

# 拓扑作业

姓名：王登辉      学号：2024K8009906023

2026 年 3 月 16 日

# 第一章 第1周拓扑作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

**1.1.** 在 1 维欧氏空间  $\mathbb{R}^1$  中，对于  $a < b$ ，我们有  $(a, b) \in \tau_{\mathbb{R}^1}$ ， $[a, b), (a, b], [a, b] \notin \tau_{\mathbb{R}^1}$ 。

**1.2.**  $[a, b)$  不是开集，因为对点  $a$  来说，不存在  $\delta > 0$ ，使得  $(a - \delta, a + \delta) \subseteq [a, b)$ 。 $(a, b], [a, b]$  同理。

**1.3.** 设  $\mathbb{Q}, \mathbb{W} \subset \mathbb{R}$  分别为全体有理数和无理数所构成的集合。证明  $\mathbb{Q}, \mathbb{W} \notin \tau_{\mathbb{R}}$ 。

**1.4.** 假设  $\mathbb{Q}$  是开集，那么任意的  $q \in \mathbb{Q}$ ，存在  $\delta > 0, \delta \in \mathbb{R}$ ，使得区间  $(q - \delta, q + \delta) \subseteq \mathbb{Q}$ 。但由于无理数是稠密的，不可能存在一个区间中没有无理数，因此矛盾！故  $\mathbb{Q}$  不是开集，不属于  $\tau_{\mathbb{R}}$ 。因为有理数也是稠密的，所以无理数的证明同理。

**1.5.** 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是一个非常值的连续映射。则有无交并分解

$$\mathbb{R}^n = A^- \sqcup A^0 \sqcup A^+,$$

其中

$$A^- = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) < 0\}; \quad A^0 = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}; \quad A^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > 0\}.$$

证明：  $A^-, A^+ \in \tau_{\mathbb{R}^n}$ ， $A^0 \notin \tau_{\mathbb{R}^n}$ 。

**1.6.**  $A^-$  和  $A^+$  的证明基本一样，所以只证明  $A^-$  的部分。

先证明  $A^- \in \tau_{\mathbb{R}^n}$ 。任意的  $x \in A^-$ ，由  $f$  的连续保号性可知，存在  $\delta > 0$ ，使得  $f(x)$  在  $(x - \delta, x + \delta)$  上不会变号，仍然小于 0，故  $(x - \delta, x + \delta) \subseteq A^-$ ，故  $A^-$  是开集。

再证明  $A^0 \notin \tau_{\mathbb{R}^n}$ 。假设  $A^0$  是开集。因为  $f$  是连续映射， $A^0 = f^{-1}(\{0\})$ ，所以  $A^0$  是闭集。所以  $A^0$  既是开集又是闭集，矛盾！故  $A^0 \notin \tau_{\mathbb{R}^n}$ 。

**1.7.** 已知度量空间  $(X, d)$ 。证明

- 1)  $X$  中的空集  $\emptyset$  是  $X$  的闭子空间。
- 2) 如果  $A_1, \dots, A_n$  是  $X$  中的有限个闭子空间，则它们的并集  $A_1 \cup \dots \cup A_n$  也是  $X$  的闭子空间。
- 3) 如果  $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ ，是  $X$  中的一簇闭子空间，则它们的交集  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  也是  $X$  的闭子空间。

**ëğççñĤ.** 1)  $\emptyset$ 的补集是 $X$ , 任意的 $x \in X$ ,  $x$ 的邻域仍然是 $X$ 的子集, 所以 $X$ 是开集。开集的补集是闭集, 所以 $\emptyset$ 是闭集。

2) 因为 $A_1, \dots, A_n$ 是 $X$ 中的有限个闭子空间, 所以 $A_1^c, \dots, A_n^c$ 就是 $X$ 中的开子空间。由德摩根定律

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$$

而有限个开集的交仍然是开集, 所以 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 是闭集。

3) 因为 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ , 是 $X$ 中的一簇闭子空间, 所以 $A_\lambda^c$ 是一簇开子空间, 由德摩根定律

$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

无穷个开集的并仍然是开集, 所以 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 是闭集。

**ëŮöéçŸ 1.5.** 设 $A$ 是度量空间 $(X, d)$ 的一个闭子空间,  $x \in X$ 是一个点. 定义

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \in \mathbb{R} | a \in A\}.$$

证明:

- 1)  $x \rightarrow d(x, A)$ 是 $X$ 上的连续函数(称为到子集合 $A$ 的距离函数);
- 2)  $d(x, A) = 0$ 的充分必要条件是 $x \in A$ 。

**ëğççñĤ.** 1) 任意的 $\varepsilon > 0$ , 存在 $\delta = \varepsilon$ ,  $d(x, y) < \delta$ , 对任意的 $a \in A$ ,

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

两边取下确界可得

$$d(x, A) - d(y, A) \leq \delta = \varepsilon$$

交换 $x, y$ 的位置, 可得

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \varepsilon$$

所以 $x \rightarrow d(x, A)$ 是 $X$ 上的连续函数。

2)  $\Rightarrow$ :  $d(x, A) = 0$ , 说明 $\inf\{d(x, a) \in \mathbb{R} | a \in A\} = 0$ , 即任意的 $\varepsilon > 0$ , 存在 $a \in A$ , 使得 $d(x, a) < \varepsilon$ , 所以 $x$ 是集合 $A$ 的极限点。由于 $A$ 是闭集, 所以不存在极限点在集合 $A$ 之外, 故 $x \in A$ 。

$\Leftarrow$ : 因为 $x \in A$ , 所以 $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \in \mathbb{R} | a \in A\} = d(x, x) = 0$ 。

**ëŮöéçŸ 1.6.** 已知度量空间 $(X, d)$ ,  $(Y, d')$ 以及集合间的映射 $f: X \rightarrow Y$ 。证明 $f$ 是连续映射的充要条件是, 对于 $Y$ 中的任意一个闭集 $B \subset Y$ ,  $f^{-1}(B)$ 是 $X$ 中的闭集。

**ëğççñĤ.** 先证明 $\Rightarrow$ , 因为 $B$ 是 $Y$ 中的闭集, 所以 $Y \setminus B$ 是开集, 由于 $f$ 是连续映射, 所以 $f^{-1}(Y \setminus B)$ 是开集。因为逆像保运算, 所以 $f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$ , 由于 $f^{-1}(Y \setminus B)$ ,  $f^{-1}(Y)$ 都是开集, 所以 $f^{-1}(B)$ 是 $X$ 中的闭集。

再证明 $\Leftarrow$ , 对于任意的 $x \in X$ , 任意的 $\varepsilon > 0$ ,  $B(f(x), \varepsilon)$ 是 $Y$ 中的开集, 于是 $Y - B(f(x), \varepsilon)$ 是 $Y$ 中的闭集。于是 $f^{-1}(Y - B(f(x), \varepsilon))$ 是 $X$ 中的闭集, 于是 $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ 是 $X$ 中的开集。

存在 $\delta > 0$ ,  $x \in B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ , 于是 $f(x) \subseteq (f \circ f^{-1})(B(f(x), \varepsilon)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$ , 故 $f$ 是连续的。

**ëŮöéčŸ 1.7.** 设 $\mathbb{Q}^n$ 是 $n$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中坐标为有理数的点的集合. 证明 $\mathbb{Q}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的稠密子空间。

**ëğççñĤ.** 要证明 $\mathbb{Q}^n = \mathbb{R}^n$ , 只需证明 $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$ 。

首先说明, 集合 $W = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \text{中至少存在一个是无理数}\}$ 是 $\mathbb{Q}^n$ 的导集, 也就是任意 $w \in W$ , 是 $\mathbb{Q}^n$ 的极限点。

$\forall \delta > 0$ , 定义 $w$ 的开邻域为 $n$ 维正方体 $C_\delta: (x_1 - \delta, x_1 + \delta) \times \dots \times (x_n - \delta, x_n + \delta)$ , 由于有理数的稠密性, 无论 $\delta$ 多小, 总会存在 $q_i \in (x_i - \delta, x_i + \delta), i = 1, \dots, n$ , 从而每个 $C_\delta$ 中都会有 $\mathbb{Q}^n$ 中的点。于是 $w$ 是 $\mathbb{Q}^n$ 的极限点,  $W$ 是 $\mathbb{Q}^n$ 的导集。

于是,  $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{Q}^n \cup W = \mathbb{R}^n$ 。

**ëŮöéčŸ 1.8.** 已知拓扑空间 $(X, \tau)$ 的一个子空间 $A \subseteq X$ . 它的边界是

$$\partial A := \overline{A} - \overset{\circ}{A}.$$

证明:

$$(1) \partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$$

$$(2) \partial A = \emptyset \iff A \text{既开且闭}.$$

**ëğççñĤ.** (1) 由于对 $B \subset X$ ,  $X - \overline{B} = (X - B)^\circ$ , 令 $B = X - A$ , 有 $\overset{\circ}{A} = X - \overline{X - A}$ . 所以

$$\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus \left[ X \setminus \left( \overline{X - A} \right) \right] = \overline{A} \cap \left[ X \setminus \left( \overline{X - A} \right) \right]^c = \overline{A} \cap \overline{X - A}.$$

$$(2) \partial A = \emptyset \iff \overline{A} \text{与} \overline{X - A} \text{没有交集}.$$

先证明 $A$ 是闭集。设 $x \in \overline{A}$ , 如果 $x \notin A$ , 那么 $x \in X - A$ , 那么 $x \in \overline{X - A}$ , 从而有交集了。矛盾! 所以 $A$ 是闭集。

同理,  $X - A$ 是闭集, 所以 $A$ 是开集。

所以 $A$ 既开又闭。

**ëŮöéčŸ 1.9.** 考虑 $n$ 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的下述两个拓扑:

1)  $\tau_1$ : 由距离函数 $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 所规定的拓扑;

2)  $\tau_2$ :  $\mathbb{R}^n$ 上的余有限拓扑。

证明集合之间的恒同映射 $\text{id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

1) 是一个连续映射:  $(\mathbb{R}^n, \tau_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \tau_2)$ ;

2) 不是一个连续映射:  $(\mathbb{R}^n, \tau_2) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \tau_1)$ 。

**ëġčċŋŦ.** 1)  $\tau_1$  中的开集就是通常的开集。 $\tau_2$  中的开集  $U$  要么是  $\emptyset$ , 要么  $\mathbb{R}^n \setminus U$  是有限集。对任意  $U \in \tau_2$ , 若  $U = \emptyset$ , 则  $\text{id}^{-1}(U) = \emptyset \in \tau_1$ 。若  $U \neq \emptyset$ , 因为  $\mathbb{R}^n \setminus U$  是有限集, 所以  $\text{id}^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$  也是有限的, 在  $\tau_1$  中是闭集, 所以其补集是开集。所以恒同映射是连续映射。

2) 取  $U \in \tau_1$ , 使得  $\mathbb{R}^n \setminus U$  是无限集。于是  $\text{id}^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$  是无限集, 即  $\mathbb{R}^n \setminus \text{id}^{-1}(U)$  是无限集, 所以  $\text{id}^{-1}(U)$  是闭集。因此  $\text{id}$  不连续。

**éŮőéčŸ 1.10.** 举例说明, 焊接引理中  $A_1, A_2 \subset X$  是闭子空间的条件不可去。

**ëġčċŋŦ.** 设  $X = \mathbb{R}, A_1 = (-\infty, 0), A_2 = [0, +\infty)$ , 定义  $f_1 : A_1 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0, f_2 : A_2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$ , 这样由于  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , 映射限制在空集上自然相等, 但是合到一起后在  $\mathbb{R}$  上不相等。所以条件不可以去掉。

## 第二章 第2周拓扑作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

2.1. 对于一个拓扑空间 $(X, \tau)$ ，乘积空间 $X \times X$ 的对角子空间是

$$\Delta(X) = \{(x, x) \in X \times X, x \in X\}.$$

证明 $(X, \tau)$  是 $T_2$ 空间的充分必要条件是， $\Delta(X)$ 是乘积空间 $X \times X$ 的闭子空间。

“ $\implies$ ”：只需要证明 $(X \times X) \setminus \Delta(X)$ 是开子空间。由于 $(X, \tau)$ 是 $T_2$ 空间，所以 $\forall x, y \in X, \exists U, V \subset X$ ，使得 $x \in U, y \in V$ ，且 $U \cap V = \emptyset$ 。于是 $U \times V$ 是 $(x, y)$ 的一个开邻域，且属于 $(X \times X) \setminus \Delta(X)$ 。因为假如某一个 $(z, z) \in U \times V$ ，那么 $z \in U \cap V$ ，矛盾！所以 $(X \times X) \setminus \Delta(X)$ 就是开集，也就是说 $\Delta(X)$ 是闭集。

“ $\impliedby$ ”：因为 $\Delta(X)$ 是乘积空间 $X \times X$ 的闭子空间，所以 $(X \times X) \setminus \Delta(X)$ 是开子空间，任意的 $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta(X)$ ，存在开集 $U \times V$ ，使得 $(x, y) \in U \times V \subset X \times X$ 。假设 $(X, \tau)$ 不是 $T_2$ 空间，也就是存在 $x, y \in X$ ，不存在 $U, V$ ，使得 $x \in U, y \in V$ 且 $U \cap V = \emptyset$ 。设 $z \in U \cap V$ ，那么在 $(X \times X) \setminus \Delta(X)$ 中，点 $(x, y)$ 不会存在开邻域 $U \times V$ ，因为 $(z, z) \in U \times V$ ，矛盾！所以 $(X, \tau)$ 是 $T_2$ 空间。

2.2. 设 $A$ 是度量空间 $(X, d)$ 的一个闭子空间。定义函数

$$d_A : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_A(x) = \inf\{d(x, a) \in \mathbb{R}, a \in A\}.$$

证明：

1)  $d_A$ 是 $X$ 上的连续函数；

2)  $d_A(x) = 0$ 的充分必要条件是， $x \in A$ 。

1) 取 $\delta = \varepsilon$ ， $\forall x \in \mathbb{R}^n, y \in B(x, \delta), z \in A$ ，有

$$d(y, x) \geq d(z, x) - d(z, y)$$

两边取下确界，有

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y) \iff d_A(x) - d_A(y) \leq d(x, y) < \varepsilon$$

所以  $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ , 所以  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$ , 使得  $f(B(x, \delta_\varepsilon)) \subset B(f(x), \varepsilon)$ , 也就是  $d_A$  是连续函数。

2) “ $\Leftarrow$ ”: 由于  $x \in A$ ,  $d(x, x) = 0$ , 所以  $d_A(x) = d(x, x) = 0$ .

“ $\Rightarrow$ ”: 因为  $d_A(x) = 0$ , 所以存在序列  $\{a_n\} \subset A$ , 使得  $d(x, a_n) \rightarrow 0$ , 也就是  $\{a_n\}$  的极限是  $x$ . 由于  $A$  是闭集, 所以  $A$  的极限点属于  $A$ , 因此  $x \in A$ .

**2.3.** 证明两个  $T_2$  空间的乘积空间也是  $T_2$  空间。

**2.3.** 设  $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$  是两个  $T_2$  空间. 任意的  $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ , 存在开集  $U_1, U_2, x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$  且  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . 任意的  $y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2$ , 同样也存在开集  $V_1, V_2$  满足相同的性质. 于是, 在  $(X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$  中,

当两个坐标均不同时, 点  $(x_1, y_1)$  和点  $(x_2, y_2)$  分别属于  $U_1 \times V_1$  和  $U_2 \times V_2$ , 且  $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = \emptyset$ , 在这种情况下可以分离。

当有一个坐标相同时, 不妨设两个点为  $(x_1, y_1), (x_1, y_2)$ , 此时, 这两个点分别属于  $U_1 \times Y_1$  和  $U_1 \times Y_2$ , 由于  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ , 所以  $(U_1 \times V_1) \cap (U_1 \times V_2) = \emptyset$ , 在这种情况下也可以分离。

综上, 两个  $T_2$  空间的乘积空间也是  $T_2$  空间。

**2.4.** 证明  $T_1$  空间中的任一子集的导集是闭集。

**2.4.** 设  $A$  是  $T_1$  空间  $X$  的一个子集,  $A$  的导集记为  $A'$ , 要证明  $A'$  是闭集就要证明  $X \setminus A'$  是开集。

任取  $x \in X \setminus A'$ , 设  $U$  是  $x$  的一个开邻域, 那么必然存在  $U \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ , 否则  $x$  就是极限点了。我们断言这样的  $U \subset X \setminus A'$ 。

假设存在  $y \in U \cap A'$ . 那么由于  $T_1$  且  $y$  是极限点, 所以  $U$  会包含无数个  $A$  中的点, 而这与  $U \cap (A - \{x\}) = \emptyset$  矛盾。故  $x \in U \subset X \setminus A'$ , 所以  $A'$  是闭集。

**2.5.** 设  $(X, \tau)$  是  $T_2$  空间,  $f: X \rightarrow X$  是连续映射。证明  $f$  的不动点集

$$\text{Fix}(f) := \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

是  $X$  的闭子空间。

**2.5.** 设  $G = \{x \in X \mid f(x) = x\}$ , 只需证明  $G$  是  $X$  的开子空间即可。

任取  $g \in G$ , 由于  $X$  是  $T_2$  空间, 存在开集  $U, V \subset X$ , 使得  $g \in U, f(g) \in V$  且  $U \cap V = \emptyset$ . 由  $f$  的连续性, 存在  $g$  的开邻域  $W, W \subset U$ , 且  $f(W) \subset V$ . 由于  $U$  与  $V$  无交集, 所以  $W$  与  $f(W)$  无交集, 所以  $g \in W \subset G$ , 所以  $G$  是开集, 从而  $\text{Fix}(f)$  是闭集。

**2.6.** 设  $(Y, \tau)$  是  $T_2$  空间,  $f: X \rightarrow Y$  是连续映射。证明  $f$  的图像

$$G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

是乘积空间  $X \times Y$  的闭子空间。

**ěğčçñĤ.** 证明  $(X \times Y) \setminus G_f$  是开子空间。设  $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G_f$ , 假设不存在  $U \times V$ , 使得  $(x, y) \in U \times V \subset (X \times Y) \setminus G_f$ . 那么就是说,  $(x, y)$  的任意开邻域  $U \times V$ , 都会包含  $(x_0, f(x_0))$  这个点。也就是说, 任意的  $y \in Y$ ,  $y$  的任意开邻域  $V$  都会包含  $f(x_0)$ , 这与  $T_2$  空间矛盾。因此  $G_f$  是  $X \times Y$  的闭子空间。

**ěŮőěćŸ 2.7.** 设  $(X, \tau)$  是  $T_3$  空间,  $A$  是  $X$  的闭子空间,  $x \notin A$ . 证明存在  $x$  和  $A$  各自的开邻域  $U$  和  $V$ , 使得  $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ .

**ěğčçñĤ.** 由于  $A \subset V \subset \overline{V}$ ,  $\overline{V}$  是闭集, 所以根据  $T_3$ , 就存在  $x$  的开邻域  $U_0$ , 使得  $x \in U_0$ , 且  $U_0 \cap \overline{V} = \emptyset$ . 然后我们只需要证明能找到一个  $U$ , 使得  $\overline{U} \subset U_0$ . 考虑闭集  $X \setminus U_0$ , 他不包含  $x$ , 所以由  $T_3$  性质, 存在  $x$  的开邻域  $U$ , 和开子集  $W \supset X \setminus U_0$ , 使得  $U \cap W = \emptyset$ , 所以  $U \subset \overline{U} \subset X \setminus W \subset U_0$ , 所以就找到了这样的  $U$ . 这样, 就存在  $x$  和  $A$  各自的开邻域  $U$  和  $V$ , 使得  $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ .

**ěŮőěćŸ 2.8.** 已知  $T_4$  空间  $(X, \tau)$  中的一个闭子空间  $A$  上的连续映射  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ . 证明存在  $X$  上的连续映射  $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 它满足  $F|_A = f$ .

**ěğčçñĤ.** 将  $f$  按坐标分解为  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ , 每个  $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ . 令  $\phi = \tan \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right) \pi \right]$ .  $\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . 令  $g = \phi^{-1} \circ f = (\phi^{-1} \circ f_1, \dots, \phi^{-1} \circ f_n)$ , 每个  $\phi^{-1} \circ f_i: A \rightarrow [0, 1]$ , 对每个分量应用 Tietze 扩张定理, 就会存在  $X$  上的连续映射  $G_i: X \rightarrow [0, 1]$ , 满足  $G_i|_A = g_i$ , 也就是  $G|_A = g$ . 于是可以令  $F = \phi \circ G$ , 就构造出一个  $X$  上的连续映射  $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**ěŮőěćŸ 2.9.** 举例说明, Tietze 扩张定理中  $A \subset X$  是闭子空间的条件不可去。

提示: 写出一个映射  $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow [0, 1]$ , 它不能扩张为连续映射  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ .

**ěğčçñĤ.** 令  $f = \frac{1}{2} \left( \sin \left( \frac{1}{x} \right) + 1 \right)$  即可。