(c)]$ 。如果 c 改变一个边界, 则 $f(c)$ 也改变一个边界, 所以该定义良好。 $\square$

诱导同态有两个基本性质:

- (i) $(fg)_* = f_*g_*$, 对复合映射 $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ 成立。这直接来自链映射的复合。
- (ii) $\text{id}_* = \text{id}$, 其中 id 表示空间或群的恒等映射。

由此若 f 是同胚, 则 f_* 是同构。

Theorem (2.10). 若两个映射 $f, g: X \rightarrow Y$ 同伦, 则它们诱导相同的同态

$$f_* = g_*: H_n(X) \longrightarrow H_n(Y).$$

鉴于形式性质 $(fg)_* = f_*g_*$ 与 $\text{id}_* = \text{id}$, 这立即推出:

Corollary (2.11). 由同伦等价 $f: X \rightarrow Y$ 诱导的映射

$$f_*: H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$$

对所有 n 都是同构。

例如, 若 X 可缩, 则对所有 n 都有

$$\tilde{H}_n(X) = 0.$$

证明. 设 $F: X \times I \rightarrow Y$ 是从 f 到 g 的同伦。证明的关键是把乘积 $\Delta^n \times I$ 剖分成 $n+1$ 个单形。图中给出 $n=1, 2$ 的情形。令

$$\Delta^n \times \{0\} = [v_0, \dots, v_n], \quad \Delta^n \times \{1\} = [w_0, \dots, w_n],$$

其中 v_i 与 w_i 在投影 $\Delta^n \times I \rightarrow \Delta^n$ 下有相同像。

此处有图: 原书 p.112 的 $n=1, 2$ 时 $\Delta^n \times I$ 的棱柱剖分图。

n -单形

$$[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$$

是线性函数 $\varphi_i: \Delta^n \rightarrow I$ 的图像, 其中用重心坐标定义

$$\varphi_i(t_0, \dots, t_n) = t_{i+1} + \dots + t_n.$$

该单形在投影 $\Delta^n \times I \rightarrow \Delta^n$ 下同胚地投到 Δ^n 。 φ_i 的图像位于 φ_{i-1} 的图像下方, 因为

$\varphi_i \leq \varphi_{i-1}$ 。这两个图像之间的区域是单形

$$[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n],$$

它是一个真正的 $(n+1)$ -单形, 因为 w_i 不在 φ_i 的图像上, 因此不在 n -单形

$$[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$$

中。由不等式串

$$0 = \varphi_n \leq \varphi_{n-1} \leq \dots \leq \varphi_0 \leq \varphi_{-1} = 1$$

可知, $\Delta^n \times I$ 是这些 $(n+1)$ -单形

$$[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$$

的并, 且每个单形与下一个单形相交于一个 n -维面。

给定同伦 $F: X \times I \rightarrow Y$, 定义棱柱算子

$$P: C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(Y)$$

为

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]},$$

其中 $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$, 而 $F \circ (\sigma \times \text{id})$ 是复合

$$\Delta^n \times I \longrightarrow X \times I \longrightarrow Y.$$

我们将证明这些棱柱算子满足基本关系

$$\partial P = g_{\#} - f_{\#} - P\partial.$$

几何上, 该式左边表示棱柱的边界, 而右边三项分别表示顶面 $\Delta^n \times \{1\}$ 、底面 $\Delta^n \times \{0\}$ 以及侧面 $\partial\Delta^n \times I$ 。直接计算:

$$\begin{aligned} \partial P(\sigma) &= \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\ &\quad + \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_n]}. \end{aligned}$$

两个求和中 $i = j$ 的项除下列两项外相消:

$$F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[\widehat{v}_0, w_0, \dots, w_n]} = g\sigma = g_{\#}(\sigma),$$

以及

$$-F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_n, \widehat{w}_n]} = -f\sigma = -f_{\#}(\sigma).$$

其余 $i \neq j$ 的项正好等于 $-P\partial(\sigma)$, 因为

$$\begin{aligned} P\partial(\sigma) &= \sum_{i < j} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_n]} \\ &\quad + \sum_{i > j} (-1)^{i-1} (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}. \end{aligned}$$

因此

$$\partial P(\sigma) = g_{\#}(\sigma) - f_{\#}(\sigma) - P\partial(\sigma),$$

也就是

$$\partial P + P\partial = g_{\#} - f_{\#}.$$

现在即可完成定理证明。若 $\alpha \in C_n(X)$ 是闭链, 则

$$g_{\#}(\alpha) - f_{\#}(\alpha) = \partial P(\alpha) + P\partial(\alpha) = \partial P(\alpha),$$

因为 $\partial\alpha = 0$ 。于是 $g_{\#}(\alpha) - f_{\#}(\alpha)$ 是边界, 所以 $g_{\#}(\alpha)$ 与 $f_{\#}(\alpha)$ 决定同一同调类, 即 g_* 与 f_* 在 α 的同调类上相等。□

关系

$$\partial P + P\partial = g_{\#} - f_{\#}$$

用语言表达为: P 是链映射 $f_{\#}$ 与 $g_{\#}$ 之间的链同伦 (chain homotopy)。我们刚刚证明了:

Proposition (2.12). 链同伦的链映射在同调上诱导相同的同态。

约化同调群也有诱导同态

$$f_* : \widetilde{H}_n(X) \longrightarrow \widetilde{H}_n(Y),$$

因为 $f_{\#}\epsilon = \epsilon f_{\#}$ 。上面关于诱导同态证明的性质在约化同调的情形中同样成立, 证明相同。

Exact Sequences and Excision

如果空间 X 、子空间 A 以及商空间 X/A 的同调群之间总有一种简单关系, 那将很好。这样人们就可以期望理解诸如 CW 复形这类空间的同调群, 因为这些空间可以从逐步更复杂的子空间归纳构造出来。也许最简单的可能关系是: $H_n(X)$ 含有 $H_n(A)$ 作为子群, 并且商群 $H_n(X)/H_n(A)$ 同构于 $H_n(X/A)$ 。虽然这在某些情形确实成立, 但如果它一般成立, 同调理论将完全坍塌, 因为每个空间 X 都可以嵌入到一个同调群平凡的空间中, 即锥

$$CX = (X \times I)/(X \times \{0\}),$$

而这个空间是可缩的。

事实表明，要得到在相当一般的范围内有效的关系，这个过于简单的模型不必作太多修改。实际关系的新特征是：它同时涉及所有 n 值的群 $H_n(X)$ 、 $H_n(A)$ 与 $H_n(X/A)$ 。在实际应用中这并不像听起来那样糟，而且还有一个令人愉快的副作用：有时可以用较低维的同调群计算较高维的同调群，而较低维群可能已经通过归纳知道。

为了表述我们所寻找的关系，需要一个在代数拓扑中居于核心地位的代数定义。一系列同态

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

称为正合的 (exact)，如果对每个 n 有

$$\text{Ker } \alpha_n = \text{Im } \alpha_{n+1}.$$

包含 $\text{Im } \alpha_{n+1} \subset \text{Ker } \alpha_n$ 等价于 $\alpha_n \alpha_{n+1} = 0$ ，所以该序列是一个链复形；反向包含 $\text{Ker } \alpha_n \subset \text{Im } \alpha_{n+1}$ 则说这个链复形的同调群平凡。

许多基本代数概念都可以用正合序列表达，例如：

- (i) $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ 正合，当且仅当 $\text{Ker } \alpha = 0$ ，即 α 单射。
- (ii) $A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ 正合，当且仅当 $\text{Im } \alpha = B$ ，即 α 满射。
- (iii) $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ 正合，当且仅当 α 是同构，这由 (i) 与 (ii) 得到。
- (iv) $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ 正合，当且仅当 α 单射， β 满射，且 $\text{Ker } \beta = \text{Im } \alpha$ 。于是 β 诱导同构

$$C \approx B/\text{Im } \alpha.$$

如果把 α 看成把 A 作为 B 的子群包含进去，这可写成 $C \approx B/A$ 。

如 (iv) 中的正合序列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ 称为短正合序列。

正合序列提供了联系空间、子空间以及相应商空间同调群的正确工具：

Theorem (2.13). 如果 X 是空间， A 是一个非空闭子空间，且 A 是 X 中某个邻域的形状收缩核，则存在正合序列

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \tilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

其中 i 是包含 $A \hookrightarrow X$ ，而 j 是商映射 $X \rightarrow X/A$ 。

映射 ∂ 将在证明过程中构造。其思想是：元素 $x \in \tilde{H}_n(X/A)$ 可由 X 中的一条链 α 表示，并且 $\partial\alpha$ 是 A 中的一条闭链；这条闭链的同调类就是

$$\partial x \in \tilde{H}_{n-1}(A).$$

满足定理假设的空间对 (X, A) 称为好对 (good pairs)。例如, 如果 X 是 CW 复形, A 是非空子复形, 那么由附录命题 A.5, (X, A) 是好对。

Corollary (2.14).

$$\tilde{H}_n(S^n) \approx \mathbb{Z}, \quad \tilde{H}_i(S^n) = 0 \quad (i \neq n).$$

证明. 对 $n > 0$, 取 $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$, 于是 $X/A = S^n$ 。该对长正合序列中的项 $\tilde{H}_i(D^n)$ 为零, 因为 D^n 可缩。正合性推出映射

$$\tilde{H}_i(S^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$$

对 $i > 0$ 为同构, 并且 $\tilde{H}_0(S^n) = 0$ 。现在从 S^0 的情形开始对 n 归纳, 结论由 Propositions 2.6 与 2.8 得到。□

作为这个计算的一个应用, 我们得到 Brouwer 的下列经典定理, 其二维情形在 §1.1 中已经证明。

Corollary (2.15). ∂D^n 不是 D^n 的收缩核。因此每个映射 $f : D^n \rightarrow D^n$ 都有不动点。

证明. 如果 $r : D^n \rightarrow \partial D^n$ 是一个收缩, 则对包含映射 $i : \partial D^n \rightarrow D^n$ 有 $ri = \text{id}$ 。于是复合

$$\tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(D^n) \xrightarrow{r_*} \tilde{H}_{n-1}(\partial D^n)$$

是 $\tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) \approx \mathbb{Z}$ 上的恒等映射。但 i_* 与 r_* 都是零, 因为 $\tilde{H}_{n-1}(D^n) = 0$, 矛盾。不动点的陈述如 Theorem 1.9 中那样推出。□

对好对 (X, A) 的同调群正合序列的推导将是一段相当长的故事。事实上我们会推导一个对任意空间对 (X, A) 都成立的更一般正合序列, 只不过把商空间 X/A 的同调群替换为相对同调群, 记为 $H_n(X, A)$ 。这些群在许多其他方面也非常有用。

Relative Homology Groups

有时, 忽略一定量的数据或结构会得到一个更简单、更灵活的理论; 几乎有些悖论的是, 这个理论能够给出在原设定中不易得到的结果。一个熟悉的例子是模 n 算术, 其中忽略 n 的倍数。相对同调是另一个例子。在这里, 被忽略的是给定空间的某个子空间中的所有奇异链。

相对同调群定义如下。给定空间 X 与子空间 $A \subset X$, 令

$$C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A).$$

因此, A 中的链在 $C_n(X, A)$ 中是平凡的。由于边界映射

$$\partial : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$

把 $C_n(A)$ 送到 $C_{n-1}(A)$ ，它诱导商边界映射

$$\partial : C_n(X, A) \longrightarrow C_{n-1}(X, A).$$

令 n 变化，得到边界映射序列

$$\cdots \longrightarrow C_n(X, A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots.$$

关系 $\partial^2 = 0$ 对这些边界映射成立，因为它在通过商群之前已经成立。所以我们有一个链复形，而这个链复形的同调群 $\text{Ker } \partial / \text{Im } \partial$ 按定义就是相对同调群 $H_n(X, A)$ 。考察相对边界映射的定义可知：

$H_n(X, A)$ 的元素由相对闭链表示：这些是 n -链 $\alpha \in C_n(X)$ ，满足 $\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$ 。相对闭链 α 在 $H_n(X, A)$ 中平凡，当且仅当它是一个相对边界：存在 $\beta \in C_{n+1}(X)$ 与 $\gamma \in C_n(A)$ ，使

$$\alpha = \partial\beta + \gamma.$$

这些性质精确表达了直观想法： $H_n(X, A)$ 是“模掉 A 的 X 的同调”。

商群 $C_n(X)/C_n(A)$ 也可以看成 $C_n(X)$ 的一个子群，即以那些像不包含在 A 中的奇异 n -单形 $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ 为基的子群。不过，边界映射通常不把这个 $C_n(X)$ 的子群送到 $C_{n-1}(X)$ 的相应子群中，所以通常最好把 $C_n(X, A)$ 看成商群，而不是 $C_n(X)$ 的子群。

现在的目标是证明，任意空间对 (X, A) 的相对同调群 $H_n(X, A)$ 都嵌入一个长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0.$$

这完全是代数问题。首先考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i} & C_n(X) & \xrightarrow{j} & C_n(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{j} & C_{n-1}(X, A) \longrightarrow 0, \end{array}$$

其中 i 是包含， j 是商映射。由边界映射的定义，该图交换。令 n 变化，并把这些短正合序列竖直排列而非水平排列，就得到一个大的交换图，其列正合，行是链复形，记作 A, B, C 。这样的图称为链复形的短正合序列。

我们将说明，传到同调群后，链复形的短正合序列会拉长成同调群的长正合序列

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \longrightarrow \cdots,$$

其中 $H_n(A)$ 表示链复形 A 中 A_n 处的同调群 $\text{Ker } \partial / \text{Im } \partial$ ， $H_n(B)$ 和 $H_n(C)$ 类似定义。

短正合链复形中方块的交换性意味着 i 与 j 是链映射, 因此诱导同调上的映射 i_* 与 j_* 。为定义边界映射

$$\partial : H_n(C) \longrightarrow H_{n-1}(A),$$

令 $c \in C_n$ 为闭链。因为 j 满射, 有 $c = j(b)$ 对某个 $b \in B_n$ 成立。元素 $\partial b \in B_{n-1}$ 属于 $\text{Ker } j$, 因为

$$j(\partial b) = \partial j(b) = \partial c = 0.$$

所以 $\partial b = i(a)$ 对某个 $a \in A_{n-1}$ 成立, 因为 $\text{Ker } j = \text{Im } i$ 。注意 a 是闭链, 因为

$$i(\partial a) = \partial i(a) = \partial \partial b = 0$$

且 i 单射。定义

$$\partial[c] = [a].$$

这一定义良好。首先, a 由 ∂b 唯一决定, 因为 i 单射。若 b' 是 b 的另一选择, 则 $j(b') = j(b)$, 所以 $b' - b \in \text{Ker } j = \text{Im } i$ 。因此 $b' - b = i(a')$, 即 $b' = b + i(a')$ 。用 $b + i(a')$ 代替 b 的效果, 是把 a 改为同调的元素 $a + \partial a'$, 因为

$$i(a + \partial a') = i(a) + i(\partial a') = \partial b + \partial i(a') = \partial(b + i(a')).$$

若在同调类中改变 c , 则新代表形如 $c + \partial c'$ 。取 $c' = j(b')$, 则

$$c + \partial c' = c + \partial j(b') = c + j(\partial b') = j(b + \partial b'),$$

所以 b 被 $b + \partial b'$ 替换, 这不改变 ∂b , 从而也不改变 a 。同态性也直接成立: 如果 $\partial[c_1] = [a_1]$, $\partial[c_2] = [a_2]$ 分别由 b_1, b_2 给出, 则 $b_1 + b_2$ 给出 $c_1 + c_2$, 且 $a_1 + a_2$ 给出连接同态的值。

Theorem (2.16). 同调群序列

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(B) \longrightarrow \cdots$$

是正合的。

证明. 有六件事需要验证。

$\text{Im } i_* \subset \text{Ker } j_*$: 这立即成立, 因为 $ji = 0$, 所以 $j_*i_* = 0$ 。

$\text{Im } j_* \subset \text{Ker } \partial$: 有 $\partial j_* = 0$, 因为在这种情况下, 在 ∂ 的定义中有 $\partial b = 0$ 。

$\text{Im } \partial \subset \text{Ker } i_*$: 这里 $i_*\partial = 0$, 因为 $i_*\partial$ 把 $[c]$ 送到 $[\partial b] = 0$ 。

$\text{Ker } j_* \subset \text{Im } i_*$: $\text{Ker } j_*$ 中的同调类可由 B_n 中的闭链 b 表示, 且 $j(b)$ 是边界, 于是 $j(b) = \partial c'$ 对某个 $c' \in C_{n+1}$ 成立。由于 j 满射, $c' = j(b')$ 对某个 $b' \in B_{n+1}$ 成立。于是

$$j(b - \partial b') = j(b) - j(\partial b') = j(b) - \partial j(b') = 0,$$

因为 $\partial j(b') = \partial c' = j(b)$ 。所以 $b - \partial b' = i(a)$ 对某个 $a \in A_n$ 成立。这个 a 是闭链，因为

$$i(\partial a) = \partial i(a) = \partial(b - \partial b') = \partial b = 0$$

且 i 单射。因此

$$i_*[a] = [b - \partial b'] = [b],$$

说明 i_* 映到 $\text{Ker } j_*$ 上。

$\text{Ker } \partial \subset \text{Im } j_*$: 使用 ∂ 定义中的记号。若 c 代表 $\text{Ker } \partial$ 中的同调类，则 $a = \partial a'$ 对某个 $a' \in A_n$ 成立。元素 $b - i(a')$ 是闭链，因为

$$\partial(b - i(a')) = \partial b - \partial i(a') = \partial b - i(\partial a') = \partial b - i(a) = 0.$$

并且

$$j(b - i(a')) = j(b) - ji(a') = j(b) = c,$$

所以 j_* 把 $[b - i(a')]$ 送到 $[c]$ 。

$\text{Ker } i_* \subset \text{Im } \partial$: 给定闭链 $a \in A_{n-1}$ ，若 $i(a) = \partial b$ 对某个 $b \in B_n$ 成立，则 $j(b)$ 是闭链，因为

$$\partial j(b) = j(\partial b) = ji(a) = 0.$$

连接同态把 $[j(b)]$ 送到 $[a]$ 。 □

这个定理代表同调代数的开端。其证明方法有时称为图追踪 (diagram chasing)。

回到拓扑，前述代数定理给出同调群的长正合序列：

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow H_0(X, A) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

边界映射 $\partial: H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$ 有非常简单的描述：如果类 $[\alpha] \in H_n(X, A)$ 由相对闭链 α 表示，那么 $\partial[\alpha]$ 就是 $H_{n-1}(A)$ 中闭链 $\partial\alpha$ 的类。这个描述直接来自链复形短正合序列所诱导的同调长正合序列中边界同态的代数定义。

这个长正合序列精确表达了这样的想法：群 $H_n(X, A)$ 衡量 $H_n(X)$ 与 $H_n(A)$ 之间的差异。特别地，正合性说明，如果所有 n 都有 $H_n(X, A) = 0$ ，则由正合性定义后的说明 (iii)，包含 $A \hookrightarrow X$ 诱导所有 $H_n(A) \approx H_n(X)$ 的同构。本节末的一个习题说明逆命题也成立。

当 $A \neq \emptyset$ 时，空间对 (X, A) 还有完全类似的约化同调长正合序列。这来自把前述代数机制应用到如下链复形短正合序列：非负维中为

$$0 \longrightarrow C_n(A) \longrightarrow C_n(X) \longrightarrow C_n(X, A) \longrightarrow 0,$$

而在维数 -1 中用短正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

增广。特别地，这意味着当 $A \neq \emptyset$ 时，对所有 n ， $\tilde{H}_n(X, A)$ 与 $H_n(X, A)$ 相同。

Example 2.17. 在空间对 $(D^n, \partial D^n)$ 的约化同调长正合序列中，映射

$$H_i(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$$

对所有 $i > 0$ 都是同构，因为其余项 $\tilde{H}_i(D^n)$ 对所有 i 都为零。因此得到计算

$$H_i(D^n, \partial D^n) \approx \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Example 2.18. 把约化同调长正合序列应用到空间对 (X, x_0) ，其中 $x_0 \in X$ ，由于 $\tilde{H}_n(x_0) = 0$ 对所有 n 成立，得到同构

$$H_n(X, x_0) \approx \tilde{H}_n(X)$$

对所有 n 成立。

相对同调也有诱导同态，正如非相对，或称“绝对”情形一样。若映射 $f : X \rightarrow Y$ 满足 $f(A) \subset B$ ，也可更简洁地写作 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ，则它诱导同态

$$f_{\#} : C_n(X, A) \longrightarrow C_n(Y, B),$$

因为链映射 $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ 把 $C_n(A)$ 送到 $C_n(B)$ ，所以在商群上得到良定义的映射。关系 $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$ 对相对链成立，因为它对绝对链成立。由 Proposition 2.9 得到诱导同态

$$f_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B).$$

Proposition (2.19). 如果两个映射 $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 通过空间对映射 $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ 同伦，则

$$f_* = g_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B).$$

证明. Theorem 2.10 证明中的棱柱算子 P 把 $C_n(A)$ 送到 $C_{n+1}(B)$ ，因此诱导相对棱柱算子

$$P : C_n(X, A) \longrightarrow C_{n+1}(Y, B).$$

由于只是传到商群，公式

$$\partial P + P\partial = g_{\#} - f_{\#}$$

仍然有效。因此相对链群上的映射 $f_{\#}$ 与 $g_{\#}$ 链同伦，所以它们在相对同调群上诱导相同

同态。 □

空间对 (X, A) 的长正合序列有一个容易的推广，即三元组 (X, A, B) 的长正合序列，其中 $B \subset A \subset X$ ：

$$\cdots \longrightarrow H_n(A, B) \longrightarrow H_n(X, B) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A, B) \longrightarrow \cdots$$

这是由短正合序列

$$0 \longrightarrow C_n(A, B) \longrightarrow C_n(X, B) \longrightarrow C_n(X, A) \longrightarrow 0$$

形成的链复形短正合序列所诱导的同调群长正合序列。例如，取 B 为一点，三元组 (X, A, B) 的长正合序列就变成空间对 (X, A) 的约化同调长正合序列。

Excision

相对同调群的一个基本性质由下列切除定理给出，它描述在何种情况下，相对群 $H_n(X, A)$ 不受删除或切除子集 $Z \subset A$ 的影响。

Theorem (2.20). 给定子空间 $Z \subset A \subset X$ ，使得 Z 的闭包包含在 A 的内部，则包含

$$(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$$

对所有 n 诱导同构

$$H_n(X - Z, A - Z) \longrightarrow H_n(X, A).$$

等价地，如果子空间 $A, B \subset X$ 的内部覆盖 X ，则包含

$$(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$$

对所有 n 诱导同构

$$H_n(B, A \cap B) \longrightarrow H_n(X, A).$$

此处有图：原书 p.119 中 $Z \subset A \subset X$ 的切除示意图。

两个版本之间的转换通过设 $B = X - Z$ 与 $Z = X - B$ 得到。于是 $A \cap B = A - Z$ ，且条件 $\text{cl } Z \subset \text{int } A$ 等价于

$$X = \text{int } A \cup \text{int } B,$$

因为 $X - \text{int } B = \text{cl } Z$ 。

切除定理的证明将涉及一个相当长的技术绕行，即重心重分 (barycentric subdivision) 的构造。它允许用小的奇异单形来计算同调群。在度量空间中，“小”可以用直径来定义；在一般空间中，则要用覆盖来定义。

设 X 是空间, $\mathcal{U} = \{U_j\}$ 是 X 的一族子空间, 且这些子空间的内部构成 X 的一个开覆盖。令 $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ 为 $C_n(X)$ 的子群, 由所有链

$$\sum_i n_i \sigma_i$$

组成, 其中每个 σ_i 的像都包含在覆盖 $\mathcal{U}$ 的某个集合中。边界映射

$$\partial : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$

把 $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ 送到 $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$, 所以群 $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ 构成一个链复形。我们把这个链复形的同调群记为 $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ 。

Proposition (2.21). 包含

$$\iota : C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$$

是链同伦等价。也就是说, 存在链映射

$$\rho : C_n(X) \longrightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$$

使得 $\iota\rho$ 与 $\rho\iota$ 都链同伦于恒等映射。因此, ι 对所有 n 诱导同构

$$H_n^{\mathcal{U}}(X) \approx H_n(X).$$

证明. 重心重分过程将在四个层次上进行, 从最几何的层次开始, 逐渐变得更代数。

(1) 单形的重心重分. 单形 $[v_0, \dots, v_n]$ 的点是线性组合 $\sum_i t_i v_i$, 其中 $\sum_i t_i = 1$, 且每个 $t_i \geq 0$ 。单形 $[v_0, \dots, v_n]$ 的重心, 或 “重心点”, 是重心坐标全部相等的点

$$b = \sum_i t_i v_i, \quad t_i = \frac{1}{n+1}.$$

$[v_0, \dots, v_n]$ 的重心重分是把 $[v_0, \dots, v_n]$ 分解成若干 n -单形

$$[b, w_0, \dots, w_{n-1}],$$

其中按归纳, $[w_0, \dots, w_{n-1}]$ 是某个面 $[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$ 的重心重分中的一个 $(n-1)$ -单形。归纳从 $n=0$ 开始, 这时 $[v_0]$ 的重心重分定义为它本身。

此处有图: 原书 p.120 的 $n=1, 2$ 以及 $n=3$ 部分重心重分图。

由归纳定义可知, $[v_0, \dots, v_n]$ 的重心重分中单形的顶点, 正是 $[v_0, \dots, v_n]$ 的所有 k -维面 $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ 的重心, 其中 $0 \leq k \leq n$ 。当 $k=0$ 时, 这给出原顶点 v_i , 因为 0 -单形的重心就是它自身。面 $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ 的重心, 其重心坐标为: 当 $i = i_0, \dots, i_k$ 时 $t_i = 1/(k+1)$, 其他时候 $t_i = 0$ 。

Δ^n 的重心重分中的 n -单形连同它们的所有面, 确实构成 Δ^n 上的一个 Δ -复形结构, 甚至构成一个单纯复形结构, 不过后文并不需要知道这一点。

我们需要的事实是: $[v_0, \dots, v_n]$ 的重心重分中的每个单形的直径, 至多为 $[v_0, \dots, v_n]$ 的直径的 $n/(n+1)$ 倍。这里单形的直径按定义是它任意两点之间距离的最大值, 而度量来自包含 $[v_0, \dots, v_n]$ 的环境欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 。单形的直径等于其任意两个顶点之间距离的最大值, 因为单形中两点 v 与 $\sum_i t_i v_i$ 的距离满足不等式

$$\left| v - \sum_i t_i v_i \right| = \left| \sum_i t_i (v - v_i) \right| \leq \sum_i t_i |v - v_i| \leq \sum_i t_i \max_i |v - v_i| = \max_i |v - v_i|.$$

为了得到直径比的界 $n/(n+1)$, 只需验证重心重分中某个单形 $[w_0, \dots, w_n]$ 的任意两个顶点 w_j, w_k 的距离至多为原单形直径的 $n/(n+1)$ 倍。若 w_j, w_k 都不是原单形的重心 b , 则它们位于原单形的某个真面中, 由对 n 的归纳即可。于是可假设 w_j 是重心 b , 并由上面的不等式可取 w_k 为某个顶点 v_i 。令 b_i 为面 $[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$ 的重心, 它的重心坐标除 $t_i = 0$ 外都等于 $1/n$ 。于是

$$b = \frac{1}{n+1} v_i + \frac{n}{n+1} b_i.$$

两个系数之和为 1, 所以 b 位于从 v_i 到 b_i 的线段 $[v_i, b_i]$ 上, 并且 b 到 v_i 的距离为线段 $[v_i, b_i]$ 长度的 $n/(n+1)$ 倍。因此, b 到 v_i 的距离被原单形直径的 $n/(n+1)$ 倍所界定。

因子 $n/(n+1)$ 的意义在于, 通过反复重心重分, 可以得到任意小直径的单形, 因为

$$\left(\frac{n}{n+1} \right)^r \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty).$$

这里重要的是, 界 $n/(n+1)$ 与单形的形状无关, 因为反复重心重分会产生许多不同形状的单形。

(2) 线性链的重心重分。 证明的主要部分是构造重分算子

$$S : C_n(X) \longrightarrow C_n(X)$$

并证明它与恒等映射链同伦。我们先在线性情形中构造 S 与链同伦。

设 Y 是某个欧氏空间中的凸集。线性映射 $\Delta^n \rightarrow Y$ 生成 $C_n(Y)$ 的一个子群, 记作 $LC_n(Y)$, 称为线性链。边界映射把 $LC_n(Y)$ 送到 $LC_{n-1}(Y)$, 因此线性链构成 Y 的奇异链复形的一个子复形。一个线性映射 $\lambda : \Delta^n \rightarrow Y$ 可由

$$[w_0, \dots, w_n]$$

唯一指定, 其中 w_i 是 Δ^n 第 i 个顶点在 λ 下的像。为避免对 0-单形作例外处理, 方便

起见增广复形 $LC(Y)$: 令 $LC_{-1}(Y) = \mathbb{Z}$, 由空单形 $[\emptyset]$ 生成, 并令

$$\partial[w_0] = [\emptyset]$$

对所有 0-单形 $[w_0]$ 成立。

每个点 $b \in Y$ 决定同态

$$b : LC_n(Y) \longrightarrow LC_{n+1}(Y),$$

在基元素上定义为

$$b([w_0, \dots, w_n]) = [b, w_0, \dots, w_n].$$

几何上, 这个同态 b 可看作锥算子, 把一个线性链送到以该线性链为底、以点 b 为锥顶的锥。应用通常的边界公式, 得到关系

$$\partial b([w_0, \dots, w_n]) = [w_0, \dots, w_n] - b(\partial[w_0, \dots, w_n]).$$

由线性性,

$$\partial b(\alpha) = \alpha - b(\partial\alpha)$$

对所有 $\alpha \in LC_n(Y)$ 成立。这用代数表达了几何事实: 锥的边界由底加上底的边界上的锥组成。这个关系可重写为

$$\partial b + b\partial = \text{id},$$

所以 b 是增广链复形 $LC(Y)$ 上恒等映射与零映射之间的链同伦。

现在按 n 归纳定义重分同态

$$S : LC_n(Y) \longrightarrow LC_n(Y).$$

令 $\lambda : \Delta^n \rightarrow Y$ 为 $LC_n(Y)$ 的一个生成元, 令 b_λ 为 Δ^n 的重心在 λ 下的像。定义公式为

$$S(\lambda) = b_\lambda(S\partial\lambda),$$

其中 $b_\lambda : LC_{n-1}(Y) \rightarrow LC_n(Y)$ 是前一段定义的锥算子。归纳从

$$S([\emptyset]) = [\emptyset]$$

开始, 所以 S 在 $LC_{-1}(Y)$ 上是恒等。它在 $LC_0(Y)$ 上也是恒等, 因为当 $n = 0$ 时公式给出

$$S([w_0]) = w_0(S\partial[w_0]) = w_0(S[\emptyset]) = w_0([\emptyset]) = [w_0].$$

当 λ 是嵌入且像为真正的 n -单形 $[w_0, \dots, w_n]$ 时, $S(\lambda)$ 是 $[w_0, \dots, w_n]$ 的重心重分中 n -单形的带符号和; 符号可显式计算。将 S 的归纳定义与单形重心重分的归纳定义比较, 即可看出这一点。

检查 S 满足 $\partial S = S\partial$, 从而给出从链复形 $LC(Y)$ 到自身的链映射。由于 $S = \text{id}$ 于 $LC_0(Y)$ 与 $LC_{-1}(Y)$, 在 $LC_0(Y)$ 上显然有 $\partial S = S\partial$ 。对更大的 n , 计算为

$$\begin{aligned}\partial S\lambda &= \partial(b_\lambda(S\partial\lambda)) \\ &= S\partial\lambda - b_\lambda(\partial S\partial\lambda) \quad \text{因为 } \partial b_\lambda + b_\lambda\partial = \text{id} \\ &= S\partial\lambda - b_\lambda(S\partial\partial\lambda) \quad \text{由对 } n \text{ 的归纳} \\ &= S\partial\lambda \quad \text{因为 } \partial\partial = 0.\end{aligned}$$

接着构造 S 与恒等映射之间的链同伦

$$T : LC_n(Y) \longrightarrow LC_{n+1}(Y).$$

定义 T 为: 在 $n = -1$ 上令 $T = 0$, 对 $n \geq 0$ 令

$$T\lambda = b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda).$$

这个公式的几何动机是对 $\Delta^n \times I$ 的一个归纳定义的重分: 把 $\Delta^n \times \{0\} \cup \partial\Delta^n \times I$ 中的所有单形连到 $\Delta^n \times \{1\}$ 的重心, 如 $n = 2$ 的图所示。 T 实际上取这个重分在投影 $\Delta^n \times I \rightarrow \Delta^n$ 下的像。

此处有图: 原书 p.122 中 T 的几何动机图。

链同伦公式

$$\partial T + T\partial = \text{id} - S$$

在 $LC_{-1}(Y)$ 上平凡, 因为 $T = 0$ 、 $S = \text{id}$ 。对 $n \geq 0$, 计算为

$$\begin{aligned}\partial T\lambda &= \partial(b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)) \\ &= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(\partial(\lambda - T\partial\lambda)) \quad \text{因为 } \partial b_\lambda = \text{id} - b_\lambda\partial \\ &= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(S\partial\lambda + T\partial\partial\lambda) \quad \text{由对 } n \text{ 的归纳} \\ &= \lambda - T\partial\lambda - S\lambda,\end{aligned}$$

其中最后一步使用 $\partial\partial = 0$ 与 $S\lambda = b_\lambda(S\partial\lambda)$ 。现在归纳论证结束, 前面只为方便而引入的 $LC_{-1}(Y)$ 可以丢弃; 关系 $\partial T + T\partial = \text{id} - S$ 在不含 $LC_{-1}(Y)$ 时仍成立, 因为 T 在 $LC_{-1}(Y)$ 上为零。

(3) 一般链的重心重分。 对奇异 n -单形 $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$, 定义

$$S\sigma = \sigma_\# S\Delta^n.$$

由于 $S\Delta^n$ 是 Δ^n 的重心重分中各 n -单形的带符号和, $S\sigma$ 就是把 σ 限制到这些 n -单形

上所得到的相应带符号和。算子 S 是链映射，因为

$$\begin{aligned}\partial S\sigma &= \partial\sigma_{\#}S\Delta^n = \sigma_{\#}\partial S\Delta^n = \sigma_{\#}S\partial\Delta^n \\ &= \sigma_{\#}S\left(\sum_i (-1)^i \Delta_i^n\right) = \sum_i (-1)^i \sigma_{\#}S\Delta_i^n \\ &= \sum_i (-1)^i S(\sigma|_{\Delta_i^n}) = S\left(\sum_i (-1)^i \sigma|_{\Delta_i^n}\right) = S(\partial\sigma),\end{aligned}$$

其中 Δ_i^n 是 Δ^n 的第 i 个面。

类似地，定义

$$T : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X), \quad T\sigma = \sigma_{\#}T\Delta^n.$$

它给出 S 与恒等映射之间的链同伦，因为

$$\begin{aligned}\partial T\sigma &= \partial\sigma_{\#}T\Delta^n = \sigma_{\#}\partial T\Delta^n \\ &= \sigma_{\#}(\Delta^n - S\Delta^n - T\partial\Delta^n) \\ &= \sigma - S\sigma - \sigma_{\#}T\partial\Delta^n = \sigma - S\sigma - T(\partial\sigma),\end{aligned}$$

最后一个等式与前一个显示公式中的论证相同，只是把 S 换成 T 。

(4) **迭代重心重分**。id 与迭代 S^m 之间的链同伦由算子

$$D_m = \sum_{0 \leq i < m} TS^i$$

给出，因为

$$\begin{aligned}\partial D_m + D_m\partial &= \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + TS^i\partial) \\ &= \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + T\partial S^i) \\ &= \sum_{0 \leq i < m} (\partial T + T\partial)S^i \\ &= \sum_{0 \leq i < m} (\text{id} - S)S^i = \sum_{0 \leq i < m} (S^i - S^{i+1}) = \text{id} - S^m.\end{aligned}$$

对每个奇异 n -单形 $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ ，存在 m ，使 $S^m(\sigma)$ 落在 $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ 中。原因是：当 m 足够大时， $S^m(\Delta^n)$ 中单形的直径小于开覆盖

$$\{\sigma^{-1}(\text{int } U_j)\}$$

的某个 Lebesgue 数。(回忆：紧度量空间开覆盖的 Lebesgue 数是一个 $\varepsilon > 0$ ，使得每个

直径小于 ε 的集合都包含于覆盖的某个集合中；这样的数由初等紧性论证存在。）不能期望同一个 m 对所有 σ 都适用，因此定义 $m(\sigma)$ 为使 $S^m\sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ 的最小 m 。

定义

$$D : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X), \quad D\sigma = D_{m(\sigma)}\sigma.$$

为判断 D 是否为链同伦，把链同伦公式

$$\partial D_{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma = \sigma - S^{m(\sigma)}\sigma$$

改写成左边为 $\partial D\sigma + D\partial\sigma$ 的形式：把左侧第二项移到右侧，再在两边加上 $D\partial\sigma$ ，得到

$$\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - [S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma)].$$

定义 $\rho(\sigma)$ 为括号中的表达式，则得到

$$\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \rho(\sigma). \quad (*)$$

我们断言 $\rho(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ 。对项 $S^{m(\sigma)}\sigma$ 这显然成立。对剩下的部分 $D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma)$ ，注意若 σ_j 表示 σ 到 Δ^n 第 j 个面的限制，则

$$m(\sigma_j) \leq m(\sigma).$$

因此 $D(\partial\sigma)$ 中的每一项 $TS^i(\sigma_j)$ 都会出现在 $D_{m(\sigma)}(\partial\sigma)$ 中。于是差

$$D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma)$$

是若干项 $TS^i(\sigma_j)$ 的和，其中 $i \geq m(\sigma_j)$ 。这些项属于 $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ ，因为 T 把 $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ 送到 $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ 。

于是可把方程 (*) 看作定义了

$$\rho : C_n(X) \longrightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X).$$

当 n 变化时，这些 ρ 构成链映射，因为 (*) 蕴含

$$\partial\rho(\sigma) = \partial\sigma - \partial D\partial(\sigma) = \rho(\partial\sigma).$$

方程 (*) 说明

$$\partial D + D\partial = \text{id} - \iota\rho,$$

其中 $\iota : C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$ 为包含。此外 $\rho\iota = \text{id}$ ，因为 D 在 $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ 上恒为零：若 $\sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ ，则 $m(\sigma) = 0$ ，定义 $D\sigma$ 的求和为空。于是 ρ 是 ι 的链同伦逆。 $\square$

切除定理的证明. 证明第二个版本, 即分解 $X = A \cup B$ 的情形. 对覆盖 $\mathcal{U} = \{A, B\}$, 引入记号

$$C_n(A + B)$$

表示 $C_n^{\mathcal{U}}(X)$, 也就是 A 中链与 B 中链之和. 在前一个证明末尾有公式

$$\partial D + D\partial = \text{id} - \iota\rho, \quad \rho\iota = \text{id}.$$

这些公式中出现的所有映射都把 A 中的链送到 A 中的链, 所以当我们除去 A 中的链时, 它们诱导商映射. 这些商映射自动满足相同的两个公式, 所以包含

$$C_n(A + B)/C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)/C_n(A)$$

在同调上诱导同构. 由包含诱导的映射

$$C_n(B)/C_n(A \cap B) \longrightarrow C_n(A + B)/C_n(A)$$

显然是同构, 因为两个商群都以 B 中但不在 A 中的奇异 n -单形为基自由生成. 因此得到所需的由包含诱导的同构

$$H_n(B, A \cap B) \approx H_n(X, A).$$

Theorem 2.13 的证明中剩下的全部事情, 是把相对同调群换成绝对同调群. 这由下列结果实现.

Proposition (2.22). 对好对 (X, A) , 商映射

$$q : (X, A) \longrightarrow (X/A, A/A)$$

对所有 n 诱导同构

$$q_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X/A, A/A) \approx \tilde{H}_n(X/A).$$

证明. 令 V 是 A 在 X 中的一个邻域, 并且 V 形变收缩到 A . 我们有一个交换图. 左上水平映射是同构, 因为在三元组 (X, V, A) 的长正合序列中, 群 $H_n(V, A)$ 对所有 n 都为零: V 到 A 的形变收缩给出空间对的同伦等价

$$(V, A) \simeq (A, A),$$

而 $H_n(A, A) = 0$. V 到 A 的形变收缩诱导 V/A 到 A/A 的形变收缩, 所以同样的论证说明左下水平映射也是同构. 另两个水平映射直接由切除得到同构. 右侧垂直映射 q_* 是同构, 因为 q 在 A 的补集上限制为同胚. 由图的交换性可知, 左侧的 q_* 也是同构. $\square$

这个命题说明, 对于好对 (X, A) , 相对同调可以表示为约化绝对同调; 但事实上对

任意对也有一种这样做的方法。考虑空间 $X \cup CA$, 其中

$$CA = (A \times I)/(A \times \{0\})$$

是锥, 其底 $A \times \{1\}$ 与 $A \subset X$ 识别。用第 0 章引入的术语, $X \cup CA$ 也可描述为包含 $A \hookrightarrow X$ 的映射锥。

此处有图: 原书 p.125 的 $X \cup CA$ 映射锥图。

断言是: 对所有 n , $H_n(X, A)$ 与 $\tilde{H}_n(X \cup CA)$ 同构, 经由同构列

$$\tilde{H}_n(X \cup CA) \approx H_n(X \cup CA, CA) \approx H_n(X \cup CA - \{p\}, CA - \{p\}) \approx H_n(X, A),$$

其中 $p \in CA$ 是锥顶。第一个同构来自空间对的正合序列, 使用 CA 可缩的事实。第二个同构是切除, 第三个来自 $CA - \{p\}$ 到 A 的形变收缩。

下面是前一命题的一个应用:

Example 2.23. 我们来找出代表无限循环群 $H_n(D^n, \partial D^n)$ 与 $\tilde{H}_n(S^n)$ 的生成元的显式闭链。把 $(D^n, \partial D^n)$ 换成等价的对 $(\Delta^n, \partial \Delta^n)$ 。我们将对 n 归纳证明: 恒等映射

$$i_n : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$$

看作奇异 n -单形时, 是生成 $H_n(\Delta^n, \partial \Delta^n)$ 的闭链。它是闭链是显然的, 因为我们考虑的是相对同调。当 $n = 0$ 时, 它当然代表一个生成元。

对归纳步, 令 $\Lambda \subset \Delta^n$ 为 Δ^n 的所有但一个 $(n-1)$ -维面的并。于是我们断言存在同构

$$H_n(\Delta^n, \partial \Delta^n) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\partial \Delta^n, \Lambda) \xleftarrow{\cong} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial \Delta^{n-1}).$$

第一个同构是三元组 $(\Delta^n, \partial \Delta^n, \Lambda)$ 的长正合序列中的边界映射, 其第三项 $H_i(\Delta^n, \Lambda)$ 为零, 因为 Δ^n 形变收缩到 Λ , 所以

$$(\Delta^n, \Lambda) \simeq (\Lambda, \Lambda).$$

第二个同构来自前一个命题, 因为我们处理的是好对, 并且作为不包含在 Λ 中的那个面, 包含

$$\Delta^{n-1} \hookrightarrow \partial \Delta^n$$

诱导商空间同胚

$$\Delta^{n-1}/\partial \Delta^{n-1} \approx \partial \Delta^n/\Lambda.$$

归纳步随之成立, 因为闭链 i_n 在第一个同构下被送到闭链 ∂i_n , 而它在 $C_{n-1}(\partial \Delta^n, \Lambda)$ 中等于 $\pm i_{n-1}$ 。

为找出生成 $\tilde{H}_n(S^n)$ 的闭链, 把 S^n 看作两个 n -单形 Δ_1^n 、 Δ_2^n , 它们的边界按显然

方式识别, 并保持顶点排序。差

$$\Delta_1^n - \Delta_2^n$$

看作奇异 n -链时是闭链; 若 $n > 0$, 则它代表无限循环群 $\tilde{H}_n(S^n)$ 的一个生成元。为看出这一点, 考虑同构

$$\tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{\cong} H_n(S^n, \Delta_2^n) \xleftarrow{\cong} H_n(\Delta_1^n, \partial\Delta_1^n).$$

第一个同构来自空间对 (S^n, Δ_2^n) 的长正合序列, 第二个同构如前通过商空间说明。在这些同构下, 第一群中的闭链 $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ 对应第三群中的闭链 Δ_1^n , 而后者如上所见代表这个群的生成元, 所以 $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ 代表 $\tilde{H}_n(S^n)$ 的生成元。

前面的命题还推出切除性质对 CW 复形的子复形也成立:

Corollary (2.24). 如果 CW 复形 X 是子复形 A 与 B 的并, 则包含

$$(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$$

对所有 n 诱导同构

$$H_n(B, A \cap B) \longrightarrow H_n(X, A).$$

证明. 由于 CW 对是好对, Proposition 2.22 允许我们传到商空间

$$B/(A \cap B) \quad \text{与} \quad X/A,$$

这两个空间同胚, 假设不处在平凡情形 $A \cap B = \emptyset$ 中。 □

下面是前一命题的另一个应用:

Corollary (2.25). 对楔和 $\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$, 包含

$$i_{\alpha} : X_{\alpha} \hookrightarrow \bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$$

诱导同构

$$\bigoplus_{\alpha} i_{\alpha*} : \bigoplus_{\alpha} \tilde{H}_n(X_{\alpha}) \longrightarrow \tilde{H}_n\left(\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}\right),$$

前提是楔和在基点 $x_{\alpha} \in X_{\alpha}$ 处形成, 并且对 (X_{α}, x_{α}) 都是好对。

证明. 因为约化同调等同于相对于基点的同调, 这由前一命题取

$$(X, A) = \left(\coprod_{\alpha} X_{\alpha}, \coprod_{\alpha} \{x_{\alpha}\} \right)$$

得到。 □

下面是我们已经发展出的工具的一个应用，即 Brouwer 在约 1910 年得到的经典结果，称为“维数不变性” (invariance of dimension)。它特别说明，当 $m \neq n$ 时， $\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^n$ 不同胚。

Theorem (2.26). 如果非空开集 $U \subset \mathbb{R}^m$ 与 $V \subset \mathbb{R}^n$ 同胚，则 $m = n$ 。

证明. 对 $x \in U$ ，由切除有

$$H_k(U, U - \{x\}) \approx H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\}).$$

由空间对 $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\})$ 的长正合序列，得到

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\}) \approx \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^m - \{x\}).$$

由于 $\mathbb{R}^m - \{x\}$ 形变收缩到球面 S^{m-1} ，可知 $H_k(U, U - \{x\})$ 在 $k = m$ 时为 $\mathbb{Z}$ ，其余情形为零。同理， $H_k(V, V - \{y\})$ 在 $k = n$ 时为 $\mathbb{Z}$ ，其余情形为零。若 $h: U \rightarrow V$ 是同胚，则它诱导所有 k 的同构

$$H_k(U, U - \{x\}) \longrightarrow H_k(V, V - \{h(x)\}),$$

所以必须有 $m = n$ 。 □

推广这个证明的思想，空间 X 在点 $x \in X$ 处的局部同调群定义为

$$H_n(X, X - \{x\}).$$

对 x 的任意开邻域 U ，切除给出同构

$$H_n(X, X - \{x\}) \approx H_n(U, U - \{x\}),$$

所以这些群只依赖于 X 在 x 附近的局部拓扑。同胚 $f: X \rightarrow Y$ 必须对所有 x, n 诱导同构

$$H_n(X, X - \{x\}) \approx H_n(Y, Y - \{f(x)\}),$$

因此这些局部同调群可用于判断某些空间在某些点处不是局部同胚的，如前述证明所示。习题给出更多例子。

Naturality

我们已经构造的这些正合序列还有一个附加性质，它将在以后许多论证的关键处变得重要，尽管乍看起来这个性质似乎只是一种无趣的技术细节。我们现在讨论这个性质，而不是在以后需要它时打断论证去检查它；不过读者也可以把这一讨论的细读推迟到以后。

这个性质称为自然性 (naturality)。例如, 说空间对的长正合序列是自然的, 意思是对于映射

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B),$$

图

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ \cdots & \rightarrow & H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y, B) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(B) \rightarrow \cdots \end{array}$$

是交换的。涉及 i_* 和 j_* 的方块的交换性, 来自相应链群方块的显然交换性, 只需把 H_n 换成 C_n 。对于另一个方块, 在定义诱导同态时我们已经看到, 在链层次上

$$f_{\#}\partial = \partial f_{\#}.$$

于是, 若 $[\alpha] \in H_n(X, A)$ 是由相对闭链 α 表示的类, 则

$$f_*\partial[\alpha] = f_*[\partial\alpha] = [f_{\#}\partial\alpha] = [\partial f_{\#}\alpha] = \partial[f_{\#}\alpha] = \partial f_*[\alpha].$$

也可以诉诸一个一般的代数事实: 与链复形的短正合列相伴随的同调群长正合序列是自然的。也就是说, 对链复形短正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A_n & \xrightarrow{i} & B_n & \xrightarrow{j} & C_n \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ 0 & \rightarrow & A'_n & \xrightarrow{i'} & B'_n & \xrightarrow{j'} & C'_n \rightarrow 0, \end{array}$$

其中所有次数的边界映射也与 α, β, γ 交换, 则诱导出的图

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(B) & \xrightarrow{j_*} & H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \\ & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* \\ \cdots & \rightarrow & H_n(A') & \xrightarrow{i'_*} & H_n(B') & \xrightarrow{j'_*} & H_n(C') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A') \rightarrow \cdots \end{array}$$

是交换的。前两个方块的交换性是显然的, 因为 $\beta i = i' \alpha$ 蕴含 $\beta_* i_* = i'_* \alpha_*$, 而 $\gamma j = j' \beta$ 蕴含 $\gamma_* j_* = j'_* \beta_*$ 。对于第三个方块, 回忆映射 $\partial : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ 是这样定义的: 若 $c = j(b)$ 且 $i(a) = \partial b$, 则 $\partial[c] = [a]$ 。于是

$$\partial[\gamma(c)] = [\alpha(a)],$$

因为 $\gamma(c) = \gamma j(b) = j'(\beta(b))$, 并且

$$i'(\alpha(a)) = \beta i(a) = \beta \partial(b) = \partial \beta(b).$$

因此

$$\partial \gamma_*[c] = \alpha_*[a] = \alpha_* \partial[c].$$

这个代数事实也蕴含三元组的长正合序列以及空间对的约化同调长正合序列的自然性。

最后，还有 Theorem 2.13 中长正合序列的自然性，也就是下图的交换性：

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \rightarrow & \tilde{H}_n(A) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_n(X) & \xrightarrow{q_*} & \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \\
 & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow f_* \\
 \cdots & \rightarrow & \tilde{H}_n(B) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_n(Y) & \xrightarrow{q_*} & \tilde{H}_n(Y/B) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(B) \rightarrow \cdots
 \end{array}$$

这里 i 和 q 分别表示包含映射和商映射， $\bar{f}: X/A \rightarrow Y/B$ 由 f 诱导。前两个方块交换，因为 $fi = if$ 且 $\bar{f}q = qf$ 。第三个方块展开为

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tilde{H}_n(X/A) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X/A, A/A) & \xleftarrow[\approx]{q_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(A) \\
 \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
 \tilde{H}_n(Y/B) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y/B, B/B) & \xleftarrow[\approx]{q_*} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(B).
 \end{array}$$

我们已经证明了第一个和第三个方块交换，而第二个方块交换是因为 $\bar{f}q = qf$ 。

The Equivalence of Simplicial and Singular Homology

我们可以利用前面的结果证明， Δ -复形的单纯同调群与奇异同调群总是同构的。为证明方便，也考虑相对情形：令 X 为一个 Δ -复形， $A \subset X$ 为一个子复形。因此 A 是由 X 的某些单形的并所形成的 Δ -复形。相对群 $H_n^\Delta(X, A)$ 可以像奇异同调那样定义，借助相对链

$$\Delta_n(X, A) = \Delta_n(X) / \Delta_n(A),$$

并且由与奇异同调相同的代数论证，可得到空间对 (X, A) 的单纯同调长正合序列。存在一个典范同态

$$H_n^\Delta(X, A) \longrightarrow H_n(X, A),$$

它由链映射

$$\Delta_n(X, A) \longrightarrow C_n(X, A)$$

诱导；该链映射把 X 的每个 n -单形送到它的特征映射 $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ 。这里不排除 $A = \emptyset$ 的情形，此时相对群化为绝对群。

Theorem (2.27). 同态

$$H_n^\Delta(X, A) \longrightarrow H_n(X, A)$$

对于所有 n 以及所有 Δ -复形对 (X, A) 都是同构。

证明. 先处理 X 有限维且 A 为空的情形。令 X^k 为 X 的 k -骨架，即由所有维数不超过

k 的单形组成的子空间。我们有如下正合序列的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \rightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \rightarrow & H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_n(X^{k-1}) & \rightarrow & H_n(X^k) & \rightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_{n-1}(X^{k-1}). \end{array}$$

先证明第一个和第四个垂直映射对所有 n 都是同构。单纯链群 $\Delta_n(X^k, X^{k-1})$ 在 $n \neq k$ 时为零，在 $n = k$ 时是以 X 的 k -单形为基的自由阿贝尔群。因此 $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$ 有完全相同的描述。相应的奇异同调群 $H_n(X^k, X^{k-1})$ 可以通过映射

$$\Phi : \coprod_{\alpha} (\Delta_{\alpha}^k, \partial \Delta_{\alpha}^k) \longrightarrow (X^k, X^{k-1})$$

来计算，其中 Φ 由 X 的所有 k -单形的特征映射 $\Delta^k \rightarrow X$ 组成。由于 Φ 诱导商空间的同胚

$$\coprod_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k / \coprod_{\alpha} \partial \Delta_{\alpha}^k \approx X^k / X^{k-1},$$

它在所有奇异同调群上诱导同构。因此， $H_n(X^k, X^{k-1})$ 在 $n \neq k$ 时为零，而在 $n = k$ 时是自由阿贝尔群，其基由所有 k -单形的特征映射给出的相对闭链表示；这里用到 Example 2.23 中已经证明的事实： $H_k(\Delta^k, \partial \Delta^k)$ 由恒等映射 $\Delta^k \rightarrow \Delta^k$ 生成。于是映射

$$H_k^\Delta(X^k, X^{k-1}) \longrightarrow H_k(X^k, X^{k-1})$$

是同构。

由对 k 的归纳，我们可以假设上面图中的第二个和第五个垂直映射也是同构。下面这个常被引用的基本代数引理便推出中间的垂直映射是同构，从而在 X 有限维且 $A = \emptyset$ 的情形完成证明。

The Five-Lemma. 在如下阿贝尔群交换图中，

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{\ell} & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{\ell'} & E' \end{array}$$

若两行正合，且 $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ 都是同构，则 γ 也是同构。

证明：只需证明：

- (a) 若 β, δ 满且 ϵ 单，则 γ 满；
- (b) 若 β, δ 单且 α 满，则 γ 单。

这两个陈述的证明都是直接的追图。论证实上并没有多少选择；读者现在合上书，自己重构证明，会是一个很好的练习。

为证明 (a), 取 $c' \in C'$ 。因为 δ 满, 存在 $d \in D$ 使得 $k'(c') = \delta(d)$ 。由于 ϵ 单且

$$\epsilon \ell(d) = \ell' \delta(d) = \ell' k'(c') = 0,$$

可得 $\ell(d) = 0$ 。由上一行正合, $d = k(c)$ 对某个 $c \in C$ 成立。差 $c' - \gamma(c)$ 在 k' 下映为零, 因为

$$k'(c') - k'\gamma(c) = k'(c') - \delta k(c) = k'(c') - \delta(d) = 0.$$

所以由正合性有 $c' - \gamma(c) = j'(b')$, 其中 $b' \in B'$ 。因为 β 满, 有 $b' = \beta(b)$, 其中 $b \in B$ 。于是

$$\gamma(c + j(b)) = \gamma(c) + \gamma j(b) = \gamma(c) + j'\beta(b) = \gamma(c) + j'(b') = c',$$

这说明 γ 满。

为证明 (b), 设 $\gamma(c) = 0$ 。因为 δ 单, 由

$$\delta k(c) = k'\gamma(c) = 0$$

推出 $k(c) = 0$, 故 $c = j(b)$, 其中 $b \in B$ 。元素 $\beta(b)$ 满足

$$j'\beta(b) = \gamma j(b) = \gamma(c) = 0,$$

因此 $\beta(b) = i'(a')$, 其中 $a' \in A'$ 。因为 α 满, $a' = \alpha(a)$, 其中 $a \in A$ 。由于 β 单,

$$\beta(i(a) - b) = \beta i(a) - \beta(b) = i'\alpha(a) - \beta(b) = i'(a') - \beta(b) = 0$$

蕴含 $i(a) - b = 0$ 。于是 $b = i(a)$, 从而

$$c = j(b) = ji(a) = 0,$$

因为 $ji = 0$ 。这说明 γ 的核平凡。

回到定理的证明。接下来考虑 X 无限维的情形。我们将使用如下事实: X 中的紧集只能与有限多个 X 的开单形相交, 这里开单形指删去其所有真面后的单形。这是 CW 复形的一个一般事实, 在附录中证明; 不过对 Δ -复形这里有一个直接证明。若紧集 C 与无限多个开单形相交, 则它包含一个无穷点列 x_i , 每个 x_i 位于不同的开单形中。那么集合

$$U_i = X - \bigcup_{j \neq i} \{x_j\}$$

构成 C 的一个没有有限子覆盖的开覆盖; 这些集合是开的, 因为它们在所有单形特征映射下的原像显然是开的。

这可以用来说明映射

$$H_n^\Delta(X) \longrightarrow H_n(X)$$

是满的。取 $H_n(X)$ 中的任意元素, 由奇异 n -闭链 z 表示。这个闭链是有限多个奇异单

形的线性组合，这些单形的像是紧的，因而只与 X 的有限多个开单形相交，所以包含在某个 X^k 中。我们已经证明 $H_n^\Delta(X^k) \rightarrow H_n(X^k)$ 是同构，特别是满的。因此 z 在 X^k 中、从而在 X 中同调于一个单纯闭链。这给出满性。单性也类似：若一个单纯 n -闭链 z 是 X 中某个奇异链的边界，则该链的像紧，因此必定位于某个 X^k 中，于是 z 表示 $H_n^\Delta(X^k) \rightarrow H_n(X^k)$ 的核中的一个元素。但我们知道这个映射是单的，所以 z 在 X^k 中是一个单纯边界，从而在 X 中也是。

剩下的是任意 X 且 $A \neq \emptyset$ 的情形。这由绝对情形推出：把单纯同调的空间对长正合序列到相应的奇异同调长正合序列的典范映射作为五引理的输入即可。□

由这个定理可以推出：只要 X 是一个仅有有限多个 n -单形的 Δ -复形， $H_n(X)$ 就是有限生成的。因为在这种情形下，单纯链群 $\Delta_n(X)$ 是有限生成的，因而它的闭链子群也是有限生成的，后者的商 $H_n^\Delta(X)$ 也有限生成。若把 $H_n(X)$ 写成循环群的直和，则 $\mathbb{Z}$ 直和项的个数传统上称为 X 的第 n 个 Betti 数；指定有限循环直和项阶数的整数称为扭转系数 (torsion coefficients)。

一个有趣的历史事实是，同调最初并不是被看作一系列群，而是被看作 Betti 数和扭转系数。毕竟，人们可以从单纯边界映射计算 Betti 数和扭转系数，而不必实际提到同调群。自 Poincaré 在约 1900 年开始认真研究同调起，直到 1920 年代更抽象的群的观点进入图景之前，这种把同调看作数字而非群的计算观点一直占主导地位。在这一时期，“同调”主要意味着“单纯同调”；又过了 20 年，向奇异同调的转变才完成。奇异同调的最终定义只是在 Eilenberg 于 1944 年的一篇论文中出现的，此前有不少人的贡献，尤其是 Alexander 和 Lefschetz。随后几年内，我们已经介绍的同调理论的其余基本结构逐渐成形，第一部定本式处理出现在经典著作 [Eilenberg & Steenrod 1952] 中。

Exercises

1. 把一个 2-单形 $[v_0, v_1, v_2]$ 的边 $[v_0, v_1]$ 与 $[v_1, v_2]$ 按保持顶点次序的方式识别，所得商 Δ -复形是什么熟悉的空间？
2. 证明：从 Δ^3 出发，作边识别

$$[v_0, v_1] \sim [v_1, v_3], \quad [v_0, v_2] \sim [v_2, v_3],$$

所得 Δ -复形形变收缩到 Klein 瓶。再找出其他边的成对识别，使所得 Δ -复形分别形变收缩到环面、2-球面和 $\mathbb{RP}^2$ 。

3. 把 $\mathbb{RP}^n$ 构造为 S^n 上一个 Δ -复形结构的商，从而给出 $\mathbb{RP}^n$ 的 Δ -复形结构。这里 S^n 的 Δ -复形结构的顶点取为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中每条坐标轴上长度为 1 的两个向量。
4. 计算“三角降落伞”的单纯同调群；它由 Δ^2 将三个顶点识别为单个点而得到。
5. 使用本节开头描述的 Δ -复形结构计算 Klein 瓶的单纯同调群。
6. 计算如下 Δ -复形的单纯同调群：它由 $n+1$ 个 2-单形

$$\Delta_0^2, \dots, \Delta_n^2$$

构成, 其中把 Δ_0^2 的三条边全都识别为一条边; 对 $i > 0$, 把 Δ_i^2 的边 $[v_0, v_1]$ 与 $[v_1, v_2]$ 识别为一条边, 并把边 $[v_0, v_2]$ 识别到 Δ_{i-1}^2 的边 $[v_0, v_1]$ 上。

7. 找出一种把 Δ^3 的面成对识别的方法, 得到 S^3 上只有一个 3-单形的 Δ -复形结构, 并计算这个 Δ -复形的单纯同调群。
8. 从 n 个四面体 $T_1, \dots, T_n$ 构造一个 3 维 Δ -复形 X , 过程如下。先把这些四面体按图中方式循环排列, 使每个 T_i 与它的两个相邻者 T_{i-1} 和 T_{i+1} 共享一个公共竖直面, 下标按模 n 计算。然后对每个 i , 把 T_i 的底面与 T_{i+1} 的顶面识别。证明 X 在维数 $0, 1, 2, 3$ 的单纯同调群分别为

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_n, \quad 0, \quad \mathbb{Z}.$$

此处有图: 原书 p.131 习题 8 的四面体循环排列示意图。

[空间 X 是透镜空间 (lens space) 的一个例子; 一般情形见 Example 2.43。]

9. 计算由 Δ^n 将所有同维面相互识别得到的 Δ -复形 X 的同调群。因此, X 对每个 $k \leq n$ 都只有一个 k -单形。
10. (a) 证明: 由有限个互不相交的 2-单形经成对识别边所得的商空间总是一个曲面, 即局部同胚于 $\mathbb{R}^2$ 。
(b) 证明: 总可以给这些边定向, 使商曲面上定义出一个 Δ -复形结构。[这一部分较难。]
11. 证明: 若 A 是 X 的收缩核, 则包含 $A \subset X$ 诱导的映射

$$H_n(A) \longrightarrow H_n(X)$$

是单射。

12. 证明: 链映射之间的链同伦是一个等价关系。
13. 验证: $f \simeq g$ 蕴含在约化同调群上诱导的同态满足 $f_* = g_*$ 。
14. 判定是否存在短正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow 0.$$

更一般地, 判定哪些阿贝尔群 A 可以放入短正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^m} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^n} \longrightarrow 0,$$

其中 p 为素数。短正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

的情形又如何?

15. 对一个正合列

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E,$$

证明 $C = 0$ 当且仅当映射 $A \rightarrow B$ 满且 $D \rightarrow E$ 单。由此证明：对空间对 (X, A) ，包含 $A \hookrightarrow X$ 在所有同调群上诱导同构，当且仅当对所有 n 都有 $H_n(X, A) = 0$ 。

16. (a) 证明 $H_0(X, A) = 0$ 当且仅当 A 与 X 的每个道路分支相交。

(b) 证明 $H_1(X, A) = 0$ 当且仅当 $H_1(A) \rightarrow H_1(X)$ 满，并且 X 的每个道路分支至多包含 A 的一个道路分支。

17. (a) 当 X 为 S^2 或 $S^1 \times S^1$ ，且 A 为 X 中有限点集时，计算同调群 $H_n(X, A)$ 。

(b) 设 X 为亏格 2 的闭可定向曲面， A 和 B 为图中所示圆周。计算群 $H_n(X, A)$ 与 $H_n(X, B)$ 。[X/A 和 X/B 是什么?]

此处有图：原书 p.132 习题 17(b) 的亏格 2 曲面及圆周 A, B 。

18. 对子空间 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ，证明相对同调群 $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ 是自由阿贝尔群，并找出一个基。19. 计算 $I \times I$ 的如下子空间的同调群：该子空间由四条边界边以及内部所有第一坐标为有理数的点组成。20. 证明对所有 n 都有

$$\tilde{H}_n(X) \approx \tilde{H}_{n+1}(SX),$$

其中 SX 是 X 的悬挂。更一般地，把 SX 看成两个锥 CX 以底识别所得的并，计算 n 个锥 CX 以底识别所得并的约化同调群。

21. 将前一题具体化，构造显式链映射

$$s : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(SX),$$

它们诱导同构

$$\tilde{H}_n(X) \longrightarrow \tilde{H}_{n+1}(SX).$$

22. 使用观察 X^n/X^{n-1} 是 n -球面的楔和，通过对维数归纳证明有限维 CW 复形 X 的同调具有下列性质：

(a) 若 X 维数为 n ，则 $H_i(X) = 0$ 对 $i > n$ 成立，且 $H_n(X)$ 是自由的。

(b) 若没有维数 $n-1$ 或 $n+1$ 的胞腔，则 $H_n(X)$ 是自由的，其基与 n -胞腔一一对应。

(c) 若 X 有 k 个 n -胞腔，则 $H_n(X)$ 可由至多 k 个元素生成。

23. 证明一个 Δ -复形的第二次重心重分是一个单纯复形。更具体地，证明第一次重心重分产生一个具有如下性质的 Δ -复形：每个单形的所有顶点互不相同；然后证明对于具有这一性质的 Δ -复形，重心重分产生一个单纯复形。

24. 证明 Δ^n 的重心重分中的每个 n -单形, 在重心坐标中由 n 个不等式

$$t_{i_0} \leq t_{i_1} \leq \cdots \leq t_{i_n}$$

定义, 其中 $(i_0, \dots, i_n)$ 是 $(0, \dots, n)$ 的一个置换。

25. 找出重心重分算子

$$S : C_n(X) \longrightarrow C_n(X)$$

的一个显式、非归纳公式。

26. 令 $X = [0, 1]$, 令 A 为序列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

连同其极限 0。证明 $H_1(X, A)$ 不同构于 $\tilde{H}_1(X/A)$ 。[见 Example 1.25。]

27. 设 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 是一个映射, 并且 $f : X \rightarrow Y$ 以及限制 $f : A \rightarrow B$ 都是同伦等价。

(a) 证明对所有 n ,

$$f_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B)$$

都是同构。

(b) 对包含

$$f : (D^n, S^{n-1}) \hookrightarrow (D^n, D^n - \{0\})$$

的情形, 证明 f 不是空间对的同伦等价, 即不存在

$$g : (D^n, D^n - \{0\}) \longrightarrow (D^n, S^{n-1})$$

使得 fg 与 gf 通过空间对映射同伦于恒等映射。[注意, 空间对的同伦等价 $(X, A) \rightarrow (Y, B)$ 也给出把 A 和 B 替换为其闭包后所得空间对之间的同伦等价。]

28. 令 X 为 Δ^3 的 1-骨架上的锥, 即把 Δ^3 六条边上的点与 Δ^3 的重心相连的所有线段的并。对所有 $x \in X$, 计算局部同调群

$$H_n(X, X - \{x\}).$$

定义 ∂X 为所有满足对全部 n 都有

$$H_n(X, X - \{x\}) = 0$$

的点 x 组成的子空间, 并计算局部同调群

$$H_n(\partial X, \partial X - \{x\}).$$

利用这些计算判定哪些子集 $A \subset X$ 具有如下性质：对所有同胚 $f: X \rightarrow X$ ，都有 $f(A) \subset A$ 。

29. 证明 $S^1 \times S^1$ 与 $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ 在所有维数的同调群都同构，但它们的万有覆盖空间不是这样。
30. 在下面每个交换图中，假设除一个映射外其余所有映射都是同构。证明剩下的那个映射也必是同构。

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D. \end{array}$$

此处有图：原书 p.133 习题 30 的三个交换图；本稿仅用简化占位图表示其位置。

31. 使用五引理中的记号，给出一个例子，其中映射 $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ 全为零，但 γ 非零。这可以用短正合列完成，其中所有群都是 $\mathbb{Z}$ 或 0 。