

第2章 拓扑空间的分类与制作

(常见空间的几何表述)

本章介绍几何和拓扑学常见的拓扑空间及其制作与表述. 若无特殊说明, 我们所关心的拓扑空间均是道路连通的 T_2 空间.

- §1. 拓扑空间的同胚变换与分类;
- §2. 商空间与商映射;
- §3. 从闭曲面到胞腔复形;
- §4. 拓扑群.

2.1 拓扑空间的同胚变换与分类

本节主要包括:

- 1. 欧氏空间的等距变换(刚体运动);
- 2. 拓扑空间的同胚变换与分类;
- 3. 不同胚空间的判定(例);
- 4. 同胚空间的判定(例)

1. 欧氏空间的等距变换(刚体运动rigid moves)

在经典的欧氏几何中, 我们关心欧氏空间中的几何对象所具有的各种度量性质, 如三角形的边长、夹角、面积, 以及不同几何对象之间的位置关系等. 这些性质在等距变换, 或刚体运动(即平移、旋转、镜面反射的有限复合), 下保持不变. 给定两个几何对象, 如果其中之一可以经过一个刚体运动与另一个完全重合, 我们就说这两个几何对象全等. 两个全等的几何对象具有相同的度量性质. 概括地讲, 欧氏几何研究欧氏空间中的几何对象在刚体变换之下保持不变的性质.

定义: 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个自映射 $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 称为一个**等距变换**(或**刚体运动 rigid move**), 如果对于其中任意两点 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 都有

$$d(\sigma(x), \sigma(y)) = d(x, y).$$

欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的全体等距变换所构成的集合, 记为 $I(\mathbb{R}^n)$.

欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 称为**全等**, 记为 $A \equiv B$, 如果存在一个等距变换(或刚体运动) $\sigma \in I(\mathbb{R}^n)$, 使得 $\sigma(A) = B$.

(常见空间的几何表述)

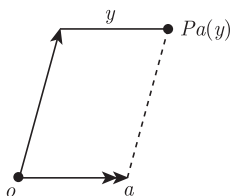
欧氏几何学基本问题: 已知欧氏空间中两个子空间 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, 判定它们是否全等 $A \equiv B$?

例1.等距变换的表现形式: 等距变换(或刚体运动) 是物理学中具有“常态性”运动形式之一: 地球在以太阳为焦点的一个椭圆轨道上运动, 同时绕南北极之间的连线作自旋运动. 身处地球的我们之所以感觉不到这些运动, 正是由于它们是刚体运动, 它不改变你我之间的距离, 也不改变你和周边物体之间的距离. 为了有效解答欧氏几何基本问题, 我们对等距变换的基本表现形式, 做一个系统介绍.

1) **平移变换:** 对于欧氏空间中的一个向 $a \in \mathbb{R}^n$, 沿 a 的平移变换是

$$P_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, P_a(y) = y + a,$$

显然, $P_a \in I(\mathbb{R}^n)$.



2) **点反射变换:** 对于欧氏空间中的一点 $a \in \mathbb{R}^n$, 关于 a 点的反射变换

$$R_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, R_a(x) = 2a - x,$$

是一个刚体运动 $R_a \in I(\mathbb{R}^n)$.

3) **面反射变换:** 对于一张 k 维线性子空间 $L \subset \mathbb{R}^n$, 关于 L 的反射变换

$$R_L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

是一个刚体运动 $R_L \in I(\mathbb{R}^n)$.

在 $\mathbb{R}^n$ 中取一个单位正交的坐标系 $e_1, \dots, e_n$ 使得 L 是由前 k 个向量所张线性子空间 $L = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$. 则在新坐标系中, 反射变换 $R_L \in I(\mathbb{R}^n)$ 的坐标表达式是

$$R_L(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_k, -y_{k+1}, \dots, -y_n)$$

4) **旋转变换:** 给定一个角度 $\theta \in [0, 2\pi]$, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上关于原点的逆时针转动 θ 度的变换

$$\tau_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

是平面的一个刚体运动 $\tau_\theta \in I(\mathbb{R}^2)$. 它坐标表达式是:

$$\tau_\theta(x, y) = (\cos \theta \cdot x + \sin \theta \cdot y, -\sin \theta \cdot x + \cos \theta \cdot y)$$

5) **正交线性变换:** 设 $O(n)$ 是全体实正交矩阵的集合 $\{A \in M(n \times n), AA^T = I_n\}$. 对于一个正交矩阵 $A \in O(n)$, 它所规定的线性映射

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad A(y) = A \cdot y.$$

是一个刚体运动 $A \in I_0(\mathbb{R}^n)$, 称为 $\mathbb{R}^n$ 的一个**正交线性变换**.

习题1. 叙述群的定义.

证明在矩阵的乘法和求逆运算下, 全体实正交矩阵的集合 $O(n)$ 是一个以 n 阶单位矩阵 I_n 为乘法单位的群, 它称为 n 阶**正交群**.

习题2. 令 $I(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ 的全体等距变换所构成的集合, $\sigma, \tau \in I(\mathbb{R}^n)$. 证明:

- 1) $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个连续双射, 且 $\sigma^{-1} \in I(\mathbb{R}^n)$;
- 2) $\sigma \circ \tau \in I(\mathbb{R}^n)$.

习题3. 设 $e \in I(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的恒同映射. 证明 $I(\mathbb{R}^n)$ 是以 e 为乘法单位的群, 其中 $I(\mathbb{R}^n)$ 中的乘法和求逆运算分别是:

$$I(\mathbb{R}^n) \times I(\mathbb{R}^n) \rightarrow I(\mathbb{R}^n), \quad \sigma \times \tau = \sigma \circ \tau$$

$$I(\mathbb{R}^n) \rightarrow I(\mathbb{R}^n), \quad (\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}$$

$I(\mathbb{R}^n)$ 称为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的**刚体运动群**, 或**等距变换群**.

习题4. 设 $I_0(\mathbb{R}^n) = \{\sigma \in I(\mathbb{R}^n) \mid \sigma(O) = O\}$, 其中 $O \in \mathbb{R}^n$ 是原点. 证明

- 1) $I_0(\mathbb{R}^n) \subset I(\mathbb{R}^n)$ 是一个子群;
- 2) 映射 $h: O(n) \rightarrow I_0(\mathbb{R}^n)$, $h(A) = A$, 是一个群同构.

提示: 设 $e_i = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的标准单位正交基底. 则映射 h 的逆是

$$h^{-1}(\sigma) = (\sigma(e_1), \dots, \sigma(e_n)).$$

习题5. 表示定理 证明映射

$$f: I_0(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow I(\mathbb{R}^n), \quad f(\sigma, a) = \sigma \circ P_a,$$

(常见空间的几何表述)

是一个群同构, 它的逆映射是

$$h^{-1}(\sigma) = (P_{-\sigma(0)} \circ \sigma, \sigma(0)).$$

2. 拓扑空间的同胚变换与分类

和欧氏空间中的刚体运动相比较, “弹性变换”是自然界中存在一种更为常见的运动形态. 此类变换可以对几何对象进行弯曲、拉伸、压缩、扭转, 从而可以改变几何对象的度量性质. 给定两个拓扑空间, 如果其中之一可以经过一个弹性变换与另一个完全重合, 我们就说这两个空间同胚. 拓扑学研究拓扑空间在弹性变换之下保持不变的性质, 因此, 也称为“弹性几何学”, 或“不计尺寸的几何学”.

定义: 从拓扑空间 (X, τ) 到 (Y, τ') 的一个连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 称为**同胚变换**, 如果

- 1) f 是一个集合间的双射;
- 2) f 的逆映射 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 也连续.

已知两个拓扑空间 (X, τ) , (Y, τ') . 如果存在一个同胚变换 $f: X \rightarrow Y$, 则称 X 和 Y 同胚, 记为 $X \cong Y$. $\square$

拓扑学基本问题: 已知两个空间 (X, τ) , (Y, τ') , 判定它们是否同胚 $(X, \tau) \cong (Y, \tau')$? $\square$.

同胚变换定义有以下直接推论.

定理1: 同胚变换具有下述性质:

- 1) 对于任一拓扑空间 (X, τ) , 恒同映射 $1_X: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ 是同胚变换.
- 2) 如果 $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ 是同胚变换, 则它的逆映射 $f^{-1}: (Y, \tau') \rightarrow (X, \tau)$ 也是同胚变换.
- 3) 如果 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ 是同胚变换, 则复合映射

$$g \circ f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

也是同胚变换. $\square$

推论: 在所有拓扑空间构成的集合中, 同胚关系是一个等价关系.

证明: 根据定理1, 同胚关系具有 1) 自反性; 2) 对称性; 3) 传递性. $\square$

定理2: 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个连续双射, 则下列条件等价

- 1) f 是同胚变换;
- 1) f^{-1} 连续;
- 2) $f(X \text{ 中的开集}) = Y \text{ 中的开集}$ (也称 f 是**开映射**)
- 3) $f(X \text{ 中的闭集}) = Y \text{ 中的闭集}$ (也称 f 是**闭映射**).

例2. f 是连续双射的性质仅保证了它的逆映射 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 的存在性. 但是, 一般来说, f 是连续双射并不能保证 f^{-1} 也连续.

a) 令 $\tau = \mathbb{R}^n$ 作为欧氏空间的拓扑, $\tau' = \mathbb{R}^n$ 中的余有限拓扑. 则恒同映射

$$1_{\mathbb{R}^n} : (\mathbb{R}^n, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \tau')$$

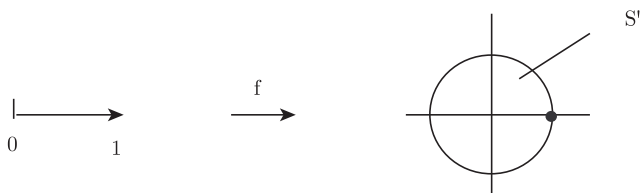
是一个连续双射, 但它的逆映射不连续: 对于一条直线 $l \subset \mathbb{R}^n$, 我们有

$$\mathbb{R}^n - l \in \tau, \text{ 但是 } \mathbb{R}^n - l \notin \tau'.$$

b) 考察平面中的单位圆周 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$, 以及映射

$$f : [0, 1) \rightarrow S^1, \quad f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t).$$

则 f 是一个连续双射:



但是它的逆 $f^{-1} : S^1 \rightarrow [0, 1)$ 不连续. 原因在于 $f\left[0, \frac{1}{2}\right)$ 不是圆周 S^1 的开子集. $\square$

下面的定理断言, 如果空间 X, Y 具有较好的拓扑性质, 它们之间的连续双射可以是一个同胚变换.

定理3: 如果 $f : X \rightarrow Y$ 是从紧致空间 X 到 T_2 空间 Y 的一个连续双射, 则 f 是一个同胚变换.

证明: 下设 $f : X \rightarrow Y$ 是从紧致空间 X 到 T_2 空间 Y 的一个连续双射. 则对 X 的任一闭子空间 $A \subset X$, A 紧致. 从而 $f(A)$ 是 T_2 空间 Y 中的一个紧致子空间, 从而是一个闭子空间. 由定理2的性质 3) 知, 逆映射 f^{-1} 连续. 因此 f 是一个同胚变换. $\square$

从定义出发, 要说明两个空间 X 和 Y

1) 同胚, 需要证明存在一个连续双射 $f : X \rightarrow Y$, 它的逆映射也连续;

2) 不同胚, 需要证明无论如何, 也找不到一个连续双射, 它的逆映射也连续.

下面我们给出正、反两方面的例子.

3. 不同胚空间的判定 (例)

设 $f : X \rightarrow Y$ 是从拓扑空间 (X, τ) 到 (Y, τ') 的一个同胚变换. 则 f 诱导了拓扑之间的一个一一对应:

$$f: \tau \rightarrow \tau', \quad U \rightarrow f(U) \in \tau', \quad U \in \tau$$

由于分离性, 紧致性, 连通性(道路连通性)均是拓扑空间的开集的性质, 我们得到:

推论: 如果 $X \cong Y$, 则有

- 1) X 满足 T_i 分离性公理的充要条件是, Y 满足 T_i 分离性公理, $i = 1, 2, 3, 4$;
- 2) X 紧致的充要条件是, Y 紧致;
- 3) X 连通(通路连通)的充要条件是, Y 连通(道路连通). $\square$

根据上述推论, 拓扑空间的分离性、紧致性和连通(道路连通)性, 是经过同胚变换保持不变的性质, 因此, 属于空间的**拓扑性质**. 从而可做为判定两个拓扑空间是否同胚的依据.

例3: 设 $a < b$. 则直线 $\mathbb{R}^1$ 中的如下子空间彼此不同胚:

$$A = [a, b]; \quad B = [a, b); \quad C = (a, b).$$

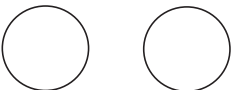
证明: 由于 A 紧致但 B, C 不紧致, 从而 $A \not\cong B, C$.

下证不存在同胚 $f: [a, b) \rightarrow (a, b)$. 或不然, 存在一个同胚变换 $f: [a, b) \rightarrow (a, b)$. 令 $r = f(a) \in (a, b)$. 则 f 诱导了补空间之间的同胚变换

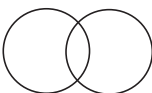
$$(a, b) = [a, b) - \{a\} \xrightarrow{f'} (a, b) - \{r\}.$$

由于 (a, b) 连通但 $(a, b) - \{r\}$ 不连通, 得矛盾. $\square$

例4: 平面中如下子空间彼此不同胚:

A = 一对相离圆周: 

B = 一对相切圆周: 

C = 一对相交圆周: 

证明: 由于 A 不连通但 B, C 连通, 因此 $A \not\cong B, A \not\cong C$.

设 $a \in B$ 为两圆切点且 $f: B \rightarrow C$ 是一个同胚变换, 则 f 诱导了补空间之间的同胚变换

$$f': B - \{a\} \rightarrow C - \{f(a)\}.$$

由于 $C - \{f(a)\}$ 道路连通但 $B - \{a\}$ 不道路连通, 这样的同胚 f' 不存在, 从而

$$B \not\cong C. \quad \square$$

4. 同胚判定(例)

本节将用到同胚变换的下述等价表述

定理4: 两个拓扑空间 X, Y 同胚的充要条件是, 存在一对连续映射 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$, 满足映射的等式:

$$g \circ f = 1_X: X \rightarrow X; \quad f \circ g = 1_Y: Y \rightarrow Y.$$

证明: 已知两个集合间映射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$. 如果 $g \circ f = 1_X, f \circ g = 1_Y$, 则有

1) f 是双射; 2) g 是双射. $\square$

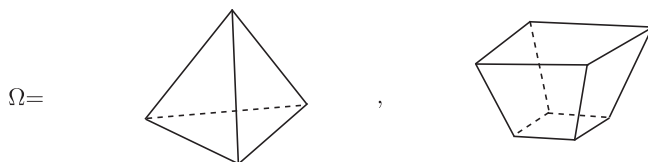
考虑 n 维欧氏空间的下述子空间:

1) n 维单位闭球体: $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n, |x|^2 \leq 1\}$.

2) n 维单位开球体: $\mathring{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n, |x|^2 < 1\}$.

3) n 维单位球面: $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, |x|^2 = 1\} (= \partial D^{n+1})$.

此外, 设 Ω 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中一个 n 维有界闭凸多面体:



定理5: 下述四个空间彼此同胚

1) $\mathbb{R}^n$; 2) $\mathring{D}^n$; 3) $S^n - \{p\}, p \in S^n$; 4) $\mathring{\Omega}$.

证明: 根据同胚关系的传递性, 我们只需要证明下述结论:

结论A: $\mathbb{R}^n \cong \mathring{D}^n$; 结论B: $\mathbb{R}^n \cong S^n - \{p\}$. 结论C: $\mathring{D}^n \cong \mathring{\Omega}$.

结论 A 的证明: 分别定义映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathring{D}^n, g: \mathring{D}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 如下:

$$f(y) = \frac{y}{1 + |y|}; \quad g(x) = \frac{x}{1 - |x|}.$$

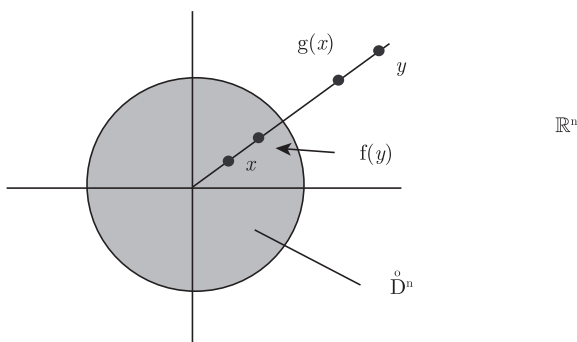
则

i) f, g 的定义合理且连续;

(常见空间的几何表述)

ii) $f \circ g = 1_{\mathring{D}^n}$; $g \circ f = 1_{\mathbb{R}^n}$ (请验证).(例如: 对于任意一点 $x \in \mathring{D}^n$, 根据映射 f, g 的定义

$$f \circ g(x) = \frac{g(x)}{1 + |g(x)|} = \frac{\frac{x}{1 - |x|}}{1 + \left| \frac{x}{1 - |x|} \right|} = x.$$

总之, 结论 A 得证. 其中, 同胚映射 f 和 g 的几何行为如图所示:**结论 B 的证明:** 视 $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1\}$. 于是有

$$\mathbb{R}^n = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\}$$

$$S^n = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, |x|^2 + |t|^2 = 1\}.$$

不妨取 $p = (0, 1) \in S^n$ (北极点). 定义映射

$$f : S^n - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - \{p\}$$

分别为:

$$f(x, t) = \frac{x}{1 - t}; \quad g(y) = \left(\frac{2y}{1 + |y|^2}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \right).$$

则有

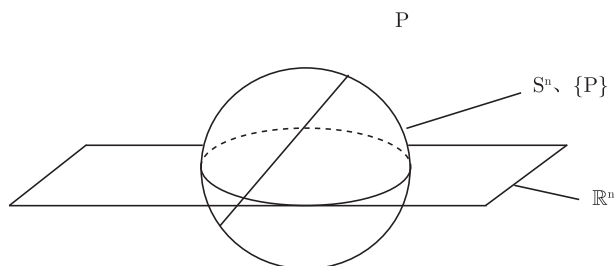
i) 映射 f 和 g 的定义合理且连续;ii) $g \circ f = 1_{S^n - \{p\}}$; $f \circ g = 1_{\mathbb{R}^n}$ (请验证).(例如: 对于任意一点 $y \in \mathbb{R}^n$, 根据映射 f, g 的定义

$$f \circ g(y) = f \left(\frac{2y}{1 + |y|^2}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \right) = \left(\frac{1}{1 - \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}} \right) \cdot \left(\frac{2y}{1 + |y|^2} \right) = y.$$

总之, 结论 B 得证。其中, 同胚变换 f 和 g 的几何行为分别是:

i) 对于点 $(x, t) \in S^n - \{p\}$, $f(x, t) =$ 两点 $(x, t), p \in \mathbb{R}^{n+1}$ 之间的连线与超平面 $\mathbb{R}^n$ 的唯一交点;

ii) 反之, 对于 $y \in \mathbb{R}^n$, $g(y) =$ 两点 $y, p \in \mathbb{R}^{n+1}$ 之间连线与单位球面 S^n 的唯一交点。



当 $n = 2$ 时, 同胚变换 f 称为“球极投影”, 并具有如下性质:

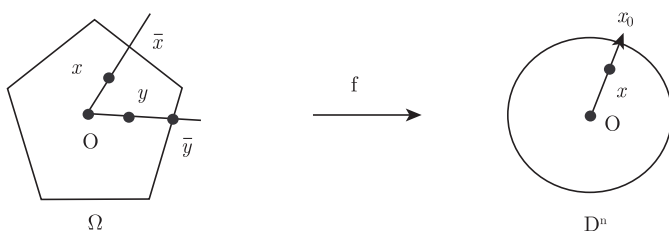
i) 它将单位球面 S^2 上过 p 点经圆, 映为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中过原点一条直线;
ii) 将单位球面 S^2 上以 p 点为心的纬圆, 映为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中以原点为中心的圆;

古代天文学家利用球极投影, 将分布在天球上的星辰绘制到平面上。

结论 C 的证明: 设 Ω 是一个 n 维有界凸多面体. 它的边界记为 $\partial\Omega$. 不妨设原点位 Ω 的内部 $0 \in \overset{\circ}{\Omega}$. 定义映射 $f: \Omega \rightarrow D^n$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x = 0; \\ \frac{1}{|\bar{x}|}x, & \text{如果 } x \neq 0. \end{cases}$$

其中 $\bar{x} =$ 半射线 $\overrightarrow{Ox}$ 和边界 $\partial\Omega$ 的唯一交点。



则 f 的定义合理且连续. 进一步, 我们有

1) f 是单射: 设 $x, y \in \Omega$ 满足 $f(x) = f(y)$, 则有, 如果 $x = 0$, 则 $y = 0$. 如果 $x \neq 0$, 则有 $y = \frac{|\bar{y}|}{|\bar{x}|}x$, 从而 x 和 x 共线, 据此 $\bar{y} = \bar{x}$, 进而 $y = x$.

2) f 是满射: 单位球体 D^n 中的一点 $x \neq 0$ 可唯一表为 $x = tx_0 \in D^n$, 其中 $t \in (0, 1]$, $x_0 \in S^{n-1}$, 令 $y = t\bar{x}$, 其中

(常见空间的几何表述)

$\bar{x} =$ 半射线 $\overrightarrow{Ox_0}$ 和 $\partial\Omega$ 的唯一交点.
 则有 $x_0 = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|}$, 并且

$$f(y) = \frac{t}{|\bar{x}|} \bar{x} = t \cdot x_0.$$

3) 由于 f 是从紧致空间 Ω 到 T_2 空间 D^n 的连续双射, 从而

$$f: \Omega \cong D^n.$$

进一步, 相对于多面体 Ω 的无交并分解 $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \sqcup \partial\Omega$, 同胚变换 f 满足

$$f(\overset{\circ}{\Omega}) = \overset{\circ}{D}^n, \quad f(\partial\Omega) = S^{n-1}.$$

从而 f 的限制分别诱导同胚: $\partial\Omega \cong S^{n-1}$; $\overset{\circ}{\Omega} \cong \overset{\circ}{D}^n$. $\square$

推论3. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 n 维有界闭凸多面体, 则有 $\Omega \cong D^n$; $\partial\Omega \cong S^{n-1}$.

习题1. 验证定理5结论A的证明中所构造的映射对 f, g 互逆;

验证定理5结论B的证明中所构造的映射对 f, g 互逆;

证明定理5结论C的证明中所构造的映射对 f 是连续双射.

习题2. 证明下述拓扑空间彼此同胚:

1) $S^{n-1} \times \mathbb{R}$; 2) $\mathbb{R}^n - \{0\}$; 3) $\mathbb{R}^n - D^n$.

提示: 结论A: $S^{n-1} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n - \{0\}$.

由于 $\mathbb{R} \cong (0, +\infty)$, 只需要证明 $S^{n-1} \times (0, +\infty) \cong \mathbb{R}^n - \{0\}$. 考虑映射

$$\begin{aligned} f: S^{n-1} \times (0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \\ g: \mathbb{R}^n - \{0\} &\rightarrow S^{n-1} \times (0, +\infty) \end{aligned}$$

分别为

$$f(x, t) = tx; \quad g(y) = \left(\frac{y}{|y|}, |y| \right).$$

它们均是连续映射, 且互为逆映射.

习题3. 证明单位圆周的一个自同胚可以扩张为单位圆盘的自同胚. $\square$

2.2 商空间和商映射

2.1. 商空间和商映射

2.2. 商空间上的连续映射

2.3. 例: 射影空间与环面

2.4. 商空间 X/A

2.2.1 商空间和商映射

定义: 集合 X 中的一个两元关系 $\sim$ 称为一个等价关系, 如果它满足下述性质:

- 1) 自反性: 对于每个元素 $x \in X$, 都有 $x \sim x$;
- 2) 对称性: 如果 $x \sim y$, 则 $y \sim x$;
- 3) 传递性: 如果 $x \sim y, y \sim z$, 则 $x \sim z$.

设 $\sim$ 是集合 X 中的一个等价关系. 则有

a) 集合 X 关于等价关系 $\sim$ 的**商集**:

$$\overline{X} := X / \sim \text{ (} X \text{ 关于等价关系 } \sim \text{ 的等价类 } [x] \text{ 的集合)}$$

2) X 关于等价关系 $\sim$ 的**商映射**:

$$\pi: X \rightarrow \overline{X}, \quad \pi(x) = [x] \text{ (} x \text{ 决定的等价类)}.$$

例1. 商构造是从已知集合、以及其中的一个等价关系出发, 构造新集合的方法. 例如, 令 $X =$ 地球上现存人口的集合.

1) 如果 $a, b \in X$ 同姓, 则记 $a \sim b$. 显然 $\sim$ 是 X 中的一个等价关系, 相应的商集和商映射分别是

$$\overline{X} = \text{姓氏的集合(百家姓)}; \quad \pi: X \rightarrow \overline{X}, \quad \pi(x) = x \text{ 的姓氏}.$$

2) 如果 $a, b \in X$ 有相同国籍, 记 $a \sim b$, 则 $\sim$ 是 X 中的一个等价关系, 此时

$$\overline{X} = \text{全体国家的集合}; \quad \pi: X \rightarrow \overline{X}, \quad \pi(x) = x \text{ 的国籍}.$$

3) 并非所有二元关系都是等价关系: 对于 $a, b \in X$, 用 $a \sim b$ 表示 “ a 喜欢 b ”. 则 $a \sim b$ 不是 X 中的等价关系.

下设 (X, τ) 是一个拓扑空间, 而 $\sim$ 是集合 X 中的一个等价关系. 考虑商集和商映射:

$$\pi: X \rightarrow \overline{X} = X / \sim.$$

以及商集 $\overline{X}$ 中的 “子集簇” $\bar{\tau} = \{U \subset \overline{X}, \pi^{-1}(U) \in \tau\} \subset 2^{\overline{X}}$.

定理3.1: 已知如上.

- 1) 子集簇 $\bar{\tau}$ 是商集 $\overline{X}$ 上的一个拓扑;
- 2) 商映射 $\pi: (X, \tau) \rightarrow (\overline{X}, \bar{\tau})$ 是拓扑空间之间的连续满射.

所得拓扑空间 $(\overline{X}, \bar{\tau})$ 称为原空间 (X, τ) 关于等价关系 $\sim$ 的**商空间**, 或**粘合空间**.

证明: 先证子集簇 $\bar{\tau}$ 满足 “开集公理”. 设 $\{U_\lambda \in \bar{\tau}, \lambda \in \Lambda\}$ 是 $\overline{X}$ 的子集簇 $\bar{\tau}$ 中的一簇成员.

- a) 由 $\pi^{-1}(\phi) = \phi \in \tau$, $\pi^{-1}(\overline{X}) = X \in \tau$ 知, $\phi, \overline{X} \in \bar{\tau}$;
- b) 若 $|\Lambda|$ 有限, 则由 $\pi^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \pi^{-1}(U_\lambda) \in \tau$ 知 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \bar{\tau}$.
- c) 若 $|\Lambda|$ 任意, 则由 $\pi^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \pi^{-1}(U_\lambda) \in \tau$ 知 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \bar{\tau}$.

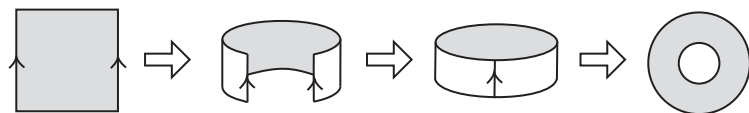
最后, 商映射 π 的连续性由 $\bar{\tau}$ 的定义所保证. $\square$

(常见空间的几何表述)

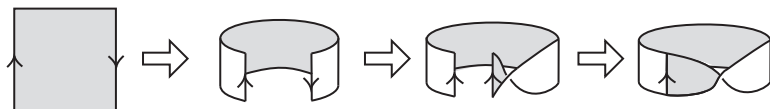
例2. 拓扑空间的商构造(或粘合构造)提供了从简单几何体, 以及其中的简单等价关系, 出发, 构造或表述新空间的方法. 考虑平面中的正方形

$$I^2 = I \times I = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq s, t \leq 1\}.$$

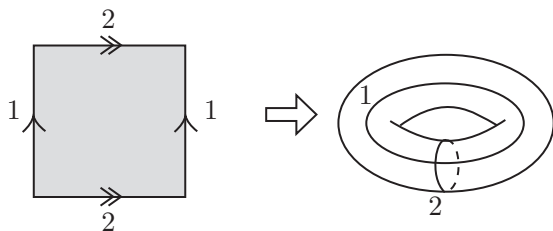
a) 在 I^2 引入等价关系 $\sim$ 如下: $x \sim x, \forall x \in I^2$ 且 $(0, t) \sim (1, t), 0 \leq t \leq 1$. 所得商空间 $I^2 / \sim$ 是**圆柱面**:



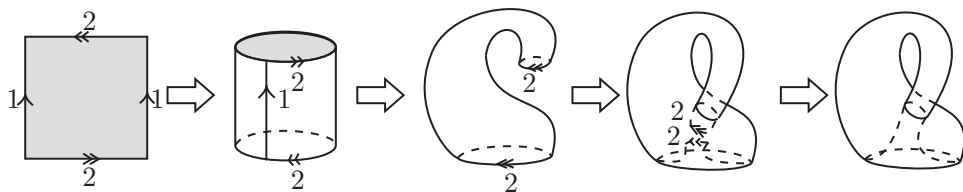
b) 在 I^2 引入等价关系 $\sim$ 如下: $x \sim x, \forall x \in I^2$ 且 $(0, t) \sim (1, 1-t), 0 \leq t \leq 1$. 所得商空间 $I^2 / \sim$ 是**Mobius 带**:



c) 在 I^2 引入等价关系 $\sim$ 如下: $x \sim x, \forall x \in I^2$ 且 $(0, t) \sim (1, t), (s, 0) \sim (s, 1), 0 \leq s, t \leq 1$. 所得商空间 $I^2 / \sim$ 是**环面**:



d) 在 I^2 引入等价关系 $\sim$ 如下: $x \sim x, \forall x \in I^2$ 且 $(0, t) \sim (1, t), (s, 0) \sim (1-s, 1), 0 \leq s, t \leq 1$. 所得商空间 $I^2 / \sim$ 是**Klein 瓶**:



2.2.2 商空间 $\overline{X} = X/\sim$ 上的连续映射

定理3.2: 已知商映射 $\pi: X \rightarrow \overline{X}$, 拓扑空间 Z , 以及集合间的对应 $f: \overline{X} \rightarrow Z$. 则 f 是连续映射的充要条件是复合映射 $f \circ \pi$ 连续:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi \downarrow & \searrow f \circ \pi & \\ \overline{X} & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

证明: 充分性显然, 考虑必要性.

设 $f \circ \pi: X \rightarrow Z$ 连续, 则对于 Z 的任一开集 $U \subset Z$, 有

$$(f \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(f^{-1}(U)) \in \tau.$$

根据 τ 的定义, $f^{-1}(U) \in \tau$, 必要性得证。□

反之, 考虑映射的下放问题: 已知商映射 $\pi: X \rightarrow \overline{X}$ 以及连续映射 $F: X \rightarrow Z$, 何时存在一个连续映射 $f: \overline{X} \rightarrow Z$, 满足映射的等式

$$F = f \circ \pi?$$

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi \downarrow & \searrow F & \\ \overline{X} & \xrightarrow{?} & Z \end{array}$$

推论: 如果下放问题 $F = f \circ \pi$ 有解 f , 则必唯一。

定理3.3: 映射下放问题 $F = f \circ \pi$ 有解 f 的充分必要条件是: 对于任意两点 $x, y \in X$, 只要 $\pi(x) = \pi(y)$ ($x \sim y$), 就有 $F(x) = F(y)$.

证明: 设 $f: \overline{X} \rightarrow Z$ 是分解问题的一个解, 则对于 $x, y \in X$, $\pi(x) = \pi(y)$, 复合映射

$$F = f \circ \pi: X \rightarrow Z.$$

满足 $F(x) = F(y)$.

反之, 如果在条件 $x, y \in X$, $\pi(x) = \pi(y)$ 下, 关系式 $F(x) = F(y)$ 成立, 则集合间对应

$$f: \overline{X} \rightarrow Z, \quad f(\pi(x)) = F(x)$$

定义合理, 且满足 $F = f \circ \pi$. 根据定理3.2, 上述映射 f 连续。□

(常见空间的几何表述)

2.2.3 实射影空间与环面

商构造的基本作用是, 从简单几何体以及其中的等价关系出发, 构造新空间和新映射. 本节讨论进一步的例子.

我们回顾一下, 所谓 n 维实射影空间 $(\mathbb{R}P^n, d)$ 是如下定义的度量空间

$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1}$ 中全体过原点的直线的集合;

$d: \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}$, $d(l_1, l_2) = l_1$ 和 l_2 的最小夹角的度数.

另一方面, 在单位球面 S^n 中引入等价关系 $\sim: x \sim y \Leftrightarrow y = \pm x$. 从而有商空间和商映射

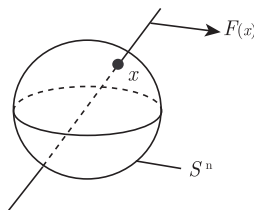
$$\pi: S^n \rightarrow S^n / \sim$$

在 n 维闭球体 D^n 中引入等价关系 $\sim: x \sim y \Leftrightarrow x = y$, 或 $x, y \in \partial D^n$ 且 $y = \pm x$. 于是有商空间与商映射:

$$\pi^+: D^n \rightarrow D^n / \sim.$$

命题1: 下述三个拓扑空间彼此同胚 $\mathbb{R}P^n$, $S^n / \sim$, $D^n / \sim$.

证明: 考虑连续满射 $F: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $F(x) =$ 单位向量 x 与原点的连线:



进而考虑映射的下放问题:

$$\begin{array}{ccc} S^n & & \\ \pi \downarrow & \searrow F & \\ S^n / \sim & \text{---?---} & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

其中 π 是商 (粘合) 映射. 因为 $F(x) = F(y)$ 等价于 $y \sim x$, 根据定理3.3, 映射的下放问题有唯一的一个解

$$f: S^n / \sim \rightarrow \mathbb{R}P^n.$$

它是一个连续单射. 因为 F 是满射且 $F = f \circ \pi$, f 亦是满射. 总之, f 是连续双射.

由于 $S^n / \sim$ 紧致且 $\mathbb{R}P^n$ 是 T_2 空间, 根据定理 2.1., f 是一个同胚.

考虑 S^n 的上半球面

$$S_+^n = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid |x|^2 + t^2 = 1, \quad t \geq 0\}.$$

并记 $F^+ := F|_{S_+^n}$. 则上述连续映射的交换图表在子空间 S_+^n 上的限制诱导交换图表:

$$\begin{array}{ccc} S_+^n & & \\ \downarrow & \searrow F_+ & \\ S_+^n / \sim & \xrightarrow{f_+} & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

其中 F^+ 亦是满射. 由于在自然同胚 $S_+^n \cong D^n$ 之下, S^n 中的等价关系 $\sim$ 对应了 D^n 中的等价关系 $\sim$, 并且 f_+ 是从紧致空间到 T_2 空间的连续双射, 从而是一个同胚变换: $D^n / \sim \cong \mathbb{R}P^n$. $\square$

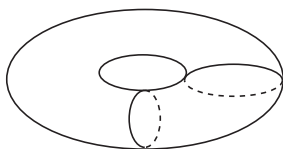
补注: 上面证明中的连续映射 F , 称为球面上的**实 Hopf 映射**, 它也是射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 的**万有覆叠** (第3章).

推论: 实射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 是

- 1) 将 2 维球面每对对径点粘合所得曲面
- 2) 将 2 维闭圆盘的边界圆周上每对对径点粘合所得曲面. $\square$

推论: 实射影直线 $\mathbb{R}P^1$ 同胚于单位圆周 S^1 . $\square$

定义: 乘积空间 $S^1 \times S^1$ 称为**2 维环面**, 记为 T^2 .



设 $\mathbb{C}$ 是全体复数的集合 (实平面). 由于 $S^1 = \{e^{2\pi it} \in \mathbb{C}, t \in [0, 1]\}$, 从而有

$$T^2 = \{(e^{2\pi is}, e^{2\pi it}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, s, t \in [0, 1]\}.$$

另一方面, 考虑平面 $\mathbb{R}^2 = \{(s, t), s, t \in \mathbb{R}\}$ 中的等价关系:

$$(s, t) \sim (s', t') \Leftrightarrow s - s' \in \mathbb{Z}; \quad t - t' \in \mathbb{Z}.$$

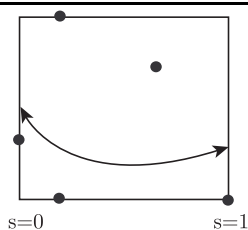
于是有商空间及商映射

$$\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \sim.$$

考虑正方形 $I^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2, s, t \in [0, 1]\}$, 以及其中的等价关系

$$(s, t) \sim (s', t') \Leftrightarrow s - s', t - t' \in \{0, \pm 1\}.$$

(常见空间的几何表述)



从而有商空间及商映射 $\pi^+ : I^2 \rightarrow I^2 / \sim$.

命题2: 下列三个拓扑空间彼此同胚: $T^2, \mathbb{R}^2 / \sim, I^2 / \sim$.

证明: 考虑连续满射 $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$, $F(s, t) = (e^{2\pi is}, e^{2\pi it})$, 以及映射的下放问题:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & & \\ \pi \downarrow & \searrow & F \\ \mathbb{R}^2 / \sim & \xrightarrow{?} & T^2 \end{array}$$

其中 π 是商 (粘合) 映射. 因为

$$\begin{aligned} F(s, t) = F(s', t') &\iff e^{2\pi is} = e^{2\pi is'}, e^{2\pi it} = e^{2\pi it'} \\ &\iff s - s' \in \mathbb{Z}, t - t' \in \mathbb{Z} \\ &\iff (s, t) \sim (s', t'). \end{aligned}$$

下放问题存在唯一解

$$f : \mathbb{R}^2 / \sim \rightarrow T^2.$$

进一步, 由于含入映射 $I^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 保持等价关系 $\sim$, 上面映射的交换图表在正方形 $I^2 \subset \mathbb{R}^2$ 上的限制诱导交换图表

$$\begin{array}{ccc} I^2 & & \\ \pi_+ \downarrow & \searrow & F_+ \\ I^2 / \sim & \xrightarrow{?} & T^2 \end{array}$$

由于 F_+ 是满射, 从而 f_+ 和 f 是满射. 此外, 由于

$$\begin{aligned} f[s, t] = f[s', t'] &\Rightarrow F(s, t) = F(s', t') \\ &\Rightarrow (s, t) \sim (s', t') \Rightarrow [s, t] = [s', t'], \end{aligned}$$

f 和 f_+ 均为单射. 最后, 由于 I^2 紧致, 环面 T^2 是 T_2 空间, f 和 f_+ 均是同胚. $\square$

补注: 上面证明中的连续映射 F , 是环面 T^2 的万有覆叠 (第3章).

推论: 环面 T^2 是将正方形 $I^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2, s, t \in [0, 1]\}$ 的两对对边保定向粘合所得曲面. $\square$

2.2.4 商空间 X/A

定义: 已知 T_1 拓扑空间 (X, τ) 以及它的一个闭子空间 $A \subset X$. 在 X 中引入等价关系 $\sim_A$ 如下:

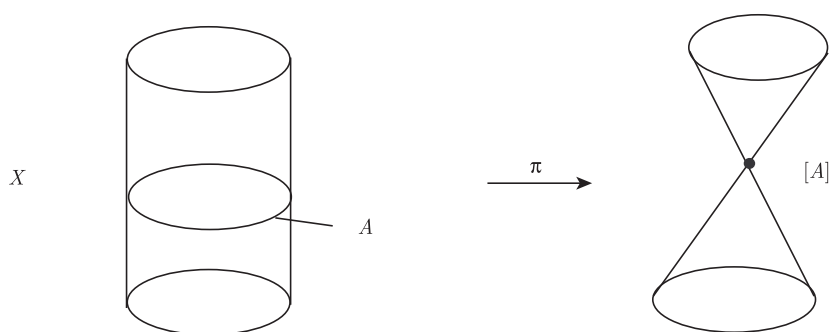
$$x \sim_A y \Leftrightarrow x = y \text{ 或 } x, y \in A.$$

记相应的商空间和商映射为:

$$\pi: X \rightarrow X/A := X/\sim_A.$$

其中, 商空间 X/A 称为“在 X 中将闭子空间 A 粘合为一点所得空间”. 其中的粘合点是:

$$\pi(A) = [A] \in X/A. \quad \square$$



命题: 商映射 $\pi: X \rightarrow X/A$ 具有以下性质:

- 1) π 在补空间 $X - A$ 上的限制是一个同胚 $X - A \rightarrow X/A - \{[A]\}$.
- 2) 对于任意一点 $x \in X$, 有

$$\pi^{-1}[x] = \begin{cases} x, & \text{若 } x \notin A \\ A, & \text{若 } x \in A \end{cases}$$

- 3) X/A 中的拓扑是 $\tau_{X/A} = \{\pi(U), \pi(V), U, V \in \tau, U \cap A = \emptyset, A \subset V\}$. $\square$

例: 商空间 X/A 具有多种表现形式:

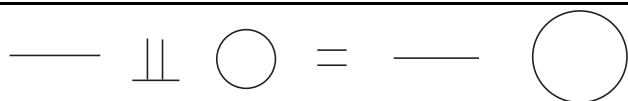
1) **无交并空间:** 已知两个 T_1 空间 (X, τ) , 与 (Y, τ') . 它们的**无交并**是如下规定的拓扑空间

- a) 作为集合 $X \sqcup Y$;
- b) $U \subset X \sqcup Y$ 是开集的充要条件是

$$U = U_1 \sqcup U_2, \quad U_1 \in \tau, \quad U_2 \in \tau'.$$

图示:

(常见空间的几何表述)



2) **一点并空间**: 已知两个拓扑空间 (X, τ) , (Y, τ') , 以及定点 $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. 考虑由两点所构成的闭子空间 $A = \{x_0, y_0\} \subset X \sqcup Y$. 商空间 $(X \sqcup Y)/A$ 称为空间 X 和 Y 的一点并空间, 记为

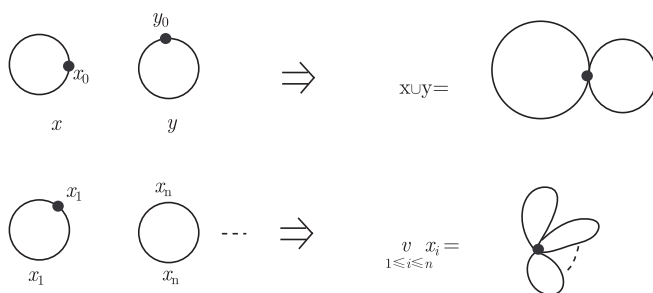
$$X \vee Y := Y \vee_{(x_0, y_0)} X.$$

类似地, 对于 k 个取定基点的拓扑空间 $x_i \in X_i, 1 \leq i \leq k$, 也可以定义它们的一点并空间:

$$X_1 \vee X_2 \vee \cdots \vee X_k := X_1 \sqcup X_2 \sqcup \cdots \sqcup X_k / A$$

其中 $A = \{x_1, \cdots, x_k\}$.

图示:



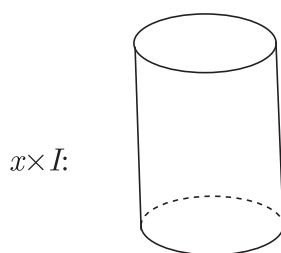
例1: 设 $A = \{x_1, \cdots, x_k\} \subset S^1$ 是一个有限点集. 则有 $S^1/A = S^1 \vee \cdots \vee S^1$, 以及连续满射

$$\pi : S^1 \rightarrow S^1 \vee \cdots \vee S^1.$$

例2: 设 $D_i \subset S^n, i = 1, 2, \cdots, k$ 是 S^n 中 k 个彼此不相交的开球体, 并令 $A = S^n - (D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_k)$ 则有 $S^n/A = S^n \vee \cdots \vee S^n$, 以及连续满射

$$\pi : S^n \rightarrow S^n \vee \cdots \vee S^n.$$

3) **柱空间, 锥空间**: 对于拓扑空间 X , 乘积空间 $X \times [0, 1]$ 称为以 X 为底的柱空间.



在柱空间 $X \times I$ 中,

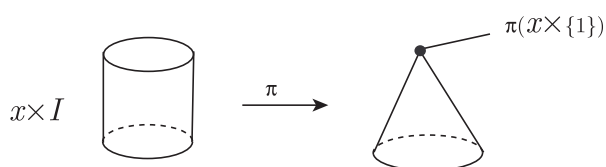
a) 对于 $t \in [0, 1]$, 子空间 $X \times \{t\} \subset X \times [0, 1]$ 称为“高度为 t 的等高面”;

b) 对于 $x \in X$, 子空间 $x \times [0, 1]$ 称为过 $x \in X$ 点的直母线;

c) 子空间 $X \times \{0\}$, $X \times \{1\}$ 分别称为柱空间 $X \times [0, 1]$ 的上底和下底;

商空间 $CX := \frac{X \times I}{X \times \{1\}}$ 称为以 X 为底的锥空间. 其商映射记为

$$\pi : X \times I \longrightarrow CX, \quad \pi(x, t) = [x, t].$$



习题1: 乘积空间 $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ 称为 n 维环面. 在 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中规定关系 $(x_1, \cdots, x_n) \sim (y_1, \cdots, y_n) \Leftrightarrow x_i - y_i \in \mathbb{Z}$. 证明

1) $\sim$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个等价关系;

2) T^n 同胚于商空间 $\mathbb{R}^n / \sim$.

习题2: 在商空间 X/A 的定义中, 为何要求 $A \subset X$ 是一个闭子空间?

习题3: 设 S^{n-1} 是 $n-1$ 维球面. 证明 $CS^{n-1} \cong D^n$.

提示: 考虑映射的分解问题

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} \times I & & \\ \downarrow & \searrow F & \\ CS^{n-1} & \dashrightarrow & D^n \end{array}$$

其中 $F(x, t) = (1-t)x$. 它的解即所求同胚. $\square$

习题4: 设 $A \subset X$ 是闭子空间. 证明

(常见空间的几何表述)

- 1) 如果 X 连通, 则商空间 X/A 连通;
- 2) 如果 X 紧致, 则商空间 X/A 紧致;
- 3) X 是 $T_1 + T_3$ 空间, 则商空间 X/A 是 T_2 空间。□

习题5.: 设 $A \subset S^2$ 是一个纬圆, 画出商空间 S^2/A 以商映射 $\pi: S^2 \rightarrow S^2/A$ 。□

习题6.: 设 $\{x_1, \dots, x_k\} \subset S^1$ 是一个有限点集.

- 1) $S^1/\{x_1, \dots, x_k\} = ?$
- 2) 画出商空间及商映射 $\pi: S^1 \rightarrow S^1/\{x_1, \dots, x_k\}$. □

习题7.: 设 $\{x_1, \dots, x_n\} \subset S^2$ 是一个有限点集. 令

$$a = \min\{d(x_i, x_j), 1 \leq i \neq j, x_i \leq n\};$$

$$B\left(x_i, \frac{a}{3}\right) = \left\{x \in S^2, d(x_i, x) < \frac{a}{3}\right\}$$

$$A = S^2 - \sqcup B\left(x_i, \frac{a}{3}\right)$$

- 1) $S^2/A = ?$
- 2) 画出商空间与商映射 $\pi: S^2 \rightarrow S^2/A$. □

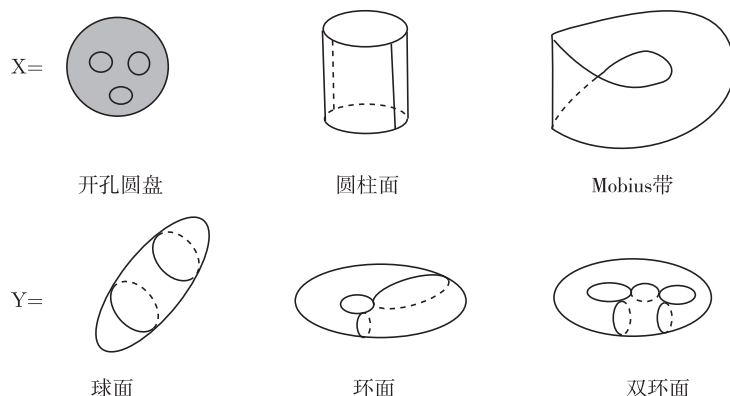
2.3 曲面与胞腔复形

本节介绍几何和代数拓扑学所关心的一类拓扑空间. 主要内容有:

- 4.1. 曲面的定义及例
- 4.2. 闭曲面的分类
- 4.3. 闭曲面与商空间 (闭曲面的圆盘表示)
- 4.4. 胞腔复形

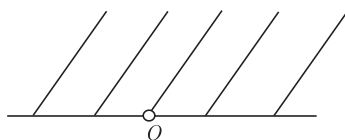
2.3.1 曲面的定义和例子

现实生活中可以观察到形形色色的曲面:



其中, X 是**有边曲面**, 它们的边界分别是 4 个圆周, 2 个圆周, 和 1 个圆周, 而 Y 是**无边曲面**. 为了对于此类几何对象一个统一表述, 我们引入“上半平面”的概念

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}.$$



定义: 拓扑空间 (M, τ) 称为一张**曲面**, 如果它是 T_2 空间, 并且对于每一点 $x \in M$, 存在开邻域 $U \ni x \in \tau$, 满足

$$(U, x) \cong \begin{cases} (\mathbb{R}^2, 0) \\ (\mathbb{R}_+^2, 0) \end{cases} \quad \text{或}$$

对于一张曲面 M , 令

$$\begin{aligned} M^\circ &= \{x \in M, \text{ 存在开邻域 } (U, x) \cong (\mathbb{R}^2, 0)\} \\ \partial M &= \{x \in M, \text{ 存在开邻域 } (U, x) \cong (\mathbb{R}_+^2, 0)\} \end{aligned}$$

则 M° 称为曲面 M 的**内部**, ∂M 称为曲面 M 的**边界**. 进一步,

- 1) 如果 $\partial M = \emptyset$, 则称 M 是**无边界曲面**.
- 2) 如果 M 紧致, 连通且无边界 $\partial M = \emptyset$, 则称 M 是**闭曲面**. □

补注: 1. 要说明曲面的“内点 $x \in M^\circ$ ”和“边界点 $x \in \partial M$ ”定义的合理性, 需要证明 $\mathbb{R}_+^2 \not\cong \mathbb{R}^2$.

若不然, 存在一个同胚变换 $f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 则它诱导同胚变换:

$$f: \mathbb{R}_+^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{f(0)\}.$$

(常见空间的几何表述)

从而诱导基本群的同构:

$$f_+ : \pi_1(\mathbb{R}_+^2 - \{0\}) = \{0\} \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{f(0)\}) = \mathbb{Z}.$$

得所需矛盾.

2. 曲面是局部道路连通空间, 从而连通曲面道路连通 (局部道路连通空间的每个道路连通分支即开且闭). $\square$

命题4.1: 下述拓扑空间是闭曲面

$$S^2(\text{球面}), \quad T^2 = S^1 \times S^1(\text{环面}), \quad \mathbb{R}P^2(\text{射影平面}).$$

证明: 设 $M = S^2$, T^2 , 或 $\mathbb{R}P^2$. 则 M 是紧致连通的 T_2 空间. 只需要证明, 对于任意一点 $x \in M$, 存在一个开邻域 $x \in U \in \tau$, 使得

$$(U, x) \cong (\mathbb{R}^2, 0)$$

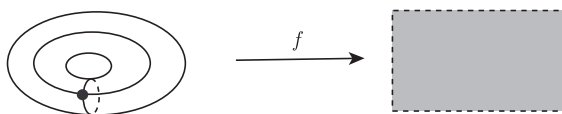
1) 对于任意一点 $x \in S^2$, 令 $f : S^2 - \{-x\} = U \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为球极投影. 它满足 $(U, x) \cong (\mathbb{R}^2, 0)$.

2) 对于任意一点 $x = (e^{2\pi ia}, e^{2\pi ib}) \in T^2 = S^1 \times S^1$, 令

$$U = \left\{ (e^{2\pi i(a+t)}, e^{2\pi i(b+s)}) \in T^2, t, s \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

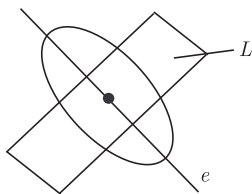
则映射

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \mathbb{R}^2 \\ f(e^{2\pi i(a+t)}, e^{2\pi i(b+s)}) &= (s, t) \end{aligned}$$

是一个同胚: $(U, x) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$:

3) 考虑 Hopf 映射 $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$. 对于任一直线 $l \in \mathbb{R}P^2$, 令 $L \subseteq \mathbb{R}^3$ 为它的正交补. 则平面 L 将 S^2 分为两个开半球面:

$$S^2 - S^2 \cap L = U_x \sqcup U_{-x},$$



其中 $\pm x$ 是 l 和 S^2 的两个交点, 而 f 的限制给出同胚

$$(U_x, x) = (\mathbb{R}^2, 0) \xrightarrow{f} (f(U_x), l). \square$$

.

2.3.2 闭曲面的分类定理

连通和构造(定义): 已知两张闭曲面, 在它们的内部各取一个闭圆盘 $D = D^2$

$$D \subset M, \quad D \subset N.$$

则有

$$\partial(M - \overset{\circ}{D}) \cong \partial(N - \overset{\circ}{D}) = \partial D = S^1$$

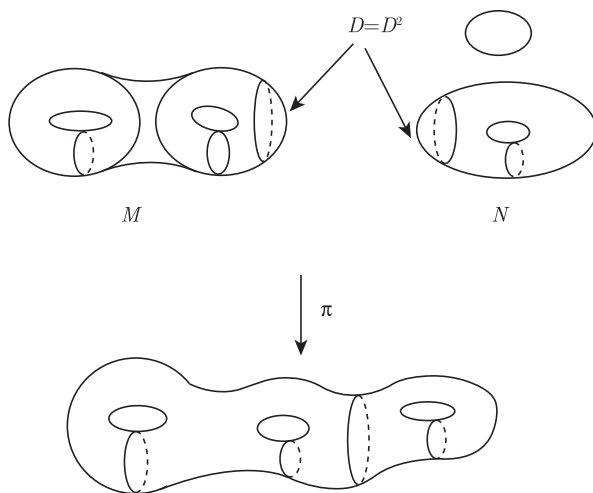
商空间

$$M \sharp N := \frac{(M - \overset{\circ}{D}) \sqcup (N - \overset{\circ}{D})}{x \in \partial(M - \overset{\circ}{D}) \sim x \in \partial(N - \overset{\circ}{D})}$$

称为 M 和 N 的**连通和**. 令

$$\pi : (M - \overset{\circ}{D}) \sqcup (N - \overset{\circ}{D}) \rightarrow M \sharp N$$

为商映射. $\square$



(常见空间的几何表述)

命题4.2 已知两张闭曲面 M, N

- 1) 连通和 $M \sharp N$ 是闭曲面;
- 2) $M \sharp N$ 的同胚型与闭圆盘 $D \subset M, D \subset N$ 的取法无关.

证明: 对于连通和中的一点点 $x \in M \sharp N$, 如果 $|\pi^{-1}(x)| = 1$, 则称 x 是**正常点**;
如果 $|\pi^{-1}(x)| = 2$, 则称 x 是**粘合点**. 结论 1) 的证明分三部分完成:

紧致性: 连通和 $M \sharp N$ 是紧致空间在连续映射 π 下的像, 从而紧致.

道路连通性: 由于 $M \sharp N = \pi(M - \overset{\circ}{D}) \cup \pi(N - \overset{\circ}{D})$ 且 $\pi(M - \overset{\circ}{D})$ 和 $\pi(N - \overset{\circ}{D})$ 道路连通, 只要证明存在一条道路 $\alpha: [0, 1] \rightarrow M \sharp N$, 使得

$$\alpha(0) \in \pi(M - D), \quad \alpha(1) \in \pi(N - D).$$

$M \sharp N$ 是**无边曲面**: 可两种情形讨论: 设 $x \in M \sharp N$.

- i) 如果 x 是正常点;
- ii) 如果 x 是粘合点.

$M \sharp N$ 是 T_2 空间: 分如下三种情形讨论: 设 $x, y \in M \sharp N$ 且 $x \neq y$.

- i) x 和 y 均为正常点;
- ii) x 是正常点, y 是粘合点;
- iii) x 和 y 均为粘合点.

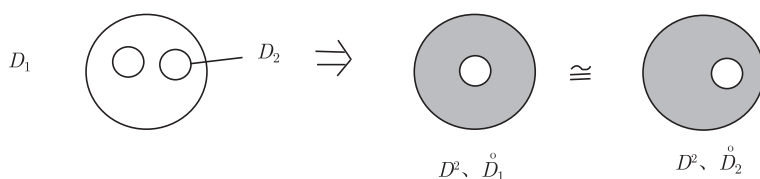
至此结论1)得证.

结论2)的证明依赖于 2 维闭圆盘 D^2 所具有的如下性质:

齐性引理: 设 $D_1, D_2 \subset \overset{\circ}{D}^2$ 是两个闭圆盘, 则存在一个同胚:

$$f: D^2 - \overset{\circ}{D}_1 \rightarrow D^2 - \overset{\circ}{D}_2$$

使得 $f|_{\partial D^2} = 1_{S^1}: S^1 \rightarrow S^1$.



根据命题4.1, 我们有3张“基础曲面”: 2 维球面 S^2 , 环面 T^2 , 射影平面 $\mathbb{R}P^2$.
进一步, 命题4.2断言, 任意两张闭曲面的连通和也是闭曲面.

定理4.3(闭曲面的分类定理, Mobius, 1875): 任一闭曲面同胚于下述曲面之一:

- 1) 2 维球面 S^2 ;
- 2) $nT^2 = T^2 \sharp \dots \sharp T^2$ (n-copies)

3) $m\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}P^2 \sharp \cdots \sharp \mathbb{R}P^2$ (m-copies). $\square$

图示:



补注: 定理3.1的证明分为两部分:

1. 定理中所列出的闭曲面两两不同胚. 这个结论的证明将用到基本群或同调论的内容. 在稍后的课程中将予以证明.

2. 任何闭曲面同胚于定理所列出的某个闭曲面. 这个结论的证明方法是下面将介绍的“闭曲面的多边形表示”.

补注: 曲面的连通和满足如下性质:

$$\begin{aligned} nT^2 \sharp mT^2 &= \sharp(n+m)T^2; \\ n\mathbb{R}P^2 \sharp m\mathbb{R}P^2 &= \sharp(n+m)\mathbb{R}P^2; \\ nT^2 \sharp m\mathbb{R}P^2 &= \sharp(2n+m)\mathbb{R}P^2. \end{aligned}$$

2.3.3 闭曲面的圆盘表示 (或多边形表示)

引理1: 已知平面 $\mathbb{R}^2$ 中两条长度相等的有向线段 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, 存在唯一等距变换 ($\Rightarrow$ 同胚) $f: \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{A'B'}$, 使得 $f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$.

已知单位圆周上两条弧长相等的定向圆弧 $\widehat{AB}$, $\widehat{A'B'}$, 存在唯一等距变换 ($\Rightarrow$ 同胚) $f: \widehat{AB} \rightarrow \widehat{A'B'}$, 使得 $f(\widehat{AB}) = \widehat{A'B'}$. $\square$

约定: 下设 D^2 是平面中的单位闭圆盘, 边界圆周赋予顺时针定向; Ω_n 是平面中的正 n 边形所界区域, 边界赋予顺时针定向. 则存在保持边界定向的同胚变换 $D^2 \cong \Omega_n$.

例1: 曲面的割补术 曲面的割补术是解析曲面整体结构的一个有效方式, 下面是一些相关示例:

A. 将 Mobius 带沿中线剪开, 所得曲面是圆柱面;

反之, 将正圆柱 $S^1 \times [0, 1]$ 的上底的对径点粘合, 所得曲面是 Mobius 带.

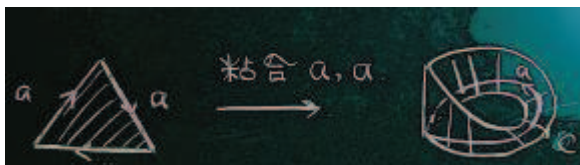
Mobius 带是从射影平面挖去一个2维开圆盘所得曲面 $\mathbb{R}P^2 - \overset{\circ}{D}$.

B. 将正三角形 Ω_3 的三边按顺时针方向依次标记为 $\{\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}\}$. 将其中的 $\{\vec{a}, \vec{a}\}$ 边用唯一保定向等距变换粘合, 所得商映射记作 $\pi: \Omega_3 \rightarrow M := \Omega_3 / \sim$. 则 M 是

i) 以 $\pi(c)$ 为边界圆周的 Mobius 带;

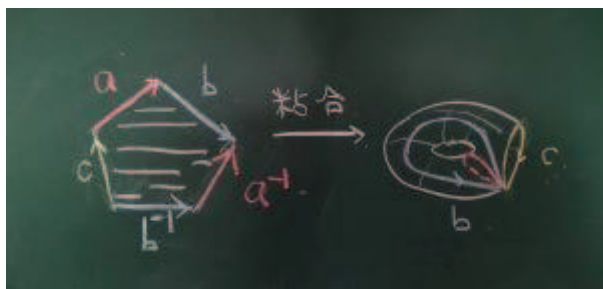
ii) 从射影平面挖去一个2维开圆盘所得曲面 $M = \mathbb{R}P^2 - \overset{\circ}{D}$, $\partial M = \pi(c)$.

(常见空间的几何表述)



C. 将正五边形 Ω_5 的五条边按顺时针方向依次标记为 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a^{-1}}, \vec{b^{-1}}, \vec{c}\}$. 将其中的 $\{\vec{a}, \vec{a^{-1}}\}$ 边用唯一保定向等距变换粘合, $\{\vec{b}, \vec{b^{-1}}\}$ 边用唯一保定向等距变换粘合, 所得商映射记作 $\pi: \Omega_5 \rightarrow M := \Omega_5 / \sim$. 则 M 是从环面 T^2 挖去一个2维开圆盘所得曲面:

$$M = T^2 - \overset{\circ}{D}, \partial M = \pi(c).$$



命题4.4: 将单位闭圆盘 D^2 的边界圆周 $4n$ 等份, 所得弧段按顺时针方向依次标记为

$$\{a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_n, b_n, a_n^{-1}, b_n^{-1}\}.$$

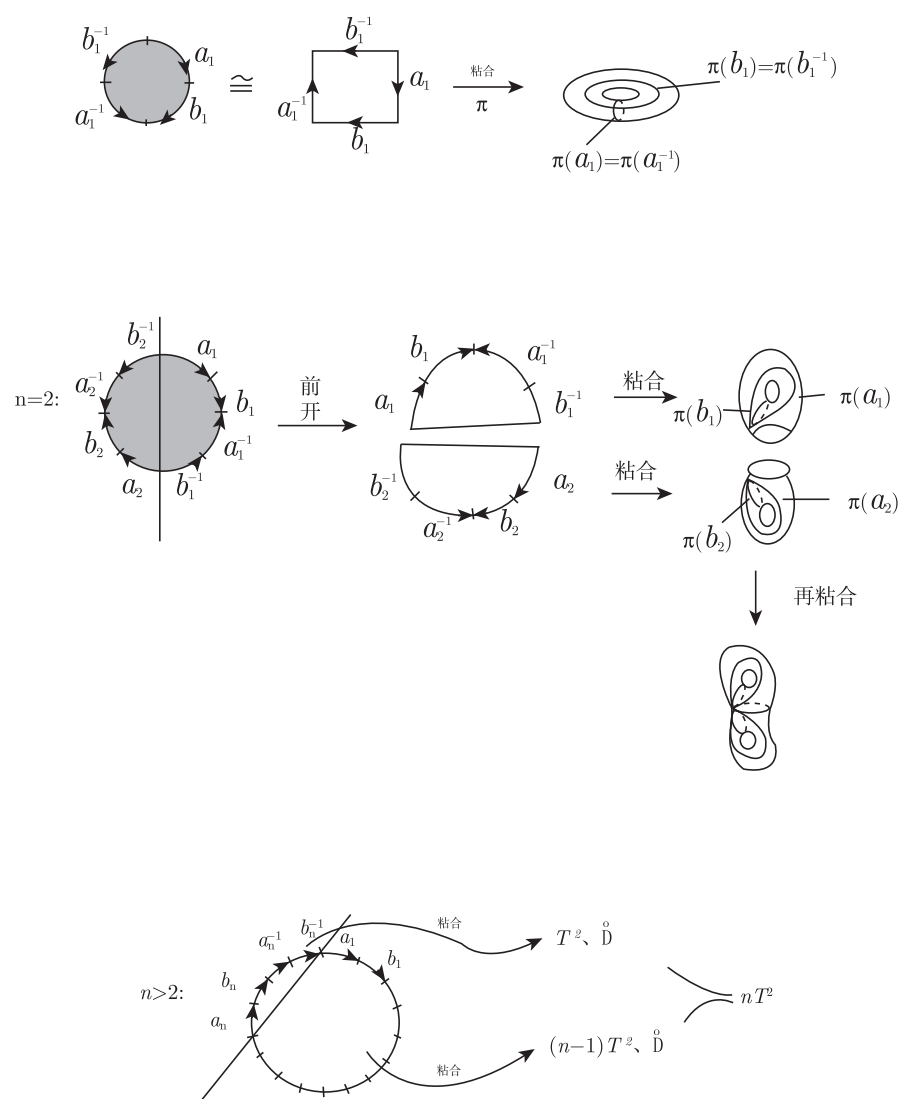
将每对定向圆弧 a_i 与 a_i^{-1} , b_i 与 b_i^{-1} 用唯一保持定向的等距变换粘合, 所得商空间 $\frac{D^2}{\langle a_i \sim a_i^{-1}, b_i \sim b_i^{-1} \rangle}$ 同胚于 $n \cdot T^2$.

命题4.5: 将单位闭圆盘 D^2 的边界圆周 $2n$ 等份, 将所得弧段按顺时针方向依次标记为

$$\{a_1, a_1, a_2, a_2, \dots, a_n, a_n\}$$

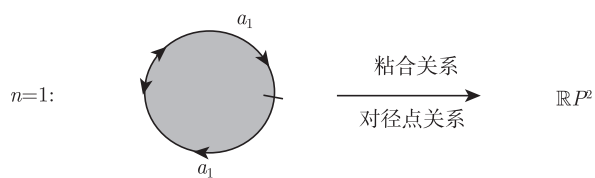
将每对定向圆弧 $\{a_i, a_i\}$ 用唯一保持定向的等距变换粘合, 所得商空间 $\frac{D^2}{\langle a_i \sim a_i \rangle}$ 同胚于 $n \cdot \mathbb{R}P^2$.

命题4.4的证明: 对于 $n = 1, 2, \dots, k$, 我们依次有:

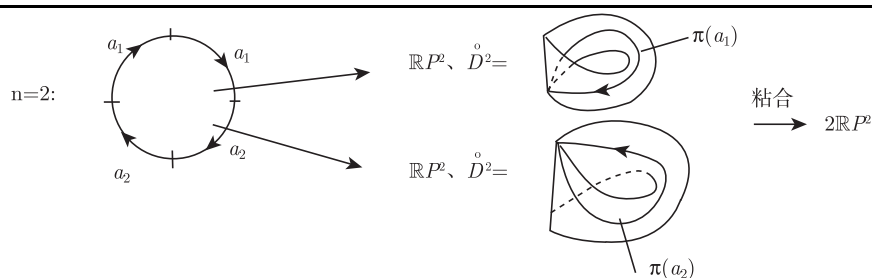


□

命题4.5的证明: 对于 $n = 1, 2, \dots, k$, 我们依次有:



(常见空间的几何表述)



□

推论4.6 在命题4.4中, 商映射 $\pi : D^2 \rightarrow nT^2$ 具有以下性质:

$$1) \pi(\partial D^2) = \pi(S^1) = \bigvee_{2n} S_i^1.$$

$$2) \pi|_{\overset{\circ}{D}^2} : \overset{\circ}{D}^2 \rightarrow nT^2 - \pi(\partial D^2) \text{ 是同胚.}$$

在命题4.5中, 商映射 $\pi : D^2 \rightarrow n\mathbb{R}P^2$ 具有以下性质:

$$1) \pi(\partial D^2) = \pi(S^1) = \bigvee_n S_i^1.$$

$$2) \pi|_{\overset{\circ}{D}^2} : \overset{\circ}{D}^2 \rightarrow n\mathbb{R}P^2 - \pi(\partial D^2) \text{ 是同胚. } \square$$

2.3.4 闭曲面与胞腔复形 (Cell complexes)

在代数拓扑学中, 最为常见的制作空间的几何方式是粘贴胞腔. 下面是它的定义。

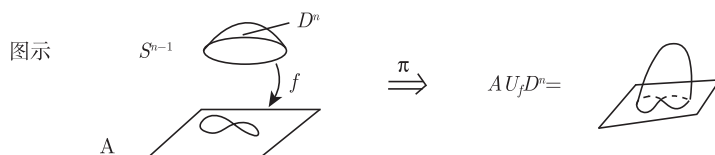
定义: 已知拓扑空间 A 以及一个连续映射 $f : S^{n-1} \rightarrow A$. 在无交并空间 $A \sqcup D^n$ 中引入下述等价关系 $\sim$

$$x \in \partial D^n = S^{n-1} \sim f(x) \in A.$$

从而得到商空间及商映射:

$$A \sqcup D^n \xrightarrow{\pi} A \cup_f D^n := \frac{A \sqcup D^n}{x \in S^{n-1} \sim f(x) \in A}.$$

商空间 $A \cup_f D^n$ 称为用 f 在 A 上粘贴了一个 n 维胞腔所得空间. □



定理4.7 商空间 $A \cup_f D^n$ 中的拓扑 τ_f 是

$$\tau_f = \{\pi(U_1 \sqcup U_2) \mid U_1 \subset A, U_2 \subset D^n \text{ 是开子空间; 且 } f^{-1}(U_1) = U_2 \cap S^{n-1}\}.$$

进一步, 商映射 $\pi: A \sqcup D^n \rightarrow A \cup_f D^n$ 具有下述性质:

- 1) π 在 A 上的限制是一个包含 $i_A := \pi|_A: A \rightarrow \pi(A) \subseteq A \cup_f D^n$
- 2) π 在 $\mathring{D}^n$ 上的限制是一个同胚 $\pi|_{\mathring{D}^n}: \mathring{D}^n \rightarrow A \cup_f D^n - \pi(A)$

证明: 设 $U \subset A \cup_f D^n$ 是一个开子空间, 由商拓扑的定义

$$\pi^{-1}(U) = U_1 \sqcup U_2, \quad U_1 \subset A \text{ 开; } U_2 \subset D^n \text{ 开.}$$

显然 $f^{-1}(U_1) = U_2 \cap S^{n-1}$. 进一步, 由关系 $\pi^{-1}(\pi(A)) = A \sqcup S^{n-1}$ 知, 性质 1), 2) 成立. $\square$

例4.8: 在代数拓扑学中, 粘贴胞腔是极为常见的描述和制作空间的方式. 我们来看一些基本例子.

1. 如果 $A = \{p\}$ 是单点空间. 则对于映射 $f: S^{n-1} \rightarrow A$, 有 $A \cup_f D^n = S^n$.

2. 任取一点 $p \in S^n$. 令 $f: S^k \rightarrow p \in S^n$ 为常值映射, 则 $A \cup_f D^{k+1} = S^n \vee S^{k+1}$.

3. 一般说来, 空间 $A \cup_f D^n$ 的同胚型, 即依赖于 A, n , 更依赖于映射 f 的几何行为. 例如, 我们取 $A = S^1 = \{z \in \mathbb{C}, z\bar{z} = 1\}$, 对于一个整数 k , 定义映射 $f_k: S^1 \rightarrow S^1, f_k(z) = z^k$. 则有

$$A \cup_{f_k} D^2 = \begin{cases} S^1 \vee S^2, & k = 0; \\ D^2 & k = 1; \quad \square \\ \mathbb{R}P^2 & k = 2. \end{cases}$$

4. 令 A 为 $2n$ 个定向圆周的一点并空间:

$$A = \bigvee_{1 \leq i \leq n} (S^1(a_i) \vee S^1(b_i)).$$

将单位圆周 S^1 $4n$ 等份, 所得分点的集合记作 B , 所得弧段按顺时针方向依次标记为 $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_n, b_n, a_n^{-1}, b_n^{-1}$.

定义复合映射 $f_n = f'_n \circ \pi: S^1 \rightarrow A$ 如下:

1) $\pi: S^1 \rightarrow S^1/B$ 是商映射;

2) $f'_n: S^1/B \rightarrow A$ 将定向圆周 $S^1(a_i), S^1(b_i)$ 保定向且同胚地映到 $S^1(a_i), S^1(b_i)$; 将定向圆周 $S^1(a_i^{-1}), S^1(b_i^{-1})$ 反定向且同胚地映到 $S^1(a_i), S^1(b_i)$.

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\pi} & S^1/B = \bigvee_{1 \leq i \leq n} (S^1(a_i) \vee S^1(b_i) \vee S^1(a_i^{-1}) \vee S^1(b_i^{-1})) \\ f_n = f'_n \circ \pi & \searrow & f'_n \downarrow \\ & & A = \bigvee_{1 \leq i \leq n} (S^1(a_i) \vee S^1(b_i)) \end{array}$$

(常见空间的几何表述)

则根据推论4.6, $A \cup_{f_n} D^2 = nT^2$.

5. 令 A 为 n 个定向圆周的一点并空间: $A = \bigvee_{1 \leq i \leq n} S^1(a_i)$. 将单位圆周 S^1 $2n$ 等份, 所得分点的集合记作 B , 所得弧段按顺时针方向依次标记为 $a_1, a_1, \dots, a_n, a_n$.

定义复合映射 $g_n = g'_n \circ \pi : S^1 \rightarrow A$ 如下:1) $\pi : S^1 \rightarrow S^1/B$ 是商映射;2) $g'_n : S^1/B \rightarrow A$ 将定向圆周 $S^1(a_i)$ 保定向且同胚地映到 $S^1(a_i)$.

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\pi} & S^1/B = \bigvee_{1 \leq i \leq n} (S^1(a_i) \vee S^1(a_i)) \\ g_n = g'_n \circ \pi \searrow & & g'_n \downarrow \\ & & A = \bigvee_{1 \leq i \leq n} S^1(a_i) \end{array}$$

则根据推论4.6, 所得空间是 $A \cup_{g_n} D^2 = n\mathbb{R}P^2$. □约定: 上面例4中所引入的映射 $f_n = f'_n \circ \pi$, 将记作

$$f_n = \prod_{1 \leq i \leq n} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} : S^1 \rightarrow \bigvee_{2n} S^1 (\implies n \cdot T^2 = (\bigvee_{2n} S^1) \cup_{f_n} D^2)$$

上面例5中所引入的映射 $g_n = g'_n \circ \pi$, 将记作

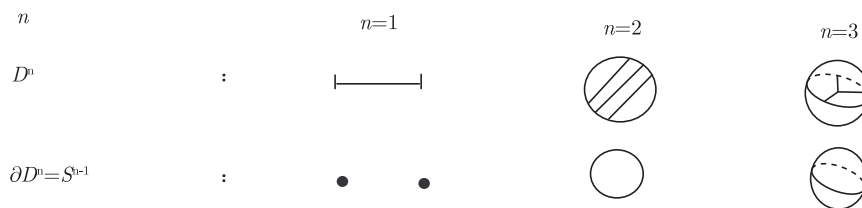
$$g_n = \prod_{1 \leq i \leq n} a_i a_i : S^1 \rightarrow \bigvee_n S^1 (\implies n \cdot \mathbb{R}P^2 = (\bigvee_n S^1) \cup_{g_n} D^2).$$

要把握一个拓扑空间 X 的整体构造, 可以从两个角度入手:1) X 由哪些基本几何部件构成?

2) 部件之间用何种方式粘贴在一起?

如果你对这两个问题有很好了解, 则对 X 就有了全局把握。

欧氏空间中 n 维单位闭球 $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|^2 \leq 1\}$ 体无疑是最简几何部件. 它的边界是 $(n-1)$ 维球面 $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, |x|^2 = 1\}$:

定义: 一个拓扑空间 X 称为一个胞腔复形, 如果它有一串闭子空间

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_n = X.$$

满足以下性质:

- 1) $X_0 = \{p\}$; (即单点空间)
- 2) $X_k = X_{k-1} \cup_{f_k} D^{n_k}$. $\square$

例4.8中所构造的空间均是胞腔复形。作为补充, 我们证明:

命题 4.9(射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 的胞腔分解) 令 $\gamma_{n-1} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ 为 Hopf 映射, 则 $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{\gamma_{n-1}} D^n$. 从而 $\mathbb{R}P^n$ 有胞腔分解

$$\mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}P^{n-1} \subseteq \mathbb{R}P^n.$$

证明: 欧氏空间的合入序列:

$$\mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

诱导射影空间的合入序列:

$$\mathbb{R}P^0 \hookrightarrow \mathbb{R}P^1 \hookrightarrow \mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$$

需要证明, 每对相邻的射影空间 $\mathbb{R}P^{k-1}$ 和 $\mathbb{R}P^k$ 只相差一个 k 维胞腔, 且该胞腔的粘贴映射恰是 γ_{k-1} .

考虑映射的下放问题:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}P^{n-1} \sqcup S_+^n & & \\ \pi \downarrow & \searrow & F = i_{n-1} \sqcup \gamma_n^+ \\ \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{\gamma_{n-1}} D^n & \xrightarrow[-?]{f} & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

其中

- 1) $i_{n-1} : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ 是含入映射 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 所诱导的连续映射;
- 2) $S_+^n = \{(x_1 \cdots x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, |x|^2 = 1, x_{n+1} \geq 0\} \cong D^n$ 是上半球面;
- 3) γ_n^+ 是 Hopf 映射 $\gamma_n : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ 在子空间 S_+^n 上的限制.

由于 F 是连续满射且满足

$$F(x) = F(y) \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y), \quad x, y \in \mathbb{R}P^{n-1} \sqcup D^n$$

上图所规定的下放问题存在唯一解 $f : \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{\gamma_{n-1}} D^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, 它是一个连续双射. 由于 $\mathbb{R}P^{n-1} \cup_{\gamma_{n-1}} D^n$ 紧致且 $\mathbb{R}P^n$ 为 T_2 空间, 从而 f 是一个同胚. $\square$

结语: 胞腔复形是用最简单的几何部件 $\{D^n \mid n \geq 0\}$, 通过粘贴胞腔的方式, 所递归构造出的拓扑空间.

- 若干球面的一点并空间 $S^{n_1} \vee \cdots \vee S^{n_k}$ 是胞腔复形;
- 所有闭曲面是胞腔复形;

(常见空间的几何表述)

- 实射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 是胞腔复形;
- 莫尔斯理论基本定理: 任意一个 n 维 C^∞ 流形, 是一个胞腔复形□

习题1: 利用定理4.7 证明

- 1) 若 A 紧致, 则 $A \cup_f D^n$ 紧致;
- 2) 若 A 道路连通, 则 $A \cup_f D^n$ 道路连通;
- 3) 若 A 是 T_2 空间, 则 $A \cup_f D^n$ 是 T_2 空间.□

习题2: 证明连通曲面道路连通.

习题3: 设 $D \subset \mathbb{R}P^2$ 是以点 $x \in \mathbb{R}P^2$ 为中心的开圆盘. 证明补空间 $\mathbb{R}P^2 - \overset{\circ}{D} \cong$ Mobius 带. □习题4: 证明 $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong S^1 \times I / (e^{2\pi \cdot it}, 0) \sim e^{-2\pi \cdot it}, 1)$, 后者是克莱因瓶. □习题5: 设 M 是闭莫比乌斯带. 证明商空间 $M/\partial M$ 同胚于射影平面 $\mathbb{R}P^2$.习题6: 在射影平面中分别找出两个嵌入圆周 $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}P^2$, 使得

- a) 补空间 $\mathbb{R}P^2 - C_1$ 是莫比乌斯带和一个圆盘的无交并;
- b) 补空间 $\mathbb{R}P^2 - C_2$ 是一个圆盘.

习题7: 画出双环面 $2 \cdot T^2$, 并在期中画出四条简单闭曲线 $C_1, C_2, C_3, C_4 \subset 2 \cdot T^2$, 使得补空间 $T^2 - \cup C_i$ 同胚于开圆盘. 此处简单闭曲线是指同胚于单位圆周的曲线.习题8: 对于一个有限维胞腔复形 X , 令 $\beta_k(X) = X$ 中 k 维胞腔的个数. 则 X 的欧拉示性数是:

$$\chi(X) = \beta_0 - \beta_1 + \cdots + (-1)^k \beta_k + \cdots$$

计算下列空间的欧拉示性数:

- 1) 若干球面的一点并空间 $S^{n_1} \vee \cdots \vee S^{n_k}$;
- 2) 所有闭曲面;
- 3) n 维实射影空间 $\mathbb{R}P^n$.

2.4 拓扑群

定义 已知集合 G 以及它的一个元素 $e \in G$. 如果存在集合间的对应

- 1) $\mu: G \times G \rightarrow G$ (简记 $\mu(a, b) = a \cdot b$)
- 2) $\nu: G \rightarrow G$ (简记 $\nu(a) := a^{-1}$)

满足如下性质

i) 结合律: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

ii) 单位律: $e \cdot a = a \cdot e = a$;

iii) $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

则称四元组 (G, μ, ν, e) 是以 μ 为乘法, ν 为求逆, e 为单位的群.

进一步, 如果 G 是一个 T_2 空间, 并且群运算 μ, ν 均是拓扑空间之间的连续映射, 则称 G 是一个拓扑群. $\square$

例: 复平面中的单位复数 $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, z \cdot \bar{z} = 1\}$ 是一个紧致连通 T_2 空间, 考察连续映射

$$\begin{aligned}\mu: S^1 \times S^1 &\rightarrow S^1, & \mu(z_1, z_2) &= z_1 \cdot z_2. \\ \nu: S^1 &\rightarrow S^1, & \nu(z) &= \bar{z}.\end{aligned}$$

以及点 $1 \in S^1$. 则 $(S^1, \mu, \nu, 1)$ 是以 1 为单位, μ 为乘法, ν 为求逆的群. 也称为圆周群. $\square$

本节的安排:

4.1. 正交群

4.2. 一般线性群;

4.2. 酉群;

4.3. 拓扑群的一般性质.

2.4.1 欧氏空间及其表现形式

定义: 对于一个实向量空间 V , 以及其上的一个正定二次型 (或内积) $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, 二元组 $(V, \langle, \rangle)$ 称为一个欧氏空间.

例1: 欧氏空间具有多种表现形式.

1) 令 $M_n(\mathbb{R})$ 为全体 $n \times n$ 阶实矩阵的集合:

$$M_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij})_{n \times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\}.$$

对于 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$, 我们有

加法运算+: $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), A + B := (a_{ij} + b_{ij});$

倍积运算 $\cdot: \mathbb{R} \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), \lambda \cdot A = (\lambda a_{ij}).$

据此, $M_n(\mathbb{R})$ 是一个实向量空间.

进一步, 令 $Tr: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ 是迹数函数, $^t: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ 是矩阵的转置运算, 则二元函数

$$\langle, \rangle: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \langle A, B \rangle = Tr(B^t A)$$

(常见空间的几何表述)

是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的一个正定二次型. 据此, 二元组 $(M_n(\mathbb{R}), \langle, \rangle)$ 是一个 n^2 维欧氏空间, 它与欧氏空间 $\mathbb{R}^{n^2}$ 等距:

$$f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}, f(A) = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n^2},$$

其中 A_k 是矩阵 A 的第 k 列.

2) 令 $M_n(\mathbb{C})$ 全体 $n \times n$ 阶复矩阵的集合 $\{A = (a_{ij})_{n \times n}, a_{ij} \in \mathbb{C}\}$. 则有一一对应:

$$h: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}), h(A) = h(A_1 + iA_2) = (A_1, A_2).$$

其中 $i \in \mathbb{C}$ 是纯虚数, A_1 和 A_2 分别是复矩阵 A 的“实部”和“虚部”. 从而 $M_n(\mathbb{C})$ 是一个 $\dim M_n(\mathbb{C}) = 2n^2$ 维实向量空间.

进一步, 令 $Re: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ 是取实部的映射, 设 $-: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ 是复矩阵的共轭变换, 则双线性映射

$$\langle A, B \rangle = Re(Tr(\overline{B}^T \cdot A)), \quad A, B \in M_n(\mathbb{C})$$

是 $M_n(\mathbb{C})$ 上的一个正定二次型. 据此, 二元组 $(M_n(\mathbb{C}), \langle, \rangle)$ 是一个 $2n^2$ 维欧氏空间.

3) 令 $T(n)$ 为全体上三角、正对角线的 $n \times n$ 阶实矩阵的集合

$$T(n) = \{A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbb{R}), a_{ii} > 0, a_{ij} = 0, i > j\}.$$

则 $T(n)$ 同胚于欧氏空间

$$T(n) \cong (\mathbb{R}^+)^n \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

其中 $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R}, r > 0\}$. $\square$

2.4.2 拓扑群的例子

A. 正交群: 考虑欧氏空间 $M_n(\mathbb{R})$ 之间的连续映射:

乘法运算: $\mu: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), \mu(A, B) = AB.$

转置运算: $\nu: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), \nu(A) = A^T.$

以及全体 n 阶正交矩阵构成的子空间

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), AA^T = I_n\}.$$

则 μ 和 ν 在 $O(n)$ 上的限制给出连续映射

$$\begin{aligned} \mu: O(n) \times O(n) &\rightarrow O(n), \quad \mu(A, B) = A \cdot B \\ \nu: O(n) &\rightarrow O(n), \quad \nu(A) = A^T. \end{aligned}$$

此外, 令 $I_n = \text{diag}\{1, \dots, 1\} \in O(n)$; $\bar{I}_n = \text{diag}\{-1, 1, \dots, 1\} \in O(n)$.

定理4.1 拓扑空间 $O(n)$ 是以 μ 为乘法, ν 为求逆, I_n 为单位的拓扑群.

进一步, $O(n)$ 是紧致空间, 它恰有两个道路连通分支 $O(n) = O^+(n) \sqcup O^-(n)$, 其中 $I_n \in O^+(n)$, $\bar{I}_n \in O^-(n)$.

证明: 正交群 $O(n)$ 是欧氏空间 $M_n(\mathbb{R})$ 的子空间, 从而是 T_2 空间. 进一步, 矩阵的乘法运算 μ 和转置运算 ν 连续, 且满足以为单位 I_n 的乘法与求逆的公理性质, 因此是一个拓扑群.

下证 $O(n)$ 紧致. 欧氏空间之间的连续映射 $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $f(A) = A \cdot A^T$ 满足 $f^{-1}(I_n) = O(n)$, 从而 $O(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ 是闭子空间. 进一步, 对于任一正交矩阵 $A \in O(n)$, 它的长度的平方是

$$\langle A, A \rangle = \text{Tr}(A^T A) = n.$$

这表明 $O(n)$ 位于欧氏空间 $M_n(\mathbb{R})$ 中半径为 $\sqrt{n}$ 的球面中, 因此 $O(n)$ 又是一个有界集. 总之 $O(n)$ 是欧氏空间 $M_n(\mathbb{R})$ 中的有界闭集, 因此是紧致空间.

下证 $O(n)$ 恰有两个道路是通分支. 行列式的映射

$$\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \det(A) = |A|$$

是欧氏空间 $M_n(\mathbb{R})$ 上的 n 次多项式函数, 因此连续. 它在子空间 $O(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ 上的限制给出连续满射 $\det: O(n) \rightarrow \{\pm 1\}$. 令 $O^+(n) = \det^{-1}(1)$; $O^-(n) = \det^{-1}(-1)$, 则得拓扑群 $O(n)$ 的一个无交闭子空间的分解:

$$O(n) = O^+(n) \sqcup O^-(n),$$

从而 $O(n)$ 至少有两个连通分支. 下证:

- 1) $O^+(n)$ 道路连通;
- 2) $O^-(n) \cong O^+(n)$, 从而也道路连通.

对于任一正交矩阵 $A \in O^+(n)$, 由 Jordan 标准型定理, 存在 $P \in O(n)$, 使得

$$A = \begin{cases} P \begin{pmatrix} c(\theta_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c(\theta_k) \end{pmatrix} P^T & \text{if } n = 2k; \\ P \begin{pmatrix} c(\theta_1) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & c(\theta_k) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T & \text{if } n = 2k + 1. \end{cases}$$

其中

$$c(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

定义道路 $\alpha: [0, 1] \rightarrow O^+(n)$ 为

(常见空间的几何表述)

$$\alpha(t) = \begin{cases} P \begin{pmatrix} c(t\theta_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c(t\theta_k) \end{pmatrix} & P^\tau \text{ if } n = 2k; \\ P \begin{pmatrix} c(t\theta_1) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & c(t\theta_k) & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & P^\tau \text{ if } n = 2k + 1. \end{cases}$$

则有 $\alpha(1) = A$; $\alpha(0) = I_n \in O^+(n)$. 因此 $O^+(n)$ 道路连通.

连续映射 $f: O^+(n) \rightarrow O^{-1}(n)$, $f(A) = A \cdot \bar{I}_n$ 是一个同胚, 从而分支 $O^{-1}(n)$ 道路连通. $\square$

定义: 拓扑群 $O(n)$ 称为 n 阶正交群. $\square$

B. 一般线性群: 利用行列式映射 $\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, 可引进欧氏空间 $M_n(\mathbb{R})$ 的子空间:

$$GL_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}) - \det^{-1}(0)$$

即全体 n 阶非奇异矩阵所构成的子空间. 考虑欧氏空间之间的连续映射

$$\nu^*: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), \quad \nu^*(A) = A^*$$

其中 $A^* = (A_{ij})_{n \times n}$ 是如下定义的 A 的伴随矩阵:

A_{ij} = 从 A^τ 中去掉第 i 行、第 j 列所得 $(n-1)$ 阶方阵的行列式.

则有

$$A \cdot \nu^*(A) = |A| \cdot I_n.$$

定理4.3 在矩阵的乘法和求逆运算

$$\mu: GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}), \quad \mu(A, B) = A \cdot B,$$

$$\nu: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}), \quad \nu(A) = \frac{1}{|A|} A^*,$$

之下, $GL_n(\mathbb{R})$ 是一个以 μ 为乘法, ν 为求逆, $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ 为单位的拓扑群.

进一步, 拓扑空间之间的连续映射 $f: O(n) \times T(n) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$, $f(A, C) = A \cdot C$ 是一个同胚.

证明: 参见习题2及其提示.

定义: 拓扑群 $GL_n(\mathbb{R})$ 称为 n 阶一般线性群.

C. 酉群: 考虑欧氏空间 $M_n(\mathbb{C}) =$ 以及连续映射

$$\text{矩阵的乘法: } \mu: M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C}), \quad \mu(A, B) = A \cdot B.$$

转置共轭运算: $\nu: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$, $\nu(A) = \overline{A}^T$.
全体酉矩阵的集合构成了欧氏空间 $M_n(\mathbb{C})$ 的一个子空间

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), A\overline{A}^T = I_n\}.$$

并且连续映射 μ 和 ν 在 $U(n)$ 上的限制给出连续映射:

$$\mu: U(n) \times U(n) \rightarrow U(n)$$

$$\nu: U(n) \rightarrow U(n).$$

定理4.2: $U(n)$ 是以 μ 为乘法, ν 为求逆, $I_n \in U(n)$ 为单位的紧致, 道路连通的拓扑群.

证明: 参见习题1及其提示。

定义: 拓扑群 $U(n)$ 称为 n 阶酉群. $\square$

2.4.3 拓扑群的一般性质

在前面的讨论中, 利用线性代数和欧氏几何的知识, 我们得到拓扑群的几组例子:

n 阶正交群: $O(n) = O^+(n) \sqcup O^-(n)$

n 阶酉群: $U(n)$

n 阶一般线性群: $GL_n(\mathbb{R})(\cong O(n) \times T(n))$.

本节讨论所有拓扑群所具有的一般性质.

定义: 已知拓扑群 G 以及一个元素 $g \in G$. 群 G 的自映射

$$L_g, R_g: G \rightarrow G$$

$$L_g(x) = g \cdot x; R_g(x) = x \cdot g, \quad x \in G$$

分别称为群 G 关于元素 $g \in G$ 的左平移和右平移.

命题1 左平移 L_g 和右平移 R_g 都是群 G 的同胚变换。

证明: L_g 是连续映射的复合:

$$G \rightarrow G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

$$x \rightarrow (g, x) \rightarrow g \cdot x$$

因此连续. 根据 L_g 的定义知

$$L_g \circ L_{g^{-1}} = 1_G; L_{g^{-1}} \circ L_g = 1_G.$$

因此 L_g 和 $L_{g^{-1}}$ 互为逆映射, 据此 L_g 是拓扑空间的同胚变换. $\square$

(常见空间的几何表述)

推论(拓扑群的齐性引理): 设 $U \subset G$ 是单位元 $e \in G$ 的一个开邻域. 则对于任意元素 $g \in G$, 子空间 $g \cdot U, U \cdot g \subset G$ 均是 $g \in G$ 的开邻域.

证明: 设 τ 是 G 中的拓扑. 对于 $e \in U \in \tau$, 由于 L_g 是同胚, 故有 $g \in g \cdot U = L_g(U) \in \tau$. $\square$

补注: 利用齐性引理可证明, 拓扑群 $O(n), U(n), GL_n(\mathbb{R})$ 均是 C^∞ 流形, 从而它们都是李群. $\square$

命题2: 设 G 是一个拓扑群, 并且 $K \subset G$ 是包含群单位 $e \in G$ 的极大连通分支. 则 K 是群 G 的正规子群.

证明: 需要证明两点

(1) K 是一个子群;

(2) 对于任意 $g \in G$, 都有 $g \cdot K \cdot g^{-1} \subset K$.

群 G 的乘法运算 μ 和求逆运算 ν 在 K 上的限制分别给出连续映射:

$$\begin{aligned}\mu: K \times K &\rightarrow G \times G \xrightarrow{\mu} G, \\ \nu: K &\rightarrow G \xrightarrow{\nu} G.\end{aligned}$$

由于 K 连通, $e \in K, \mu(e \times e) = e, \nu(e) = e$, 以及连通空间在连续映射下的像连通, 我们得到

$$\mu(K \times K) \subseteq K; \quad \nu(K) \subseteq K.$$

从而 K 是 G 的子群.

同理, 对于任意群元 $g \in G$, 考察连续映射

$$T_g: K \rightarrow G, \quad T_g(k) = gkg^{-1}, \quad k \in K,$$

由于 K 是连通且 $e \in K, T_g(e) = e$, 因此

$$T_g(K) = g \cdot K \cdot g^{-1} \subseteq K.$$

从而 K 是 G 的正规子群. $\square$

命题3: 设 G 是一个连通拓扑群, $U \in G$ 是单位元 $e \in G$ 的一个开邻域. 令 $\langle U \rangle = U$ 中的元素在乘法和求逆运算下所生成的子群. 则

$$G = \langle U \rangle.$$

证明: 记 $H = \langle U \rangle$. 只需要 $H \subseteq G$ 是既开且闭的子空间. 对于任意 $h \in H$, 显然有

$$h \in L_h(U) = h \cdot U \subset H,$$

其中 $L_h(U)$ 是开子空间, 从而 H 是开子空间.

下证余集 $G - H$ 也是 G 的开子空间。对于任意 $g \in G - H$, 它有开邻域 $g \in L_g(U) = g \cdot U$. 如果 $L_g(U) \cap H \neq \emptyset$, 则存在

$$x = g \cdot h \in H, \quad h \in U.$$

它表明 $g = x \cdot h^{-1} \in H$, 这与 $g \in G - H$ 相矛盾. 据此

$$L_g(U) \cap H = \emptyset \Leftrightarrow L_g(U) \subset G - H \Leftrightarrow G - H \text{ 开}. \quad \square$$

习题1: 证明 n 阶酉群 $U(n)$ 是一个紧致、道路连通的 T_2 空间.

提示: $U(n)$ 是欧氏空间 $M_n(\mathbb{C})$ 中的有界闭集. 道路连通性的证明可利用 Jordan 标准型定理: 对于每个 $A \in U(n)$, 存在 $P \in U(n)$, 使得

$$A = P \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} \overline{P}^T \quad \square$$

习题2. 证明拓扑空间之间的连续映射 $f: O(n) \times T(n) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$, $f(A, C) = A \cdot C$ 是一个同胚.

提示: 证明 f 是一个连续单射, 它的逆映射由 Gram-Schmidt 正交化给出.

习题3. 证明连通分支 $O^+(n) \subset O(n)$ 是一个正规子群 (称为 n 阶特殊正交群).

连通分支 $GL^+(n; \mathbb{R}) \subset GL(n; \mathbb{R})$ 是一个正规子群 (称为 n 阶一般特殊线性群). $\square$

习题4. 证明两个拓扑群的乘积空间是一个拓扑群.

尤其是, 单位圆周群 S^1 的 n 重乘积 $T^n := S^1 \times \cdots \times S^1$ 是一个拓扑群, 称作 n 维环面群.

习题5. 证明 Abel 群 $\mathbb{R}$ 的任何一个离散子群是无限循环群 $\mathbb{Z}$.

习题6. 证明圆周群 S^1 是一个 Abel 群. 它的任何一个离散子群是一个有限循环群 $\mathbb{Z}_n$.

第3章 基本群与复迭空间

3.1 同伦论的基本概念

黎曼的观点是,我们生活在一个正在发生变化的物理时空中,几何学不应局限于研究静止世界中的固定不动的物体的几何性质,而更应该关心随着时间的推移,正在发生弹性变化的几何对象和物理过程(映射)。生物的世界更是如此,随着时间的推移,细胞在产生变异,蛋白质在发生折叠,DNA 在进行重组,等等。为了刻画、表述、并且研究变化多端的几何世界,拓扑学家们建立了同伦理论,以便找出处于变化过程中的空间和映射所具有的**不变要素**。

本节的安排是:

- 1.1. 连续映射的同伦类和同伦集
- 1.2. 同伦问题(例)
- 1.3. 拓扑空间的同伦型和收缩核.

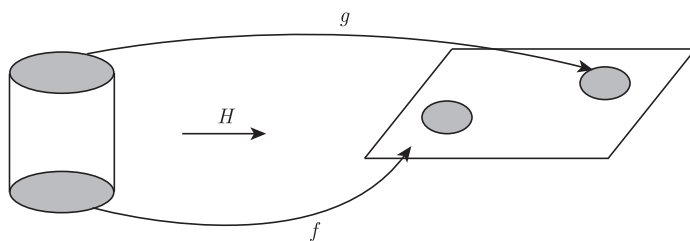
3.1.1 同伦类和同伦集

定义: 已知两个拓扑空间 X, Y . 它们之间的两个连续映射 $f, g: X \rightarrow Y$. 称为**同伦**的, 记为 $f \simeq g$, 如果存在一个连续映射 $H: X \times I \rightarrow Y$, 满足

$$H|X \times 0 = f, \quad H|X \times 1 = g: X \rightarrow Y.$$

此处, 映射 H 称为从映射 f 到 g 的一个**伦移**, 记为 $f \simeq g$ 或 $f \simeq_H g$. $\square$

观察: 同伦的概念有两种几何阐释。设 $f \simeq_H g: X \rightarrow Y$. 则有:



- 1) 令 $H_t = H|X \times \{t\}: X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$. 则在单位时间内, 连续映射 f 可通过映射簇 H_t , 连续形变到映射 g .

2) 对于空间 X 中的每一点 $x \in X$, 伦移 H 将过 x 点的直母线 $x \times I$, 映为空间 Y 中从 $f(x)$ 到点 $g(x)$ 的一条道路; 并且这些道路关于点 $x \in X$ 的选取连续.

已知两个拓扑空间 X, Y , 令 $C(X, Y)$ 表示全体连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 的集合.

命题1: 在集合 $C(X, Y)$ 中, 同伦关系 $\simeq$ 是一个等价关系.

证明: . 对于 $f, g, h \in C(X, Y)$, 我们有

1) 自反性 $f \simeq f$: 令 $H: X \times I \rightarrow Y$ 为 $H(x, t) = f(x)$. 它表明 $f \simeq_H f$.

2) 对称性: 如果 $f \simeq_H g$, 令 $G: X \times I \rightarrow Y$ 为 $G(x, t) = H(x, 1 - t)$. 它表明 $g \simeq_G f$.

3) 传递性: 如果 $f \simeq_{H_1} g$, $g \simeq_{H_2} h$, 定义 $H: X \times I \rightarrow Y$ 为

$$H(x, t) = \begin{cases} H_1(x, 2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ H_2(x, 2t - 1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

由于 $H_1(x, 1) = H_2(x, 0) = g$, 根据焊接引理, H 连续, 且满足 $f \simeq_H h$. $\square$

定义: 考虑集合 $C(X, Y)$ 关于等价关系 $\simeq$ 的商集和商映射:

$$\pi: C(X, Y) \rightarrow [X, Y] := C(X, Y) / \simeq.$$

1) 对于 $f \in C(X, Y)$, 记 $[f] = \pi(f) \in [X, Y]$. 它称为映射 f 决定的同伦类.

2) 商集合 $[X, Y]$ 称为从 X 到 Y 的全体连续映射的同伦类的集合. $\square$

已知三个拓扑空间 X, Y, Z , 连续映射的复合决定了集合间的对应

$$C(X, Y) \times C(Y, Z) \rightarrow C(X, Z), (f, g) \rightarrow g \circ f.$$

命题2: 如果 $f \simeq f': X \rightarrow Y$, $g \simeq g': Y \rightarrow Z$, 则有

$$g \circ f \simeq g' \circ f': X \rightarrow Z.$$

因此, 连续映射的复合诱导了同伦类的复合

$$[X, Y] \times [Y, Z] \rightarrow [X, Z], ([f], [g]) \rightarrow [g \circ f].$$

证明: 设 $f \simeq_H f'$, $g \simeq_G g'$. 下证 $g \circ f \simeq g' \circ f'$. 考虑连续映射

$$X \times I \xrightarrow{H} Y \xrightarrow{g} Z.$$

它表明 $g \circ f \simeq_{g \circ H} g \circ f'$.

再考虑连续映射

$$X \times I \xrightarrow{f' \times \text{id}} Y \times I \xrightarrow{G} Z.$$

它表明 $g \circ f' \simeq_{G \circ f' \times \text{id}} g' \circ f'$. 由同伦关系的传递性知

$$g \circ f \simeq g \circ f' \simeq g' \circ f'. \quad \square$$

3.1.2 同伦问题

同伦论的核心问题是：

同伦问题： 已知两个连续映射 $f, g \in C(X, Y)$ ，判定 $f \simeq g$? (或 $[f] = [g]$?)

补注： 对于一个子空间 $A \subset X$ 以及一个连续映射 $f: A \rightarrow Y$ ，映射的下放问题

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ i \downarrow & \searrow & f \\ X & \xrightarrow{F?} & Y \end{array}$$

也称为**映射的扩张问题**：

同伦问题是扩张问题的下述特殊情形：

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \sqcup X \times \{1\} & & \\ i \downarrow & \searrow & f \sqcup g \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{H?} & Y \end{array}$$

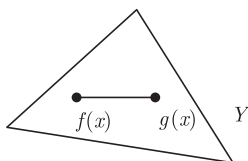
命题3： 如果 $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个凸集，则对于任意两个连续映射 $f, g \in C(X, Y)$ ，都有 $f \simeq g$ 。

尤其是，任一连续映射 $f \in C(X, Y)$ 同伦于常值映射。

证明： 由于 Y 是凸集，对于任意一点 $x \in X$ ，像点 $f(x), g(x) \in Y$ 之间的连线

$$l_x: (1-t)f(x) + tg(x), \quad t \in [0, 1]$$

位于 Y 。



据此，定义连续映射 $H: X \times I \rightarrow Y$ 为

$$H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

它满足 $f \simeq_H g$. $\square$

推论： 如果拓扑空间 Y 同胚于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸集，并且 $y_0 \in Y$ 。则 $[X, Y] = [y_0]$ ，其中 $y_0: X \rightarrow Y$ 表示到点 y_0 的常值映射。

命题4 已知两个到球面的连续映射 $f, g \in C(X, S^n)$ 。如果

$$f(x) \neq -g(x), \forall x \in X,$$

(即 $g(x)$ 永远不是 $f(x)$ 的对径点), 则有 $f \simeq g$.

证明: 由于 $f(x) \neq -g(x), \forall x \in X$, 映射

$$H: X \times I \rightarrow S^n, H(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{|(1-t)f(x) + tg(x)|}$$

定义合理且连续. 它满足 $f \simeq_H g$. (注意 $(1-t)f(x) + tg(x) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, f(x) = -g(x)$.)

3.1.3 拓扑空间的同伦等价(或同伦型)

定义: 已知两个拓扑空间 X, Y . 如果存在一对连续映射

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \xleftarrow{g} & \end{array}$$

满足 $g \circ f \simeq id_X: X \rightarrow X$, $f \circ g \simeq id_Y: Y \rightarrow Y$, 则称

1) 空间 X 和 Y **同伦等价**, 记为 $X \simeq Y$; (或 X 和 Y 具有相同伦型, 记为 $[X] = [Y]$);

2) 映射 f 是从 X 到 Y 的一个**同伦等价**, 映射 g 是 f 的一个**同伦逆**. $\square$

根据同伦关系的自反性, 我们有:

推论1: 如果空间 X 和 Y 同胚 $X \cong Y$, 则它们同伦等价 $X \simeq Y$. $\square$

推论2: 在全体拓扑空间的集合中, 同伦关系 $X \simeq Y$ 是一个等价关系.

证明: 自反性和对称性显然. 只需要证明关系 $X \simeq Y$ 具有传递性. 对于两个同伦等价 $X \simeq Y, Y \simeq Z$ 我们有:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{f'} & Z \\ & \xleftarrow{g} & & \xleftarrow{g'} & \end{array}$$

其中 $g \circ f \simeq id_X$, $f \circ g \simeq id_Y$; $g' \circ f' \simeq id_Y$, $f' \circ g' \simeq id_Z$. 令

$$F = f' \circ f: X \rightarrow Z; \quad G = g \circ g': Z \rightarrow X.$$

则由命题2知

$$\begin{aligned}[G \circ F] &= [g \circ g' \circ f' \circ f] = [g \circ id_Y \circ f] \\ &= [g \circ f] = [id_X]\end{aligned}$$

同理, $[F \circ G] = [id_Z]$. $\square$

定义 (相对同伦): 已知子空间 $A \subset X$, 以及两个连续映射 $f, g: X \rightarrow Y$, 它们满足 $f|_A = g|_A: A \rightarrow Y$. 如果存在一个从 f 到 g 的伦移 $H: X \times I \rightarrow Y$, 满足

$$H|_{A \times t} = f|_A = g|_A, \quad t \in I$$

则称 f 和 g 相对于子空间 A 同伦, 记为 $f \simeq_H g \text{ (rel. } A\text{)}$. $\square$

定义: 对于一个子空间 $A \subset X$, 令 $i_A: A \rightarrow X$ 表示含入映射.

如果存在一个连续映射 $r: X \rightarrow A$, 满足 $r \circ i_A = id_A$, 则称 A 是 X 的一个收缩核, r 称为从 X 到 A 的一个收缩映射.

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{i_A} \\ \xleftarrow{r} \end{array} X$$

进一步

- 1) 如果 $i_A \circ r \simeq id_X$, 则称 A 是 X 的一个形变收缩核;
- 2) 如果 $i_A \circ r \simeq id_X \text{ rel}(A)$, 则称 A 是 X 的一个强形变收缩核. $\square$

推论3: 如果 $A \subset X$ 是形变收缩核, 则含入映射 $i_A: A \rightarrow X$ 和收缩映射 $r: X \rightarrow A$ 是拓扑空间之间的同伦等价. $\square$

例1(习题3): 收缩问题是同伦论中的一类基本问题. 它的提法如下: 给定一个子空间 $A \subset X$, 判定 A 是否是 X 的收缩核? 如果答案是肯定的, 可以进一步问: A 是否是 X 的形变收缩核? 这两个问题均是扩张问题的特殊情形, 可用下面的图表来表示:

$$\begin{array}{ccc} A & & X \times \{0\} \sqcup X \times \{1\} \\ i_A \downarrow & \searrow^{id} & i \downarrow \\ X & \xrightarrow{r?} A & X \times I \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} & & id_X \sqcup r \\ & & \searrow \\ & & H? \\ & & \xrightarrow{\quad} X \end{array}$$

作为例子我们有, 下列子空间 $A \subset X$ 均是强形变收缩核, 从而 $A \simeq X$.

- 1) $c_0 \in \Omega$, 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸子集;
- 2) $X \times \{t\} \subset X \times I, t \in I$
- 3) $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$;
- 4) $S^{n-1} \subset D^n - \{0\}$ (或 $S^{n-1} \subset D^n - D^n \left(\frac{1}{2}\right)$);

其中 $D^n\left(\frac{1}{2}\right)$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 $\frac{1}{2}$ 的闭球体.

5) 穿了两个孔的圆盘以及其中的8字形. $\square$

下面考虑一类较为常见的收缩核的例子. 对于一个连续映射 $f: X \rightarrow Y$, 考虑商空间以及商映射

$$\pi: X \times I \sqcup Y \rightarrow M_f := \frac{X \times I \sqcup Y}{(x, 0) \sim f(x)}.$$

其中 M_f 称为 f 的映射柱. 由于 π 在 Y 上的限制是一个单射, Y 自然地成为 M_f 的一个子空间, 于是有包含映射

$$i_Y = \pi|_Y: Y \rightarrow M_f.$$

命题5: 对于任意连续映射 $f: X \rightarrow Y$, 子空间 $Y \subset M_f$ 是强形变收缩核.

证明: 考虑连续映射的下放问题

$$\begin{array}{ccc} X \times I \sqcup Y & & \\ \pi \downarrow & \searrow & F = f \circ p \sqcup id_Y \\ M_f & \xrightarrow{r} & Y \end{array}$$

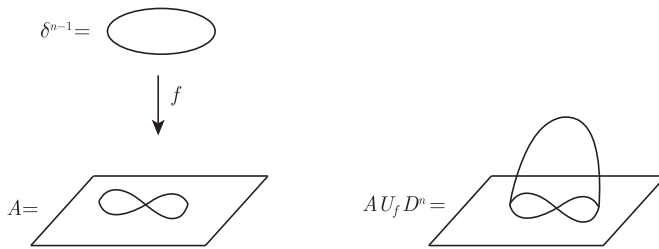
其中 $p: X \times I \rightarrow X$, $p(x, t) = x$ 是到第一因子投影. 由于 $z \sim z' \Rightarrow F(z) = F(z')$, 它有唯一一个解 $r: M_f \rightarrow Y$, 即所求收缩映射.

同理, 定义 $H: M_f \times I \rightarrow M_f$ 为

$$H(z, t) = \begin{cases} \pi(x, ts), & \text{若 } z = \pi(x, s), (x, s) \in X \times I \\ y & \text{若 } z = \pi(y), y \in Y. \end{cases}$$

则 H 连续且满足 $id_{M_f} \simeq i_Y \circ r \circ (rel(Y))$. $\square$

对于连续映射 $f: S^{n-1} \rightarrow A$, 考察用 f 在 A 上粘贴了一个 n 维胞腔所得空间:



令

$$D^n\left(\frac{1}{2}\right) = \{x \in \overset{\circ}{D}^n \subset A \cup_f D^n, |x|^2 \leq \frac{1}{2}\}.$$

根据命题5, 存在空间的同胚与同伦等价

$$A \cup_f D^n - \mathring{D}^n \left(\frac{1}{2} \right) = M_f \simeq A.$$

从而得

命题6: 子空间 $A \subset A \cup_f D^n - \mathring{D}^n \left(\frac{1}{2} \right)$ 是一个强形变收缩核.

习题1: 如果 $f: X \rightarrow S^n$ 不是满射, 则 f 同伦于某个常值映射. $\square$

习题2. 如果 $f: S^n \rightarrow S^n$ 不同伦于恒同映射, 则方程 $f(x) = -x$ 存在一个解. $\square$

习题3. 设 M_f 是连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 的映射柱, $i: Y \rightarrow M_f$ 是含入映射. 证明对于任一连续映射 $g: W \rightarrow M_f$, 存在一个连续映射 $g': W \rightarrow Y$, 满足 $g \simeq i \circ g'$. $\square$

习题4. 证明下列子空间 $A \subset X$ 均是强形变收缩核:

A. $c_0 \in \Omega$, 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸子集;

提示: 对于 $c_0 \in \Omega$, 常值映射 $r: \Omega \rightarrow A = \{c_0\}$ 是一个收缩映射. 令 $H: \Omega \times I \rightarrow \Omega$ 为 $H(x, t) = (1-t)x + tc_0$, $x \in \Omega$. 则有

$$\text{i) } H|_{t=0} = id_{\Omega}: \Omega \rightarrow \Omega$$

$$\text{ii) } H|_{t=1} = id_{c_0}: c_0 \rightarrow c_0$$

$$\text{iii) 对于 } t \in I, \text{ 有 } H(c_0, t) = c_0.$$

它表明 $id_{\Omega} \simeq i_{c_0} \circ r \text{ rel } \{c_0\}$.

B. $X \times \{0\} \subset X \times I$;

提示: 对于 $X \times \{0\} \subset X \times I$, 收缩映射 $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\}$ 是 $r(x, t) = (x, 0)$.

令 $H: (X \times I) \times I \rightarrow X \times I$ 为 $H(x, t; s) = (x, ts)$. 则有

$$\text{i) } H|_{s=1} = id_{X \times I}; \quad H|_{s=0} = i_{X \times 0} \circ r;$$

$$\text{ii) 对于所有 } x \in X, \text{ 有 } H(x, 0, s) = (x, 0). \text{ 从而}$$

$$id_{X \times I} \simeq i_X \circ r \text{ rel } (X \times 0).$$

C. $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$;

提示: 对于子空间 $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$, 收缩映射 $r: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ 是 $r(x) = x/\|x\|$. 令

$$H: (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times I \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$$

为 $H(x, t) = (1-t) \cdot x + t \cdot r(x)$, 则有

$$id_{X \times I} \simeq i_{S^{n-1}} \circ r \text{ rel } (S^{n-1}).$$

D. $S^{n-1} \subset D^n - \{0\}$ (或 $S^{n-1} \subset D^n - D^n \left(\frac{1}{2}\right)$.) 其中 $D^n \left(\frac{1}{2}\right)$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 $\frac{1}{2}$ 的闭球体. $\square$

习题5: 在 2 维闭曲面 nT^2 和 $n\mathbb{R}P^2$ 中, 取嵌入的开圆盘 (半径充分小)

$$\overset{\circ}{D}^2 \subset nT^2, \overset{\circ}{D}^2 \subset n\mathbb{R}P^2.$$

证明

$$nT^2 - \overset{\circ}{D}^2 \simeq \bigvee_{2n} S^1, \quad n\mathbb{R}P^2 - \overset{\circ}{D}^2 \simeq \bigvee_n S^1.$$

尤其是:

$$[nT^2 - \overset{\circ}{D}^2] = [\bigvee_{2n} S^1], \quad [n\mathbb{R}P^2 - \overset{\circ}{D}^2] = [\bigvee_n S^1]. \square$$

习题6: 在 n 维流形 $\mathbb{R}P^n$ 中, 设 $\overset{\circ}{D}^n \subset \mathbb{R}P^n$ 是半径充分小嵌入开圆盘. 证明

$$\mathbb{R}P^n - \overset{\circ}{D}^n \simeq \mathbb{R}P^{n-1}. \square$$

提示: 习题4, 5的解答需要用到下述胞腔分解, 以及命题6.

$$nT^2 = (\bigvee_{2n} S^1) \cup_{f_n} D^2; \quad n\mathbb{R}P^2 = (\bigvee_n S^1) \cup_{g_n} D^2, \quad \mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{\nu_{n-1}} D^n. \square$$

其中 $f_n = \prod_{1 \leq i \leq n} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} : S^1 \rightarrow \bigvee_{2n} S^1$; $g_n = \prod_{1 \leq i \leq n} a_i a_i : S^1 \rightarrow \bigvee_n S^1$, 见第二章第三节.

3.2 拓扑空间的基本群

本节的内容是, 将一个取定基点 $x_0 \in X$ 的拓扑空间 X , 联系到一个群 $\pi_1(X, x_0)$, 称之为空间 X 的基本群; 将每个道路连通空间之间的连续映射 $f : X \rightarrow Y$, 联系到一个群同态 $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, 称之为连续映射 f 的诱导同态, 它们具有下述“同伦不变”的性质:

(A) 如果 $[X] = [Y]$, 则 $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(Y, y_0)$

(B) 如果 $f \simeq g : X \rightarrow Y$, 则 $f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

本节的安排是:

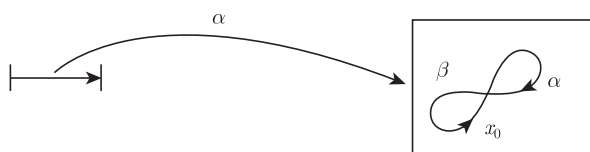
2.1 基本群的定义;

2.2 基点的作用;

2.3 连续映射的诱导同态.

3.2.1 基本群

对于单位区间 $I = [0, 1]$ 而言, 它的边界是 $\partial I = \{0, 1\}$. 已知一个拓扑空间 X 以及其中的一个定点 $x_0 \in X$. 一个连续映射 $\alpha : I \rightarrow X$ 称为 X 中以 x_0 为基点的一条闭路, 如果 $\alpha(\partial I) = x_0$.



X 中的两条闭路 $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ 称为同伦地, 记为 $\alpha \simeq \beta \text{ rel}(\partial I)$, 如果存在一个伦移 $H : I \times I \rightarrow X$, 满足

$$H|I \times \{0\} = \alpha; H|I \times \{1\} = \beta; H(\partial I \times I) = x_0.$$

从而, 两条闭路 α, β 同伦的几何表述是: 闭路 α 可连续形变到闭路 β :

$$H : I \times I = \boxed{} \longrightarrow X$$

引理1: 令 $\Omega(X, x_0)$ 是 X 中以 x_0 为基点的全体闭道路的集合:

$$\Omega(X, x_0) := \{\alpha \in C(I, X), \alpha(\partial I) = x_0\}.$$

则同伦关系 $\simeq$ 是集合 $\Omega(X, x_0)$ 中的等价关系.

证明: $\simeq$ 是集合 $C(I, X)$ 中的等价关系. $\square$

定义: 根据引理1, 可引入商集及商映射

$$[\] : \Omega(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0) / \simeq, \alpha \rightarrow [\alpha],$$

其中 $[\alpha]$ 称为闭路 α 的同伦类, 商集合 $\pi_1(X, x_0)$ 称为空间 X 的以 x_0 为基点的基本群. $\square$

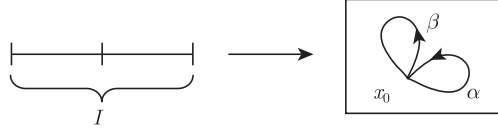
闭路的衔接和反方向规定了两个集合之间的对应:

(A) 闭路的乘积: $\cdot : \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \rightarrow \Omega(X, x_0), (\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \cdot \beta$, 其中

$$\alpha \cdot \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2s - 1), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

(B) 闭路的求逆: $^{-1} : \Omega(X, x_0) \rightarrow \Omega(X, x_0), \alpha \rightarrow \alpha^{-1}$, 其中

$$\alpha^{-1}(s) := \alpha(1-s), \quad s \in [0, 1].$$



它们满足下述性质:

引理2. 如果 $\alpha \simeq \alpha' \text{ rel}(\partial I)$, $\beta \simeq \beta' \text{ rel}(\partial I)$, 则有

1) $\alpha \cdot \beta \simeq \alpha' \cdot \beta' \text{ rel}(\partial I)$; 2) $\alpha^{-1} \simeq \alpha'^{-1} \text{ rel}(\partial I)$.

证明: 下设 $\alpha \underset{H}{\simeq} \alpha'$, $\beta \underset{G}{\simeq} \beta' \text{ rel}(\partial I)$. 定义同伦 $H_i : I \times I \rightarrow X, i = 1, 2$, 分别为

$$H_1(s, t) = \begin{cases} H(2s, t), & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(2s-1, t), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$H_2(s, t) = H(1-s, t)$$

根据焊接原理, 它们连续, 并且满足:

$$\alpha \cdot \beta \underset{H_1}{\simeq} \alpha' \cdot \beta' \text{ rel}(\partial I); \quad \alpha^{-1} \underset{H_2}{\simeq} \alpha'^{-1} \text{ rel}(\partial I). \quad \square$$

根据引理2, 闭路的乘积和求逆诱导了同伦集之间的对应

$$\mu : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0), \quad \mu([\alpha], [\beta]) := [\alpha \cdot \beta].$$

$$\nu : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0), \quad \nu[\alpha] := [\alpha^{-1}].$$

此外, 令 $e \in \pi_1(X, x_0)$ 为常值闭路 $c : I \rightarrow x_0 \in X$ 所决定的同伦类 $[c]$. 我们来证明:

定理1 集合 $\pi_1(X, x_0)$ 是以 μ 为乘法, ν 为求逆, $e \in \pi_1(X, x_0)$ 为单位的群.

证明: 需要证明, 商集 $\pi_1(X, x_0)$ 中的乘法 γ 和求逆 ν 运算满足如下群的公理性质: 对于 $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X, x_0)$, 有

1) 乘法结合律: $[\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma]) = ([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma]$;

2) 逆元律: $[\alpha] \cdot [\alpha^{-1}] = [\alpha^{-1}] \cdot [\alpha] = e$;

3) 单位律: $[\alpha] \cdot e = e \cdot [\alpha] = [\alpha]$.

它们依次等价于下述同伦关系:

$$1) \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \underset{H_1}{\simeq} (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$

$$2) \alpha \cdot \alpha^{-1} \underset{H_2}{\simeq} \alpha^{-1} \cdot \alpha \simeq c.$$

$$3) \alpha \cdot c \underset{H_3}{\simeq} c \cdot \alpha \simeq \alpha.$$

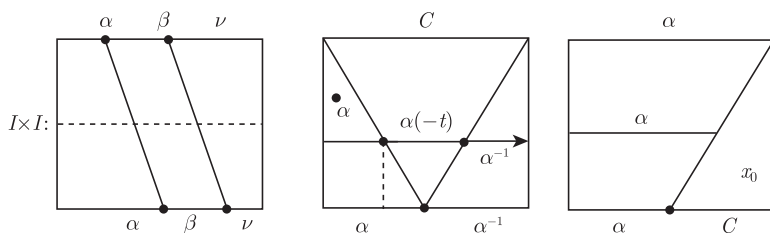
建立这些同伦关系所需要的三个同伦 H_1, H_2, H_3 分别由下式给出, 其中 $t \in I$ 是同伦参数:

$$H_1(s, t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4s}{2-t}\right), & s \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t\right] \\ \beta(4s+t-2), & s \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}t, \frac{3}{4} - \frac{1}{4}t\right] \\ \nu\left(\frac{4s+t-3}{1+t}\right), & s \in \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4}t, 1\right]. \end{cases}$$

$$H_2(s, t) = \begin{cases} \alpha(2s), & s \in \left[0, \frac{1-t}{2}\right] \\ \alpha(1-t), & s \in \left[\frac{1-t}{2}, \frac{1+t}{2}\right] \\ \alpha(2-2s), & s \in \left[\frac{1+t}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

$$H_3(s, t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2s}{1+t}\right), & s \in \left[0, \frac{1+t}{2}\right], \\ x_0, & s \in \left[\frac{1+t}{2}, 1\right] \end{cases}$$

根据焊接引理, 上面分块定义的三个同伦 $H_i, i=1, 2, 3$, 整体连续, 它们的几何行为如图所示:



3.2.2 基点的作用

我们接下来要考虑的问题是: 给定拓扑空间 X 中不同两点 $x_0, x_1 \in X$, 两个基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 和 $\pi_1(X, x_1)$ 之间有何种关系?

令 $X_0 = X$ 中包含点 x_0 的极大道路连通分支. 则含入映射 $i: X_0 \rightarrow X$ 诱导 $1-1$ 对应 $\Omega(X_0, x_0) \rightarrow \Omega(X, x_0)$, 并且保持闭路同伦关系 $\simeq$. 从而有

引理3. 含入映射 $i: X_0 \rightarrow X$ 诱导基本群之间的同构 $\pi_1(X_0, x_0) = \pi_1(X, x_0)$. $\square$

对于 X 中两条尾首相同的道路 $\gamma, \sigma: I \rightarrow X$, $\gamma(1) = \sigma(0)$, 可以定义它们的
衔接道路 $\gamma \cdot \sigma: I \rightarrow X$ 为

$$\gamma \cdot \sigma(s) = \begin{cases} \gamma(2s), & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \sigma(2s-1), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

利用定理1的证明可得:

引理4(习题1) 已知空间 X 中首尾相接的三条道路 $\gamma, \sigma, \delta: I \rightarrow X$, $\gamma(1) = \sigma(0)$, $\sigma(1) = \delta(0)$. 则

- 1) $\gamma \cdot (\sigma \cdot \delta) \simeq (\gamma \cdot \sigma) \cdot \delta \text{ rel}(\partial I)$.
- 2) $\gamma \cdot \gamma^{-1} \simeq \gamma(0) \text{ rel}(\partial I)$, $\gamma^{-1} \cdot \gamma \simeq \gamma(1) \text{ rel}(\partial I)$.
- 3) 如果存在道路的定端同伦 $\gamma \simeq \gamma' \text{ rel}(\partial I)$, $\sigma \simeq \sigma' \text{ rel}(\partial I)$, 则

$$\gamma \cdot \sigma \simeq \gamma' \cdot \sigma' \text{ rel}(\partial I). \square$$

定理2. 如果 X 道路连通, $x_0, x_1 \in X$. 则基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 与 $\pi_1(X, x_1)$ 同构.

证明: 由于 X 道路连通, 可固定一条从 x_0 到 x_1 的道路

$$\gamma: I \rightarrow X, \quad \gamma(0) = x_0; \quad \gamma(1) = x_1.$$

它产生集合间的对应

$$\Omega(X, x_0) \begin{matrix} f \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ g \end{matrix} \Omega(X, x_1)$$

其中

$$f(\alpha) = \gamma^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma, \quad \alpha \in \Omega(X, x_0).$$

$$g(\beta) = \gamma \cdot \beta \cdot \gamma^{-1}, \quad \beta \in \Omega(X, x_1).$$

根据引理3可知

- 1) f 和 g 保持集合中的同伦关系 $\simeq$, 从而诱导基本群间的对应 $\overline{f}$ 和 $\overline{g}$

$$\pi_1(X, x_0) \begin{matrix} \overline{f} \\ \rightarrow \\ \xleftarrow{\quad} \\ \overline{g} \end{matrix} \pi_1(X, x_1)$$

2) $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 均是群同态, 例如:

$$\begin{aligned}\bar{f}([\alpha] \cdot [\beta]) &= \bar{f}([\alpha \cdot \beta]) \\ &= [\gamma^{-1} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma] \\ &= [\gamma^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \gamma^{-1} \cdot \beta \cdot \gamma] \\ &= [\gamma^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma] \cdot [\gamma^{-1} \cdot \beta \cdot \gamma] \\ &= \bar{f}[\alpha] \cdot \bar{f}[\beta].\end{aligned}$$

3) $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 满足关系式:

$$\bar{g} \circ \bar{f} = id_{\pi_1(x, x_0)}; \quad \bar{f} \circ \bar{g} = id_{\pi_1(X, x_1)}.$$

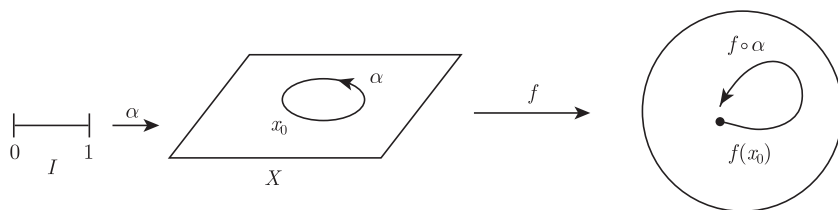
从而 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 是一对互逆群同构, 例如:

$$\begin{aligned}\bar{g} \cdot \bar{f}[\alpha] &= \bar{g}[\gamma^{-1} \circ \alpha \circ \gamma] \\ &= [\gamma \cdot \gamma^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \gamma^{-1}] = [c \cdot \alpha \cdot c] \\ &= [\alpha]. \square\end{aligned}$$

3.2.3 连续映射的诱导同态

设 (X, x_0) 是取定基点的拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是一个连续映射, 记 $f(x_0) = y_0$. 则 f 诱导闭路集合间的对应:

$$f: \Omega(X, x_0) \rightarrow \Omega(Y, y_0), \quad f(\alpha) = f \circ \alpha$$



它满足

- 1) 如果 $\alpha \underset{H}{\simeq} \alpha' \text{ rel } \partial I$, 则 $f \circ \alpha \underset{f \circ H}{\simeq} f \circ \alpha' \text{ rel } \partial I$.
- 2) 对于 $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$, $f(\alpha \cdot \beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$
- 3) 如果 $f \simeq g$, 则 $f(\alpha) \simeq g(\alpha)$.

根据性质1), f 诱导基本群之间的对应

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad f_*[\alpha] = [f \circ \alpha].$$

定理3: 基本群之间的对应 f_* 是一个群同态, 它具有如下性质:

- 1) 如果 $f = id_X$, 则 $f_* = id : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$;
- 2) 如果 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ 是连续映射, 则

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, g \circ f(x_0)).$$

证明: 证明由下式完成: 设 $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$:

$$\text{i) } f_*([\alpha] \cdot [\beta]) = f_*([\alpha \cdot \beta]) = [f \circ (\alpha \cdot \beta)]$$

$$= [(f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta]$$

$$= f_*[\alpha] \cdot f_*[\beta].$$

$$\text{ii) } id_{X*}[\alpha] = [id_X \circ \alpha] = [\alpha]$$

$$\text{iii) } (g \circ f)_*[\alpha] = [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = g_*[f \circ \alpha] = g_* \circ f_*[\alpha]. \square$$

推论1 (基本群的同胚不变性) 如果 $f : X \rightarrow Y$ 是同胚变换, 则诱导同态 $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ 是群同构.

连续映射的诱导同态 $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ 的一个更为基本且实用的性质是:

定理4(诱导同态的同伦不变性) 如果 $f \underset{H}{\simeq} g : X \rightarrow Y$, 则诱导同态 f_*, g_* 满足交换图表:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ & \searrow g_* & \downarrow \gamma_* \cong \\ & & \pi_1(Y, g(x_0)) \end{array}$$

其中 $\gamma : I \rightarrow Y$ 是空间 Y 中从 $f(x_0)$ 到 $g(x_0)$ 的道路 $\gamma(t) = H(x_0, t)$, 而 γ_* 是该道路所诱导的同构 $\gamma_*[\beta] = [\gamma^{-1} \cdot \beta \cdot \gamma]$ (见定理2).

证明: 对于 $\alpha \in \Omega(X, x_0)$, 根据定义, 我们有:

$$\gamma_* \circ f_*[\alpha] = [\gamma^{-1} \cdot (f \circ \alpha) \cdot \gamma]$$

$$g_*[\alpha] = [g \circ \alpha]$$

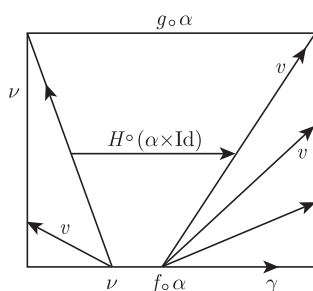
据此, 我们只需要写出一个同伦 $G : I \times I \rightarrow Y$, 它满足:

$$\gamma^{-1} \cdot (f \circ \alpha) \cdot \gamma \underset{\bar{G}}{\simeq} g \circ \alpha, \text{rel}(\partial(I)).$$

同伦 G 的定义是:

$$G(s, t) = \begin{cases} \gamma(1 - 4s), & 0 \leq s \leq \frac{1-t}{4} \\ H\left(\alpha\left(\frac{4s+t-1}{3t+1}\right), t\right), & \frac{1-t}{4} \leq s \leq \frac{1+t}{2} \\ \gamma(2s-1), & \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

根据焊接引理, G 连续, 它的行为如图所示:



推论2(基本群的同伦不变性) 如果 $f: X \rightarrow Y$ 是同伦等价, 则诱导同态

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

是一个群同构.

证明: 根据已知, 存在映射 f 的同伦逆 $g: Y \rightarrow X$, 满足同伦关系

$$g \circ f \underset{\bar{G}}{\simeq} id_X, \quad f \circ g \underset{\bar{H}}{\simeq} id_Y.$$

根据定理4, 它们依次诱导了基本群同态的交换图表:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow[\cong]{id_*} & \pi_1(X, x_0) & & \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow[\cong]{id_*} \pi_1(Y, f(x_0)) \\ & \searrow g_* \circ f_* & \cong \downarrow \gamma_* & ; & \searrow f_* \circ g_* \cong \downarrow \bar{\gamma}_* \\ & & \pi_1(X, g \circ f(x_0)) & & \pi_1(Y, f \circ g \circ f(x_0)) \end{array}$$

其中 γ_* 和 $\bar{\gamma}_*$ 分别是 X 和 Y 中的道路 $\gamma(t) = G(x_0, t): I \rightarrow X$ 和 $\bar{\gamma}(t) = H(f(x_0), t): I \rightarrow Y$ 所诱导的同构.

由于 $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ 均为同构, 故 f_* 是群同构. $\square$

推论3. 若 $A \subset X$ 是形变收缩核, 则含入映射 $i: A \rightarrow X$ 诱导群同构

$$i_*: \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a), a \in A.$$

习题1: 设 $A \subset X$ 是一个收缩核 $a \in A$. 证明

- 1) 含入映射 $i_A: A \rightarrow X$ 诱导基本群单同态 $i_{A*}: \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$;
- 2) 收缩映射 $r: X \rightarrow A$. 诱导基本群满同态 $r_*: \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(A, a)$. $\square$

习题2: 设 $X = \{p\}$ 是单点空间. 证明 $\pi_1(X, x_0) = 0$ (平凡群).

习题3: 设 $A = \{a\} \subset X$ 是单点子空间. 如果 a 是 X 的形变收缩核, 则称 X 是**可缩空间**. 证明

- 1) 如果 X 是可缩空间, 则它的基本群 $\pi_1(X, a)$ 是平凡群.
- 2) 证明下列空间的基本群平凡:

$X =$ 欧氏空间的凸子集; $S^n - \{p\}$; ; 相交于一点的若干线段.

习题4: 已知连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 同伦于一个常值映射 $g: X \rightarrow y_0 \in Y$. 证明诱导同态 $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ 平凡.

习题5. 对于连续映射 $F: D^2 \rightarrow S^1$. 令 $f = F|_{\partial D^2}: S^1 \rightarrow S^1$. 证明诱导同态 f_* 平凡.

提示: 令 $G: S^1 \times I \rightarrow D^2 = \frac{S^1 \times I}{S^1 \times 0}$ 为商映射. 则有 $f \underset{F \circ G}{\simeq} c$, 其中 $c: S^1 \rightarrow F(0) \in S^1$ 是常值映射.

习题6: 证明下列空间的基本群同构于 $\pi_1(S^1, 1)$:

$X =$ Mobius 带, $D^2 - \{0\}$, $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, $S^1 \times I$.

习题6: 设 $0 \in D^n$ 为原点, $f: S^{n-1} \rightarrow A$ 连续, $\pi: D^n \sqcup A \rightarrow A \cup_f D^n$ 是商映射. 证明含入映射 $i = \pi|_A: A \rightarrow A \cup_f D^n - \pi(0)$ 诱导基本群同构.

习题7: 设 $\bigvee_n S^1$ 是 n 个单位圆周的一点并, $x_0 \in \bigvee_n S^1$ 是粘合点. 证明

- 1) $\pi_1(n \cdot T^2 - \{p\}, x_0) = \pi_1(\bigvee_{2n} S^1, x_0)$, 其中 $p \in n \cdot T^2$;
- 2) $\pi_1(m \cdot \mathbb{R}P^2 - \{p\}, x_0) = \pi_1(\bigvee_n S^1, x_0)$. 其中 $p \in (m \cdot \mathbb{R}P^2)$.

习题8: 已知空间 X 中首尾相接的三条道路 $\gamma, \sigma, \delta: I \rightarrow X$, $\gamma(1) = \sigma(0)$, $\sigma(1) = \delta(0)$. 证明

- 1) $\gamma \cdot (\sigma \cdot \delta) \simeq (\gamma \cdot \sigma) \cdot \delta \text{ rel}(\partial I)$.
- 2) $\gamma \cdot \gamma^{-1} \simeq \gamma(0) \text{ rel}(\partial I)$, $\gamma^{-1} \cdot \gamma \simeq \gamma(1) \text{ rel}(\partial I)$.
- 3) 如果存在道路的定端同伦 $\gamma \simeq \gamma' \text{ rel}(\partial I)$, $\sigma \simeq \sigma' \text{ rel}(\partial I)$, 则

$$\gamma \cdot \sigma \simeq \gamma' \cdot \sigma' \text{ rel}(\partial I). \square$$

3.3 复迭映射与基本群

本节所考虑的拓扑空间, 均是道路连通且局部道路连通的 T_2 空间. 尤其是, 几何学所关心的拓扑空间、大都满足此条件。

在对拓扑空间定义了基本群后, 两个直接的问题是

问题1: 给定一个空间 X , 求它的基本群 $\pi_1(X, x_0) = ?$

问题2: 给定一个连续映射 $f : X \rightarrow Y$, 求它的诱导同态 $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$?

上述两个问题可以得到有效解答, 主要方法是:

- 1) 复迭映射的方法(本节内容)
- 2) Van Kampen定理(下一节的内容)

本节的安排是

- 3.1. 复迭映射及例.
- 3.2. 道路提升引理和同伦提升引理
- 3.3. 圆周的基本群 $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$
- 3.4. 应用.

3.3.1 复迭映射

定义: 一个连续满射 $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ 称为**复迭映射**, 如果对于每点 $x \in X$, 存在一个道路连通的开邻域 $U \subset X$, 满足如下局部平凡性:

- 1) $\pi^{-1}(U) = \coprod_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha \subset \tilde{X}$
- 2) 对于每个指标 $\alpha \in \Lambda$, 限制映射 $\pi|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ 是一个同胚.

推论. 设 $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ 是一个复迭映射. 定义整值函数 $\lambda : X \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ 为 $\lambda(x) = |\pi^{-1}(x)|$. 则 λ 是一个常值函数, 它的取值称为复迭映射 π 的**重数**.

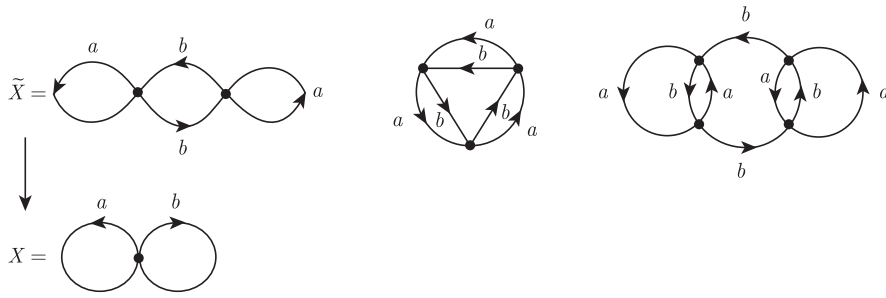
证明: $\lambda : X \rightarrow \mathbb{Z}$ 是一个局部常值映射, 且空间 X 道路连通性. $\square$

例1. 直线到圆周的指数映射 $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\pi(t) = e^{2\pi it}$ 是复迭映射, 它的重数是 ∞ , $\square$

例2. 映射 $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 (= S^1 \times S^1)$, $\pi(s, t) = (e^{2\pi is}, e^{2\pi it})$ 是复迭映射, 它的重数是 ∞ , $\square$

例3. Hopf 映射 $\gamma_n : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ 是复迭映射. 它的重数是 2, $\square$

例4. 令 X 是一对相切圆周 $S^1 \vee S^1$. 则下图规定了 X 上的三个复迭映射



它们的重数依次是 2, 3, 4. □

定义: 对于一个复迭映射 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$, 我们称 $\tilde{X}$ 为**全空间**; X 为**底空间**. 对于底空间中一点 $x_0 \in X$, 原像 $\pi^{-1}(x_0) \subset \tilde{X}$ 是一个离散子空间, 称为 x_0 点上方的**纤维**.

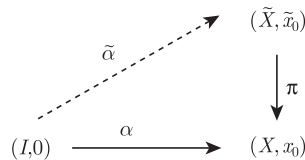
3.3.2 道路提升引理与同伦提升引理

我们约定 $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ 是一个复迭映射; 其中 $x_0 \in X$ 是取定一点; $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0) \subset \tilde{X}$. 研究复迭映射几何行为的两个基本工具是“道路提升引理”与“同伦提升引理”.

定理1(道路提升引理): 对于底空间 X 中任意一条始于 x_0 的道路 $\alpha: I \rightarrow X$, $\alpha(0) = x_0$, 存在全空间中唯一一条道路 $\tilde{\alpha}: I \rightarrow \tilde{X}$, 满足如下性质:

- 1) 初值条件 $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$;
- 2) 映射方程 $\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$.

图示



证明. 由于 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ 是复迭映射, 对于每个 $t \in I$, 存在点 $\alpha(t) \in X$ 的一个道路连通的开邻域 $U(t) \subset X$, 满足

- 1) $\pi^{-1}(U(t)) = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha(t)$;
- 2) $\pi|_{V_\alpha(t)}: V_\alpha(t) \cong U(t)$.

由于单位区间 $I = [0, 1]$ 是一个紧致度量空间. 根据 Lebesgue 引理, 对于它的开复盖 $\{\alpha^{-1}(U(t)), t \in I\}$, 存在一个分划

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1,$$

使得 $\alpha[t_i, t_{i+1}] \subset U(t_i)$. 尤其有

$$\alpha(t_i) \in U(t_{i-1}) \cap U(t_i), \quad 0 < i < m.$$

分段定义空间 $\tilde{X}$ 中的道路 $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ 如下:

$$\tilde{\alpha}(t) = \begin{cases} (\pi|V_{\alpha_0}(t_0))^{-1}\alpha(t), & t \in [0, t_1]. \\ (\pi|V_{\alpha_1}(t_1))^{-1}\alpha(t), & t \in [t_1, t_2] \\ \vdots \\ (\pi|V_{\alpha_{m-1}}(t_{m-1}))^{-1}\alpha(t), & t \in [t_{m-1}, 1]. \end{cases}$$

其中:

$V_{\alpha_0}(t_0) \subset \pi^{-1}(U(t_0)) = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} V_{\alpha}(t_0)$ 是包含点 $\tilde{x}_0$ 的唯一道路连通分支;

$V_{\alpha_1}(t_1) \subset \pi^{-1}(U(t_1)) = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} V_{\alpha}(t_1)$ 是包含点 $\tilde{\alpha}(t_1)$ 的唯一道路连通分支.

$\vdots$

$V_{\alpha_{m-1}}(t_{m-1}) \subset \pi^{-1}(U(t_{m-1}))$ 是包含点 $\tilde{\alpha}(t_{m-1})$ 的唯一道路连通分支.

由焊接引理, $\tilde{\alpha}$ 连续且唯一, 并且满足

$$\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha, \quad \tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0. \quad \square$$

定理1证明的思路同样适用于证明:

定理2(同伦提升引理) 对于到底空间 X 一个同伦 $F : I \times I \rightarrow X$, $F(0, t) = x_0$, 存在唯一连续映射 $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$, 满足

1) 初值条件 $\tilde{F}(0, t) = \tilde{x}_0$

2) 映射方程 $\pi \circ \tilde{F} = F$.

图示:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \tilde{F} & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ (I \times I, 0 \times I) & \xrightarrow{F} & (X, x_0) \\ & \searrow \pi & \end{array}$$

证明: 由于 $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ 是复迭映射, 对于每点 $z \in I \times I$, 存在点 $F(z) \in X$ 的一个道路连通的开邻域 $U(z) \subset X$, 满足

1) $\pi^{-1}(U(z)) = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} V_{\alpha}(z)$;

2) $\pi|V_{\alpha}(z) : V_{\alpha}(z) \cong U(z)$.

根据 Lebesgue 引理, 存在紧致度量空间 $I \times I = [0, 1] \times [0, 1]$ 的一个分划:

$$I \times I = \bigcup_{1 \leq j \leq m} I_j :$$

I_{ks+1}	I_{ks+2}	$\cdots$	I_{ks+s}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
I_{s+1}	I_{s+2}	$\cdots$	I_{2s}
I_1	I_2	$\cdots$	I_s

以及紧致子空间 $F(I \times I) \subset X$ 的一个开复盖 $\{U(j) \subset X, 1 \leq j \leq m\}$, 它们满足

- 1) $F(I_j) \subset U(j)$;
- 2) $U(j)$ 道路连通, 并且满足局部平凡性:

$$\pi^{-1}(U(j)) = \sqcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha(j); \quad \pi|_{V_\alpha(j)} : V_\alpha(j) \cong U(j).$$

分块定义映射 $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ 如下:

$$\tilde{F}(z) = \begin{cases} (\pi|_{V_{\alpha_1}(1)})^{-1}F(z), & z \in I_1 \\ \vdots \\ (\pi|_{V_{\alpha_m}(m)})^{-1}F(z), & z \in I_m. \end{cases}$$

其中

- 1) $V_{\alpha_1}(1) \subset \pi^{-1}(U(1)) = \sqcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha(1)$ 是唯一道路连通分支, 满足 $\tilde{x}_0 \in V_{\alpha_1}(1)$;
- 2) $V_{\alpha_j}(j) \subset \pi^{-1}(U(j)) = \sqcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha(j)$ 是唯一道路连通分支, 满足

$$\tilde{F}(I_j^\partial) \subset V_{\alpha_j}(j).$$

其中 I_j^∂ 是由正方形 I_j 的左侧边, 它在映射 $\tilde{F}$ 下的像, 已由 $\tilde{F}$ 在前述 $I_1, \dots, I_{j-1}$ 上的行为所唯一确定. 根据焊接引理, 伦移 $\tilde{F}$ 的定义合理且连续, 且满足所述条件 1), 2). $\square$

定义: 在定理 1 中, 空间 $\tilde{X}$ 中的道路 $\tilde{\alpha}$ 称为 X 中的道路 α 的保基点的**唯一提升**;

在定理 2 中, 到空间 $\tilde{X}$ 的同伦 $\tilde{F}$ 称为 X 中的同伦 F 的保基点的**唯一提升**. $\square$

3.3.3 圆周的基本群 $\pi_1(S^1, 1)$

对于单位圆周 $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, z \cdot \bar{z} = 1\}$ 而言, 它有一个天然的复迭映射

$$\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \pi(t) = e^{2\pi \cdot i \cdot t},$$

使得 $\pi^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. 我们取定基点 $x_0 = 1 \in S^1$; $\tilde{x}_0 = 0 \in \mathbb{R}$. 应用道路提升引理和同伦提升引理, 我们来计算基本群 $\pi_1(S^1, 1)$.

对于每个整数 k , 考虑圆周 S^1 中的闭路:

$$\alpha_k : I \rightarrow S^1, \alpha_k(t) = e^{2\pi \cdot i \cdot kt}.$$

我们有如下几何事实:

1) 由于 $\alpha_k(0) = \alpha_k(1) = 1 \in S^1$, $\alpha_k \in \Omega(S^1, 1)$, 我们得到基本群中的元素 $[\alpha_k] \in \pi_1(S^1, 1)$;

2) 相对于复迭映射 $\pi: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (S^1, 1)$, $\pi(t) = e^{2\pi i \cdot t}$, 闭路 α_k 保持基点的唯一提升是 $\mathbb{R}$ 中的线段 $\widetilde{\alpha}_k(t) = k \cdot t, t \in [0, 1]$, 它的两个端点分别是 $\widetilde{\alpha}_k(0) = 0, \widetilde{\alpha}_k(1) = k$.

$$\begin{array}{ccc} & (\mathbb{R}, 0) & \\ \nearrow \widetilde{\alpha}_k(t)=kt & \downarrow \pi(t)=e^{2\pi i t} & \\ (I, 0) & \xrightarrow{\alpha_k(t)=e^{2\pi i \cdot kt}} & (S^1, 1) \end{array}$$

引理 (拽直原理) 对于 $\mathbb{R}$ 中任意一条道路 $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta(0) = 0, \beta(1) = k$, 存在相对同伦 $\widetilde{\alpha}_k \simeq_H \beta, rel(\partial I)$.

证明: 利用 $\mathbb{R}$ 的凸性, 我们可取

$$H: I \times I \rightarrow \mathbb{R}, H(s, t) = (1-t) \cdot \widetilde{\alpha}_k(s) + t \cdot \beta(s). \square$$

定理3. 集合间的对应 $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$, $\varphi(k) = [\alpha_k]$, 是一个交换群的同构.

证明: 证明分为三部分.

A. φ 是满射: 对于单位圆周中的任一闭路 $\alpha: (I, 0) \rightarrow (S^1, 1)$, 根据道路提升引理, 设它保持基点的唯一提升是 $\widetilde{\alpha}: (I, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$. 由于 $\widetilde{\alpha}(1) \in \pi^{-1}(1) = \mathbb{Z}$, 存在唯一整数 $k \in \mathbb{Z}$, 使得 $\widetilde{\alpha}(1) = k$. 根据拽直原理, $\widetilde{\alpha}_k \simeq \alpha, rel(\partial I)$. 从而

$$[\alpha] = [\pi \circ \widetilde{\alpha}] = [\pi \circ \widetilde{\alpha}_k] = [\alpha_k] = \varphi(k).$$

B. φ 是单射: 如果 $\varphi(k) = \varphi(l)$, 则有 $\alpha_k \simeq_F \alpha_l, rel\{\partial I\}$. 根据同伦提升引理

$$\widetilde{\alpha}_k \simeq_{\widetilde{F}} \widetilde{\alpha}_l, rel\{\partial I\}.$$

由于 $\pi \circ \widetilde{F}(1, t) = F(1, t) = 1 \in S^1$, 我们有 $\widetilde{F}(1, t) \in \pi^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. 据此得到

$$k = \widetilde{\alpha}_k(1) = \widetilde{F}(1, 0) = \widetilde{F}(1, 1) = \widetilde{\alpha}_l(1) = l.$$

C. φ 是交换群同态: 对于每对整数 $k, l \in \mathbb{Z}$, 我们有

$$\varphi(k+l) = [\alpha_{k+l}] = [\alpha_k \cdot \alpha_l] = [\alpha_k] + [\alpha_l] = \varphi(k) + \varphi(l). \square$$

推论: 在基本群 $\pi_1(S^1, 1)$ 中, $[\alpha_n] = n \cdot [\alpha_1]$. 从而

$$\pi_1(S^1, 1) = \{k \cdot [\alpha_1], k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z},$$

它的生成元是 $[\alpha_1]$.

定义: 对于一个连续映射 $f: S^1 \rightarrow S^1$, 经一个逆时针转动的同伦 ($\simeq id$), 不妨设 $f(1) = 1 \in S^1$. 存在唯一一个整数 $k \in \mathbb{Z}$, 使得诱导同态

$$f_*: \pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}.$$

满足 $f_*[\alpha_1] = k \cdot [\alpha_1]$. 此整数 k 称为 f 的**映射度**, 记为 $\deg(f) := k$. $\square$

关于圆周自映射的映射度的性质和计算, 请考虑下列习题。

习题1. 映射度的同伦不变性: 如果 $f \simeq g: S^1 \rightarrow S^1$, 则 $\deg(f) = \deg(g)$.

习题2. 设 $B(a) \subset \mathbb{R}^2$ 是半径为 $a > 0$ 的闭圆盘. 对于连续映射 $F: B(a) \rightarrow S^1$. 令 $f = F|_{\partial B(a)}: S^1 \rightarrow S^1$. 证明 $\deg(f) := 0$.

提示: 参见第99页习题5.

习题3. 视 $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, z \cdot \bar{z} = 1\}$. 令 $f_n: S^1 \rightarrow S^1$ 为 $f_n(z) = z^n$. 证明 $\deg(f_n) = n$.

提示: 根据定义, 我们有关系 $f_n \circ \alpha_1 = \alpha_n$. $\square$

习题4. 一个映射 $f: S^1 \rightarrow S^1$ 称为**奇映射**, 如果 $f(-z) = -f(z), z \in S^1$. 证明如果 f 是一个奇映射, 则 $\deg(f)$ = 奇数.

提示: 由于 f 是奇映射, S^1 中的闭路 $f \circ \alpha_1: (I, 0) \rightarrow (S^1, f(1))$ 满足性质

$$f \circ \alpha_1(s + \frac{1}{2}) = -f \circ \alpha_1(s), s \in [0, \frac{1}{2}].$$

由此知, 存在一个奇数 k , 使得

$$\widetilde{f \circ \alpha_1} \left(s + \frac{1}{2} \right) = \widetilde{f \circ \alpha_1}(s) + \frac{k}{2}, \quad s \in \left[0, \frac{1}{2} \right].$$

其中 $\widetilde{f \circ \alpha_1}$ 是闭路 $f \circ \alpha_1$ 的唯一提升. 在上式中取 $s = 0, \frac{1}{2}$, 可以推出 $\widetilde{f \circ \alpha_1}(1) = k$. 后者表 $\deg(f) = k$.

3.3.4 基本群 $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ 的应用

应用1: Brouwer 不动点定理: 对于任一连续映射 $f: D^2 \rightarrow D^2$, 方程 $f(x) = x, x \in D^2$ 必有一个解.

证明: 用反证法, 设对于任意 $x \in D^2$, 都有 $f(x) \neq x$. 则可定义收缩映射 $r: D^2 \rightarrow S^1$ 如下:

$$r(x) = \text{半射线 } \overrightarrow{f(x)x} \text{ 与边界圆周 } S^1 = \partial D^2 \text{ 的唯一交点}.$$

设 $i: S^1 \hookrightarrow D^2$ 为自然含入. 则 r 满足 $r \circ i = id_{S^1}: S^1 \rightarrow S^1$. 据此, 复合同态

$$\pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2, 1) \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1, 1)$$

是群 $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ 的恒同同构. 这与 $\pi_1(D^2, 1) = 0$ 相矛盾. $\square$

应用2: Borsuk-Ulam定理. 对于任意一个连续映射 $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 方程 $f(x) = f(-x)$, $x \in S^2$ 必有一解.

证明: 用反证法. 设对于任意 $x \in S^2$, 都有 $f(x) \neq f(-x)$. 则 f 决定一个连续映射

$$F: S^2 \rightarrow S^1, F(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|} \in S^1 = \partial D^2 \subseteq \mathbb{R}^2.$$

设 $S_+^2 \cong D^2$ 是上半球面, 它的边界 $S^1 = \partial S_+^2$ 是赤道圆周. 令

$$G = F|_{S_+^2}: S_+^2 \rightarrow S^1, \quad g = F|_{S^1}: S^1 \rightarrow S^1.$$

则有

i) 由于 $g = G|_{S^1}: S^1 \rightarrow S^1$, 从而 $\deg(g) = 0$ (见习题1);

ii) $\forall x \in S^1, g(-x) = -g(x)$, 从而 g 是一个奇映射. 根据本节习题2, $\deg(g) =$ 奇数 $\neq 0$.

结论 i), ii) 相互矛盾, 从而定理得证. $\square$

应用3: 代数学基本定理. 复数域上任一非常值多项式

$$p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m$$

必有一根.

证明: 若不然, 设 $D(r)$ 是复平面上半径为 r 的闭圆盘, 可定义光滑映射

$$F: D(r) \rightarrow S^1, F(z) = \frac{p(z)}{|p(z)|}.$$

由习题1知, 对于所有 $r > 0$, $\deg(\partial F) = 0$.

另一方面, 考察同伦

$$p_t(z) = z^m + t(a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m), \quad t \in [0, 1].$$

对于充分大的 $|z| = r$, 例如 $r > \max\{1, |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|\}$, 有理多项式映射

$$z \rightarrow \frac{p_t(z)}{z^m} = 1 + t\left(\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_m}{z^m}\right), t \in [0, 1],$$

恒不为零. 从而同伦

$$H: \partial D(r) \times [0, 1] \rightarrow S^1, H(z, t) = \frac{p_t(z)}{|p_t(z)|}$$

定义合理, 其中 $\partial D(r) \cong S^1$. 它表明

$$H_1 = \partial F \simeq H_0 : \partial D(r) \rightarrow S^1, z \rightarrow \left(\frac{z}{r}\right)^m.$$

但根据映射度的同伦不变性, 我们得到矛盾:

$$0 = \deg(\partial F) = \deg(\partial H_1) = \deg(\partial H_0) = m > 0. \square$$

补注A: 对于拓扑空间 X 的一个连续自映射 $f : X \rightarrow X$, 令

$$\text{Fix} f = \{x \in X, f(x) = x\}.$$

不动点理论关心如下问题

问题1: 对于给定 f , $\text{Fix}(f) = \emptyset$?

问题2: $|\text{Fix}(f)| = ?$

1925年, Lefschetz 将 Brouwer 不动点定理推广到胞腔复形的连续自映射 $f : X \rightarrow X$, 称为 Lefschetz 不动点定理.

1929年, Schauder 和 Leray 将 Brouwer 定理推广到 Hilbert 空间上的微分算子 $f : X \rightarrow X$, 得到 Leray-Schauder 不动点定理. 被称为是研究高阶非线性问题的主要工具.

补注B: 1990年来, Borsuk-Ulam Theorem 已被广泛应用于物理、生物、经济学等领域. 参考文章:

“The Borsuk-Ulam Theorem: An universal Principle for Physical and Biological System.”

补注C: 早年 Euler 和 Lagrange 曾给出代数学基本定理的证明, 但证明过程有缺陷. Gauss 在 1820 年前后给出这个定理的5个证明. Serre 曾经总结到, 用基本群 $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ 给出的证明最为本质.

习题5. 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为单位圆盘, $f : D \rightarrow D$ 连续, 它保持 $\partial D = S^1$ 上每一点不动. 证明 f 是满射.

习题6. 设 $f : S^1 \rightarrow S^1$ 零伦, 证明 f 有一个不动点 $f(x) = x, x \in S^1$. $\square$

习题7. 设 $A \subset X$. 证明在下列情况中不存在收缩映射 $r : X \rightarrow A$:

- 1) $X = \mathbb{R}^3, A \cong S^1$;
- 2) $X = D^2 \times S^1; A = \partial X$;
- 3) $X = S^2, A$ 是 S^2 的赤道. $\square$

习题8. 已知一个“正矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}, a_{ij} > 0$ ”. 考虑线性映射

$$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \rightarrow A \cdot x.$$

证明矩阵 A 有一个正特征值 $\lambda > 0$, 从属于它的特征向量位于第一象限.

提示: 令 $E = \mathbb{R}^3$ 中的单位球面在第一象限的部分 ($\cong D^2$). 则 A 决定了一个连续映射

$$f_A : E \rightarrow E, \quad f_A(v) = \frac{Av}{|Av|}.$$

习题9. 设 $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, 其中 $A_i \subset S^2$ 是闭子空间. 证明存在 $x \in S^2$, 满足

$$\pm x \in A_i \quad (i = 1 \text{ 或 } 2 \text{ 或 } 3).$$

提示: 对于 $i = 1, 2$, 令 $d_i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $d_i(x) = d(x, A_i)$. 考虑映射

$$f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (d_1(x), d_2(x)).$$

由 Borsuk-Ulam 定理, 存在 $x_0 \in S^2$ 满足

$$d_1(x_0) = d_1(-x_0); \quad d_2(x_0) = d_2(-x_0), \quad \square$$

下分情形讨论:

1) 如果 $d_1(x_0) = d_1(-x_0) = 0$ (或 $d_2(x_0) = d_2(-x_0) = 0$) 则有 $\pm x_0 \in A_1$ (或 $\pm x_0 \in A_2$);

2) 如果 $d_1(x_0) = d_1(-x_0) \neq 0$ (或 $d_2(x_0) = d_2(-x_0) \neq 0$) 则有 $\pm x_0 \notin A_1, A_2$, 由此知 $\pm x_0 \in A_3$.

习题10. 设 $A_i \subseteq \mathbb{R}^3$ 为紧致子集, $i = 1, 2, 3$. 证明存在一张平面 $L \subset \mathbb{R}^3$, 它将每个 A_i 分为测度相等的两部分. $\square$

习题11. 证明 $\mathbb{R}_+^2$ 与 $\mathbb{R}^2$ 不同胚.

由此证明, 如果 M 是一张曲面, ∂M 和 $\overset{\circ}{M}$ 分别是它的边界和内部, 则 $\partial M \cap \overset{\circ}{M} = \emptyset$.

提示: 利用 $\pi_1(\mathbb{R}_+^2 - \{0\}, 1) = 0$, $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{p\}, q) = \mathbb{Z}$, 其中 $p \neq q$. (见 Armstrong 定理5.23).

习题12. 设 $f : M \rightarrow N$ 是带边曲面之间的同胚, 证明 $f(\partial(M)) = \partial(N)$. 进而说明莫比乌斯带与圆柱面 $S^1 \times I$ 不同胚.

3.4 Van Kampen定理及应用

本节关心的问题是: 给定一个胞腔复形 (X, x_0) , 求它的基本群 $\pi_1(X, x_0) = ?$ 本节的安排是:

- 4.1. 有限表示群及它们的自由积;
- 4.2. Van Kampen 定理
- 4.3. 应用: 胞腔复形的基本群.

3.4.1 自由群与有限表示群

通常, 群论的入门课程只会讲到有限生成交换群的分类定理. 而对于拓扑空间的基本群的系统介绍, 涉及更为一般的群, 即**有限表示群**. 它提供了用拓扑方法, 研究群论的一个基本工具. 本节对于有限表示群, 做一个扼要介绍. 我们先从自由群谈起.

定义: 已知 n 个元素的有限集 $X = \{t_1, \dots, t_n\}$. 它所生成的**自由群**, 记为

$$F(X) := F(t_1, \dots, t_n)$$

是如下规定的群:

1) 作为集合, $F(X)$ 由元素 $t_1, \dots, t_n$ 的全体**既约字**构成:

$$F(X) = \{1, x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m} \mid x_i \in X, r_i \in \mathbb{Z} - 0, x_i \neq x_{i+1}\}.$$

其中既约的法则是 $x_i^0 = 1$, $x_i^{r_i} \cdot x_i^{r_2} = x_i^{r_1+r_2}$, 从而有条件 $x_i \neq x_{i+1}$, $r_i \neq 0$. 例如

$$x_1^{-3} x_1^2 x_2^5 x_2^{-5} x_1^7 x_3^2 = x_1^6 x_3^2.$$

其中右侧是一个即约字.

2) $F(X)$ 中的乘法运算 $\cdot : F(X) \times F(X) \rightarrow F(X)$ 是

$$x_I^{r(I)} \cdot x_J^{r(J)} = x_I^{r(I)} x_J^{r(J)},$$

并对右侧的单项式依照既约法则 $x_i^{r_i} \cdot x_i^{r_2} = x_i^{r_1+r_2}$, $x_i^0 = 1$ 实施约化;

3) $F(X)$ 中的求逆运算 $^{-1} : F(X) \rightarrow F(X)$ 是

$$(x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m})^{-1} = x_m^{-r_m} \cdots x_1^{-r_1}.$$

4) 乘法单位是 $1 \in F(X)$.

集合 X 的基数 n 称为自由群 $F(X)$ 的**秩**.

作为上面定义的一个直接推论, 我们有:

推论1: 秩数为 1 的自由群是一个生成元的自由循环群 $F(t) = \{1, t^r, r \in \mathbb{Z} - 0\}$. □

定义: 已知一个自由群 $F(X)$, 已知它的一个有限子集 $R = \{r_1, \dots, r_m \in F(X)\}$. 则 R 在 $F(X)$ 中所生成的**最小正规子群** $[R]$ 是由所有元素 $g \cdot r \cdot g^{-1}$, $g \in F(X)$, $r \in R$ 的乘积的即约字构成的子群.

它规定了自由群 $F(X)$ 的一个**商群** $F(X)/[R]$, 记作:

$$F(X)/[R] := \langle t_1, \dots, t_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle,$$

其中 $t_1, \dots, t_n$ 称为该群的**生成元**, $r_1, \dots, r_m$ 称为该群的**关系**. □

反之, 设 G 是一个有限生成的群, 它的一个生成元的集合是 $g_1, \dots, g_n \in G$. 定义集合间对应

$$h: F(t_1, \dots, t_n) \rightarrow G, \quad h(t_i) = g_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

并作乘法扩张。则有

- i) h 是群的满同态,
- ii) $\ker h \subset F(t_1, \dots, t_n)$ 是一个正规子群;
- iii) 总之, h 诱导了群同构

$$F(t_1, \dots, t_n)/\ker h \cong G.$$

定义: 如果存在一个有限子集 $R \subset F(t_1, \dots, t_n)$, 使得 $[R] = \ker h$, 则称 G 是一个有限表示群. 此时有:

$$G = \langle t_1, \dots, t_n \mid R \rangle.$$

需要强调的是, 群论中所出现的绝大多数群, 都属于“有限表示群”的范畴。

例1: 设 A 是一个有限生成的Abel群. 则 A 是有限表示群.

根据有限生成Abel群基本定理, 可设

$$A = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_m}$$

令 $\{t_1, \dots, t_{n+m}\}$ 为它的生成元的集合, 并令

$$R = \{t_i t_j t_i^{-1} t_j^{-1}, t_{n+k}^{p_k} \mid 1 \leq i, j \leq n+m, \quad 1 \leq k \leq m\}.$$

则有 $A = \langle t_1, \dots, t_{n+m} \mid R \rangle$.

例2: 设 Ω_n 是平面中正 n 边形. 它的全体自等距变换构成二面体群 (Dihedral Group):

$$D_n = ISO(\Omega_n) = \{\sigma: \Omega_n \rightarrow \Omega_n, d(\sigma(x), \sigma(y)) = d(x, y), x, y \in \Omega_n.\}$$

它是一个有限表示群. 令 $\theta \in D_n$ 为绕原点逆时针转动 $2\pi/n$ 度的变换; $\tau \in D_n$ 是关于某个对称轴的反射, 通过初等几何的计算可知:

$$D_n = \langle \theta, \tau \mid \theta^n, \tau^2, \theta \cdot \tau \cdot \theta \cdot \tau \rangle.$$

二面体群由拉格朗日在1770年引入, 用于讨论代数方程根之间的置换. 而“二面体群”的名称则是由伽罗华在1830年首次提出. 二面体群在数学和物理学中有广泛应用, 例如在晶体学中, 二面体群被应用于描述晶体的对称性.

例3:(习题1). 设 S_n 是 n 元置换群, 证明 S_n 是一个有限表示群, 写出该群的生成元与关系.

定义: 已知两个有限表示群 $G_1 = \langle X_1 | R_1 \rangle$, $G_2 = \langle X_2 | R_2 \rangle$. 它们的自由积是如下规定的有限表示群

$$G_1 * G_2 = \langle X_1 \sqcup X_2 | R_1 \sqcup R_2 \rangle.$$

对于两个群同态 $h_i : G_i \rightarrow H$, $i = 1, 2$, 它们的自由积是如下规定的群同态

$$h := h_1 * h_2 : G_1 * G_2 \rightarrow H, \quad h(g_1 * g_2) = h_1(g_1) \cdot h_2(g_2). \square$$

推论2. $F(t_1, \dots, t_n) = F(t_1) * \dots * F(t_n)$.

推论3. 自由积 $G_1 * G_2$ 中的任一元素 g 可以表为

$$g = a_1 \cdot b_1 \cdot \dots \cdot a_m \cdot b_m, \quad a_i \in G_1, \quad b_i \in G_2,$$

其中若有必要, 可取 $a_1 = e_1 \in G_1$, $b_m = e_2 \in G_2$, 此处 $e_i \in G_i$ 是群单位. $\square$

3.4.2 Van Kampen定理:

本节将采取如下约定: 已知 $X = A \cup B$, 其中 $A, B, A \cap B \subset X$ 均是道路连通的开子空间. 取定一个基点 $x_0 \in A \cap B$, 则得到子空间的含入映射的交换图表

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \nearrow j_A & & \nwarrow i_A & \\ A \cap B & & i_{A \cap B} & & X = A \cup B \\ & \searrow j_B & & \nearrow i_B & \\ & & B & & \end{array}$$

其中

$$i_{A \cap B} = i_A \circ j_A = i_B \circ j_B : A \cap B \rightarrow X.$$

根据连续映射诱导同态的函子性质, 它们诱导了群同态的交换图表:

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(A, x_0) & & \\ & \nearrow j_{A*} & & \nwarrow i_{A*} & \\ \pi_1(A \cap B, x_0) & & i_{A \cap B*} & & \pi_1(X, x_0) \\ & \searrow j_{B*} & & \nearrow i_{B*} & \\ & & \pi_1(B, x_0) & & \end{array}$$

满足:

$$i_{A \cap B*} = i_{A*} \circ j_{A*} = i_{B*} \circ j_{B*} : \pi_1(A \cap B, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

定理1 (Van Kampen定理): 同态 i_{A*} 和 i_{B*} 的自由积诱导满同态:

$$h = i_{A*} * i_{B*} : \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0),$$

其中

$$\text{Ker}(h) = [j_{A*}(\omega) * j_{B*}(\omega)^{-1} \in \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0), \omega \in \pi_1(A \cap B, x_0)].$$

尤其是 $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) / \text{Ker}(h)$.

证明: 证明分两部分完成:

断言A. h 是满同态 $\text{Im}(h) = \pi_1(X, x_0)$;

断言B. $\text{Ker}(h) = [j_{A*}(\omega) * j_{B*}(\omega)^{-1} \in \pi_1(A) * \pi_1(B), \omega \in \pi_1(A \cap B)]$.

断言A的证明: 对于 X 中的任一闭路

$$\alpha : I \rightarrow X, \quad \alpha(\partial I) = x_0 \quad ([\alpha] \in \pi_1(X, x_0)),$$

由于 $\{\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B)\}$ 是紧致空间 $I = [0, 1]$ 的一个开复盖. 从而存在一个分划

$$t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_{2k} = 1,$$

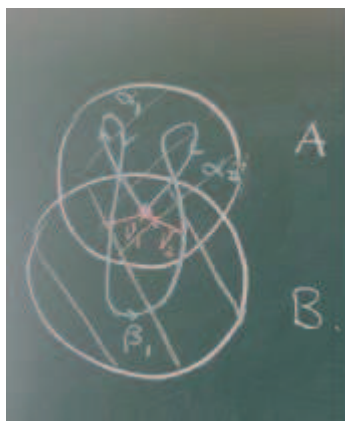
使得 $\alpha[t_i, t_{i+1}] \subset A$ 或 B . 据此, 可设 α 被分解为一串道路的衔接

$$\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_{2k}, \quad \alpha_i = \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]},$$

它们满足 $\alpha_{2k-1} \subset A, \alpha_{2k} \subset B$. 由此知 $\alpha(t_i) \in A \cap B$.

由于 $A \cap B$ 道路连通且 $x_0 \in A \cap B$, 存在 $A \cap B$ 中的道路 $\gamma_i : I \rightarrow A \cap B$ 满足

$$\gamma_i(0) = \alpha(t_i), \gamma_1(1) = x_0.$$



于是在 X 中, 有闭路的同伦关系:

$$\begin{aligned}\alpha &\simeq (\alpha_1 \cdot \gamma_1) \cdot (\gamma_1^{-1} \alpha_2 \gamma_2) \cdot (\gamma_2^{-1} \alpha_3 \gamma_3) \cdots (\gamma_{2k-1}^{-1} \alpha_{2k}) \text{ rel}(\partial I) \\ &= a_1 \cdot b_1 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdots a_k \cdot b_k\end{aligned}$$

其中 $[a_i] \in \pi_1(A, x_0)$; $[b_i] \in \pi_1(B, x_0)$. 上式表明, 同态 $h = i_{A*} * i_{B*}$ 满足

$$h([a_1] * [b_1] * [a_2] * [b_2] * \cdots * [a_k] * [b_k]) = [\alpha].$$

其中 $[a_1] * [b_1] * [a_2] * [b_2] * \cdots \in \pi_1(A) * \pi_1(B)$, 因此 h 是满同态.

断言B证明: 对于任意 $\omega \in \pi_1(A \cap B, x_0)$, 我们有

$$\begin{aligned}h(j_{A*}(\omega) * j_{B*}(\omega)^{-1}) &= (i_A \circ j_A)_*(\omega) * (i_B \circ j_B)_*(\omega)^{-1} \\ &= (i_{A \cap B})_*(\omega) * (i_{A \cap B})_*(\omega)^{-1} = e\end{aligned}$$

据此知

$$j_{A*}(\omega) * j_{B*}(\omega)^{-1} \in \ker h, \quad \omega \in \pi_1(A \cap B, x_0) \Rightarrow [R] \subseteq \text{Ker} h.$$

只需要再证明, 如果

$$[\alpha_1] * [\beta_1] * [\alpha_2] * [\beta_2] * \cdots * [\alpha_k] * [\beta_k] \in \text{Ker} h, \quad \alpha_i \in \pi_1(A, x_0), \quad \beta_i \in \pi_1(B, x_0),$$

则有

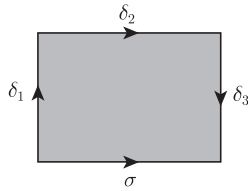
$$[\alpha_1] * [\beta_1] * [\alpha_2] * [\beta_2] * \cdots * [\alpha_k] * [\beta_k] \in [R].$$

为此我们将需要下述引理:

引理: 已知映射 $G: I \times I \rightarrow X$, 满足

$$G(I \times I \text{ 的四个预点}) = x_0.$$

则 $G|_{\partial(I \times I)}$ 决定了 X 中的4条有向闭路



它们满足 $[\sigma] = [\delta_1] \cdot [\delta_2] \cdot [\delta_3]$.

证明: 从 G 出发, 可以构造出同伦 $\sigma \simeq \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \delta_3 \text{ rel}(\partial I)$. $\square$

根据已知, 有同伦 $H: I \times I \rightarrow X$, 它满足

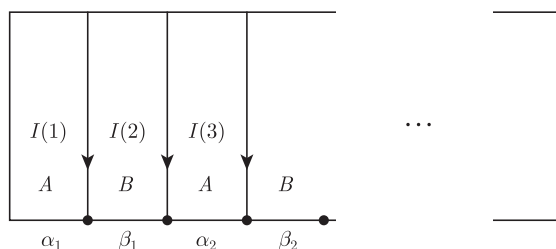
$$\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdots \underset{H}{\simeq} x_0 \quad \text{rel}(\partial I).$$

由于正方形 $I \times I$ 紧致, 它的开复盖 $\{H^{-1}(A), H^{-1}(B)\}$ 有限子复盖, 从而存在 $I \times I$ 一个分划

$$I \times I = \bigcup_{1 \leq i \leq m} I_k$$

满足 $H(I_k) \subset A$ 或 B .

我们仅考虑下述简单情形: 设正方形 $I \times I$ 的分划如下图所示:



记 $c_i: I \rightarrow A \cap B$ 为 H 在矩形 I_i 的右侧边上的限制所得闭路, 并令

$$\omega_i = [c_i] \in \pi_1(A \cap B, x_0).$$

为简化起见, 我们用同样记号 ω_i 来表示 $j_{A*}(\omega_i)$, $j_{B*}(\omega_i)$. 则根据引理知:

$$[\alpha_1] = \omega_1; [\beta_1] = \omega_1^{-1} \cdot \omega_2; [\alpha_2] = \omega_2^{-1} \cdot \omega_3; [\beta_2] = \omega_3^{-1} \cdot \omega_4; \cdots$$

总之得

$$[\alpha_1] \cdot [\beta_1] \cdots [\alpha_k] \cdot [\beta_k] = \omega_1 \cdot \omega_1^{-1} \cdot \omega_2 \cdot \omega_2^{-1} \cdots \omega_k \cdot \omega_k^{-1}.$$

其中, 根据前面约定记号, $\omega_i = j_{A*}(\omega_i) = j_{B*}(\omega_i)$, 我们有

$$\omega_i \cdot \omega_i^{-1} = j_{A*}(\omega_i) \cdot j_{B*}(\omega_i^{-1}) \in [R], \quad \omega_i \in \pi_1(A \cap B, x_0).$$

至此, 我们得到关系 $\ker h \subseteq [R]$. $\square$

3.4.3 常见空间的基本群计算

迄今, 我们对于拓扑空间的基本群有如下了解:

1. 如果 X 是一个可缩空间 $X \simeq x_0$, 则 $\pi_1(X, x_0) = 0$;
2. 如果 X 同伦等价于圆周 $X \simeq S^1$, 则 $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z}$
3. 如果 X 有一个分解 $X = A \cup B$, 其中 $A, B, A \cap B \subset X$ 均是道路连通的开子空间, 并且相关子空间的基本群均是有限表示群:

$$\pi_1(A, x_0) = \langle a_1, \cdots, a_n \mid k_1, \cdots, k_l \rangle$$

$$\pi_1(B, x_0) = \langle b_1, \dots, b_m \mid h_1, \dots, h_s \rangle$$

$$\pi(A \cap B, x_0) = \langle c_1, \dots, c_k \mid r_1, \dots, r_t \rangle$$

令

$$R_1 = \{k_1, \dots, k_l\}; R_2 = \{h_1, \dots, h_s\}; R_3 = \{j_{A*}(c_i) \cdot j_{B*}(c_i)^{-1} \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

则根据 Van Kampen 定理得:

推论: $\pi_1(X, x_0) = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \mid R_1 \sqcup R_2 \sqcup R_3 \rangle. \square$

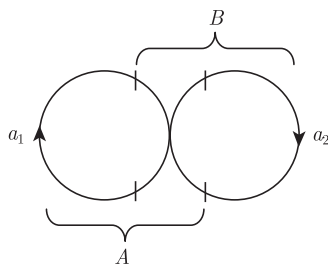
综合上述结果, 我们来计算一些常见空间的基本群.

习题2 (自由群的拓扑背景): 如果 $X = \bigvee_k S^1$ 是 k 个定向圆周的一点并, $x_0 \in X$ 是粘合点, 则

$$\pi_1(X, x_0) = F(a_1, \dots, a_k)$$

其中 $a_i : I \rightarrow \bigvee_k S^1$ 是绕第 i 圆周保定向绕行一周的闭路.

提示: 若 $k = 1$, 则有 $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z} = F(a)$. 命题得证. 对于 $k = 2$, 取 X 的如下道路连通的开复盖



则有:

$$A = \text{circle with arrow } a_1 \Rightarrow \pi_1(A) = F(a_1)$$

$$B = \text{circle with arrow } a_2 \Rightarrow \pi_1(B) = F(a_2)$$

$$A \cap B = \text{point} \Rightarrow \pi_1(A \cap B) = \{e\}$$

将 Van Kampen 定理应用于 $X = A \cup B$ 得 $\pi_1(X, x_0) = F(a_1) * F(a_2) = F(a_1, a_2)$.

对于一般情形, 取 $C_1 = S^1, C_2 = \bigvee_{k=1}^{k-1} S^1 \subset X, U =$ 粘合点 x_0 的一个开邻域, 它同胚于相交于点 x_0 的 k 条开线段. 令

$$A = C_1 \cup U, B = C_2 \cup U.$$

则 $X = A \cup B, A \cap B = U$. 再应用 Van Kampen 定理完成归纳证明. $\square$

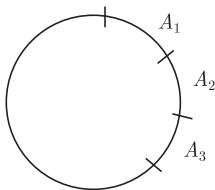
习题3: 对于任一元素 $z \in F(a_1, \dots, a_k)$, 存在一个连续映射 $f: S^1 \rightarrow S_1^1 \vee \dots \vee S_k^1$, 使得诱导同态

$$f_*: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S_1^1 \vee \dots \vee S_k^1, x_0) = F(a_1, \dots, a_k)$$

满足 $f_*[\alpha_1] = z$, 此处 $[\alpha_1] \in \pi_1(S^1, 1)$ 是生成元.

提示: 任一元素(即约字) $z = a_{i_1}^{r_1} \dots a_{i_m}^{r_m} \in F(a_1, \dots, a_k), (i_s \in \{1, \dots, k\})$ 决定了一点并空间 $A = S_1^1 \vee \dots \vee S_k^1$ 中的一条闭路 $f: (S^1, 1) \rightarrow (A, *)$, 它的定义如下:

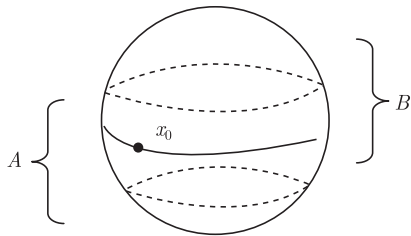
第一步: 在 S^1 中按逆时针方向取 m 个分点 $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, 它们将 S^1 刨分为 m 条弧段 $A_1 \cup \dots \cup A_m = S^1$, 并令 $f(B) = x_0$ (粘合点);



第二步: 若 $r_s > 0$, 则 $f|_{A_s}$ 是保定向绕圆周 $S_{i_s}^1 \subset A$ 运行 r_s 圈的映射; 若 $r_s < 0$, 则 $f|_{A_s}$ 是反定向绕圆周 $S_{i_s}^1 \subset A$ 运行 r_s 圈的映射. 由焊接引理知, 映射 f 连续. 根据习题2, 它满足 $f_*[\alpha_1] = z$. $\square$

习题4: 如果 $X = \bigvee_k S^{n_j}, n_j \geq 2$, 则 $\pi_1(X, x_0) = 0$.

提示: 对于 $k = 1$, 可设 $X = S^n$. 取开子空间 $A, B \subset S^n$ 如图所示:



则有:

1) $A \cong B \cong \mathring{D}^n$, 从而 $\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) = \{e\}$.

2) $A \cap B \cong S^{n-1} \times (0, 1)$, 从而 $\pi_1(A \cap B, x_0) = \pi_1(S^{n-1}, x_0)$

由 Van Kampen 定理知 $\pi_1(S^n, x_0) = 0$.

对于 $k \geq 2$, 取 $C_1 = S^{n_1}, C_2 = \bigvee_{2 \leq j \leq k} S^{n_j} \subset X$, $U =$ 粘合点 x_0 的一个开邻域, 它同胚于 k 个开球体在一点并空间 $\bigvee_k D^{n_j}$. 令

$$A = C_1 \cup U, B = C_2 \cup U.$$

则有 $X = A \cup B, A \cap B = U$. 再应用 Van Kampen 定理完成归纳证明. $\square$

对于一个连续映射 $f: S^{n-1} \rightarrow A, n \geq 2$, 取基点 $s_0 \in S^{n-1}, a = f(s_0) \in A$. 考察用 f 在 A 上粘贴了一个胞腔所得空间

$$X = A \cup_f D^n = \frac{A \sqcup D^n}{x \in \partial D^n \sim f(x) \in A},$$

以及连续映射的诱导同态

$$f_*: \pi_1(S^{n-1}, s_0) \rightarrow \pi_1(A, a), i_{A*}: \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a).$$

其中 $i_A: A \rightarrow X$ 是含入映射, 而(习题3):

$$\pi_1(S^{n-1}, s_0) = \begin{cases} 0, & n > 2; \\ \mathbb{Z}, & n = 2. \end{cases}$$

下面的定理给出计算胞腔复形基本群的递归公式:

定理2 (胞腔复形的基本群): 含入映射 $i_A: A \rightarrow X$ 诱导基本群满同态:

$$i_{A*}: \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a),$$

它的核是 $\ker i_{A*} = \begin{cases} 0, & n \geq 2; \\ [f_*[\alpha_1]], & n = 2. \end{cases}$

证明: 考虑 X 的子空间 $D(r) = \{x \in \mathring{D}^n, |x| \leq r < 1\}$, 并设

$$B_1 = X - \mathring{D}\left(\frac{1}{4}\right), \quad B_2 = \mathring{D}\left(\frac{1}{2}\right)$$

则有

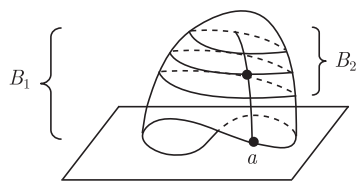
1) $B_1 = M_f$ 是映射 f 的映射柱, 从而收缩映射 $r: B_1 \rightarrow A$ 是同伦等价;

2) $B_2 \cong D^n$, 从而 $\pi_1(B_2, b) = 0$.

3) $X = B_1 \cup B_2$

4) $B_1 \cap B_2 \cong S^{n-1} \times (0, 1)$, 含入映射 $j: S^{n-1} \rightarrow B_1 \cap B_2, j(z) = (z, 1/2)$, 是同伦等价.

取定一个基点 $a' \in B_1 \cap B_2$, 满足 $r(a') = a \in A$.



情形1: 如果 $n > 2$, 由 $\pi_1(B_2, a') = \{e\}$ 和 Van Kampen 定理知

$$\pi_1(X, a') = \pi_1(B_1, a') * \pi_1(B_2, a') = \pi_1(B_1, a') \cong \pi_1(A, a).$$

其中最后一个同构来自于上述性质1).

情形2: 如果 $n = 2$, 由 Van Kampen 定理知:

$$\pi_1(X, a') = \pi_1(B_1, a') / [j_*([\alpha_1])],$$

最后, 由于 $r \circ j \simeq f$, 同伦等价 $r: (B_1, a') \rightarrow (A, a)$, 诱导群同构

$$\pi_1(B_1, a') / [j_*([\alpha_1])] \xrightarrow{r_*} \pi_1(A, a) / [f_*([\alpha_1])]. \quad \square.$$

作为定理2的第一批应用, 我们取 $A = \vee_k S^1$. 根据习题2, 3, 对于一个元素

$$z \in F(a_1, \dots, a_k) = \pi_1(\vee_k S^1, x_0)$$

存在一个连续映射 $f: S^1 \rightarrow \vee_k S^1$, 满足 $f_*[\alpha_1] = z$. 根据定理2, 我们得到

推论1: 胞腔复形 $X = (\vee_k S^1) \cup_f D^2$ 的基本群是有限表示群:

$$\pi_1(X, *) = \langle a_1, \dots, a_k \mid z \rangle.$$

上述作法可以重复, 对于秩数为 k 的自由群中的 m 个元素 $z_1, \dots, z_m \in F(a_1, \dots, a_k)$, 考虑连续映射

$$f_i: (S^1, 1) \rightarrow (\vee_k S^1, *), \quad f_{i*}[\alpha_1] = z_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

并构造如下 2 维胞腔复形:

$$X = (\vee_k S^1) \cup_{f_1} D^2 \cup_{f_2} D^2 \cup \dots \cup_{f_m} D^2.$$

则得:

推论2 (有限表示群的拓扑背景): 上述 2 维胞腔复形 X 的基本群是

$$\pi_1(X, *) = \langle a_1, \dots, a_k \mid z_1, \dots, z_m \rangle.$$

尤其是, 每个有限表示群, 是某个 2 维胞腔复形的基本群. $\square$

将推论1应用于闭曲面的胞腔分解(第二章,第3节)

$$n \cdot T^2 = (\vee_{2n} S^1) \cup_{f_n} D^2, \quad n \cdot RP^2 = (\vee_n S^1) \cup_{g_n} D^2,$$

我们得到

推论3: 全体闭曲面的基本群是下述有限表示群:

- 1) $\pi_1(S^2, *) = 0$;
- 2) $\pi_1(nT^2, *) = \langle a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \mid a_1 \cdot b_1 \cdot a_1^{-1} \cdot b_1^{-1} \cdots a_n \cdot b_n \cdot a_n^{-1} \cdot b_n^{-1} \rangle$
- 3) $\pi_1(n\mathbb{R}P^2, *) = \langle a_1, \dots, a_n \mid a_1^2 \cdot a_2^2 \cdots a_n^2 \rangle$.

习题4: 构造出基本群同构于下述群的二维胞腔复形:

$$(1) \mathbb{Z}_p; \quad (2) \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q; \quad (3) \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q. \square$$

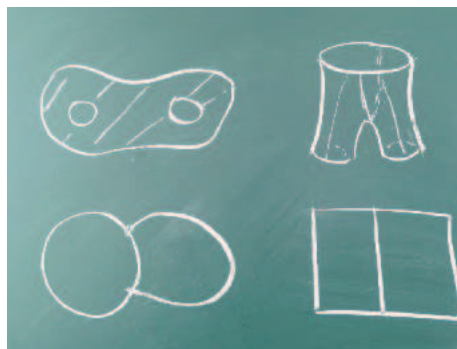
习题5: 利用推论4证明

- 1) $\pi_1(T^2, *) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
- 2) $\pi_1(\mathbb{R}P^2, *) = \mathbb{Z}_2$.

习题6: 设 (A, a) 道路连通且局部可缩. 证明对于任意连续映射 $f: (S^0, 1) \rightarrow (A, a)$

- 1) $A \cup_f D^1 \simeq A \vee S^1$
- 2) $\pi_1(A \vee S^1, a) = \pi_1(A, a) * F(t)$, 其中 $F(t)$ 是一个生成元 t 的自由群.

习题7: 计算下面平面图形的的基本群, 并标出它们的一组生成元.



3.5 基本群与复迭映射的分类

回顾第3节中引入的复迭映射的概念：一个连续满射 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ 称为**复迭映射**，如果对于每点 $x \in X$ ，存在一个**道路连通的开邻域** $U \subset X$ ，满足如下**局部平凡性**：

- 1) $p^{-1}(U) = \coprod_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha \subset \tilde{X}$
- 2) 对于每个指标 $\alpha \in \Lambda$ ，限制映射 $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \rightarrow U$ 是一个同胚。

本节将解答的问题是：在一个给定的拓扑空间 X 上，究竟存在着多少不同的复迭空间(映射) $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ ？如何对它们进行分类？

答案：空间 X 的基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 及其子群。

本节的安排是：

- 1) 复迭映射的不变量；
- 2) 复迭映射的分类；
- 3) 实现问题

3.5.1 复迭映射的不变量

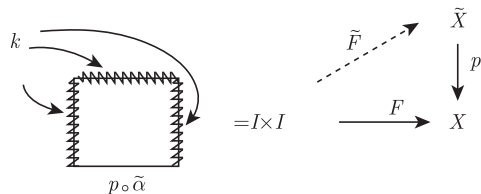
我们约定 $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ 是一个复迭映射。所涉及的空间均是道路连通、局部道路连通的 T_2 空间。

定理1：复迭映射 $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ 的诱导同态 $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ 具有下述性质：

- 1) p_* 是单同态；
- 2) $\text{Imp}_* = \{[\alpha] \in \pi_1(X, x_0), \tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_0\}$ ，其中 $\tilde{\alpha}: (I, 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ 是闭路 $\alpha: (I, 0) \rightarrow (X, x_0)$ 的唯一提升；
- 3) 子群 $\text{Imp}_* \subset \pi_1(X, x_0)$ 的**指数**等于复迭映射 p 的重数

$$[\text{Imp}_* : \pi_1(X, x_0)] = |p^{-1}(x_0)|.$$

证明：1) 如果 $[\beta] \in \ker p_*$ ，则有 X 中同伦关系 $p \circ \beta \simeq_F x_0 \text{ rel}(\partial I)$ 。根据同伦提升引理，设 $\tilde{F}: (I \times I; 0 \times I) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ 是伦移 $F: (I \times I; 0 \times I) \rightarrow (X, x_0)$ 的唯一提升：



并记 $L = \{0\} \times I \sqcup I \times \{1\} \sqcup \{1\} \times I \subset I \times I$. 由于 L 道路连通

$$F(L) = x_0 \Rightarrow \tilde{F}(L) \subset p^{-1}(x_0) \Rightarrow \tilde{F}(L) = \tilde{x}_0.$$

最后一个等式表明

$$\beta \underset{\tilde{F}}{\simeq} \tilde{x}_0 \quad \text{rel}(\partial I) \Leftrightarrow [\beta] = 0.$$

据此 p_* 是单同态.

性质 2) 显然. 下证性质 3). 考察集合间的对应

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\alpha} & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0), & h([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1), & \nearrow \downarrow p \\ (I, 0) & \xrightarrow{\alpha} & (X, x_0) \end{array}$$

其中 $\tilde{\alpha}$ 是闭路 α 的保基点 $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$ 的唯一提升. 则有

a) h 定义合理: 设有 $[\alpha] = [\alpha'] \in \pi_1(X, x_0) \Leftrightarrow \alpha \simeq_F \alpha' \text{rel}(\partial I)$, 根据同伦提升引理 $\tilde{\alpha} \simeq_{\tilde{F}} \tilde{\alpha}' \text{rel}(\partial I)$. 其中,

$$F(1, t) = x_0 \Rightarrow \tilde{F}(1, t) \in p^{-1}(x_0) \Rightarrow \tilde{\alpha}(1) = \tilde{F}(1, 0) = \tilde{F}(1, t) = \tilde{F}(1, 1) = \tilde{\alpha}'(1).$$

b) h 是满射: 因为 $\tilde{X}$ 道路连通, 对于任意 $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, 存在一条道路 $\beta : I \rightarrow \tilde{X}$, 满足

$$\beta(0) = \tilde{x}_0, \quad \beta(1) = \tilde{x}.$$

令 $\alpha = p \circ \beta \in \Omega(X, x_0) \Rightarrow [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. 由于 β 正是 α 的唯一提升. 我们得到

$$h([\alpha]) = \beta(1) = \tilde{x}.$$

c) h 诱导双射: $\frac{\pi_1(X, x_0)}{\text{Imp}_*}$ (陪集) $\leftrightarrow p^{-1}(x_0) : \text{ 如有 } [\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0) \text{ 使得 } h([\alpha]) = h([\beta]), \text{ 则}$

$$\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) \Leftrightarrow [\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}^{-1}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \Leftrightarrow [\alpha] \cdot [\beta^{-1}] \in \text{Imp}_*.$$

从而子群 $\text{Imp}_* \subset \pi_1(X, x_0)$ 的指数等于复迭映射 p 的重数 $|p^{-1}(x_0)|$. $\square$

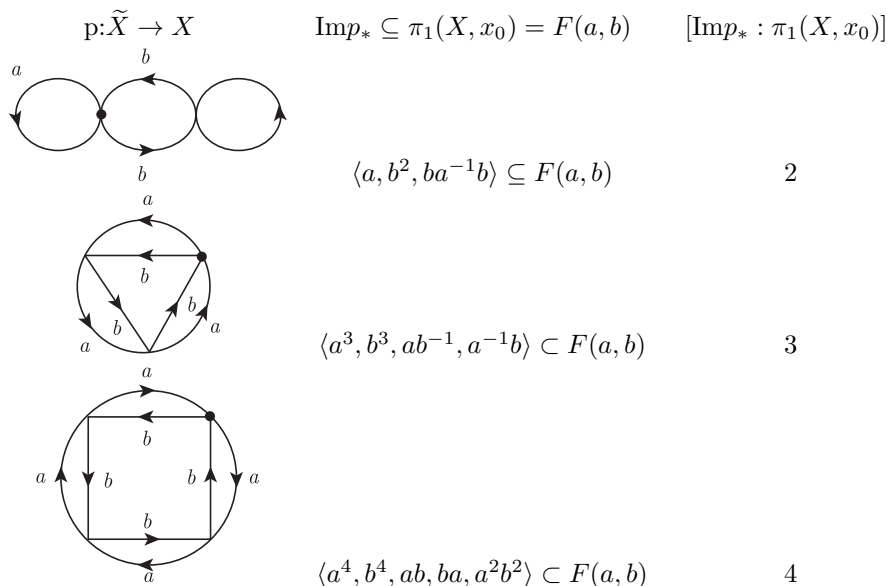
例1: 对于一个正整数 k , 令 $p_k : S^1 \rightarrow S^1, p_k(z) = z^k$. 则 p_k 是一个 k 重复迭映射. 它满足 $\text{Imp}_* = k \cdot \mathbb{Z} \subset \pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$.

例2: 定理1在群论中有如下应用: 秩数为 2 的自由群 $F(a, b)$ 中, 存在秩数 > 2 的自由子群.

对于两个圆周的一点并空间 $X = \bigcirc \bigcirc = S^1 \vee S^1$, 我们有

$$\pi_1(X, x_0) = F(a, b).$$

下图所规定的复迭映射决定了自由群 $F(a, b)$ 中的三个自由子群, 它们的秩数分别是3, 4, 5:



3.5.2 复迭空间的分类

定理2(连续映射的提升定理): 已知复迭映射 $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ 以及一个连续映射 $f: (Y, r) \rightarrow (X, x_0)$. 则映射的提升问题:

$$\begin{array}{ccc}
 & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) & \\
 \tilde{f} \nearrow & \downarrow \rho & \\
 (Y, r) & \xrightarrow{f} & (X, x_0)
 \end{array}
 \quad \Leftrightarrow \quad p \circ \tilde{f} = f \text{ 且 } \tilde{f}(r) = \tilde{x}_0$$

有解 $\tilde{f}$ 的充要条件是 $f_*(\pi_1(Y, r)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

证明: 如果 $p \circ \tilde{f} = f$, 则由诱导同态的函子性质得 $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$. 它表明 $\text{Im} f_* = \text{Imp}_*$. 必要性得证.

下证充分性. 逐点定义集合间的对应 $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ 如下:

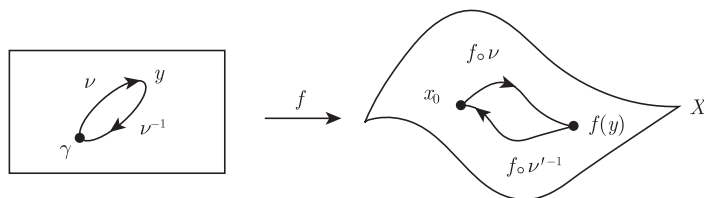
1) $\tilde{f}(r) = \tilde{x}_0$;

2) 对于任意一点 $y \in Y$, 令 $\gamma: I \rightarrow Y$ 是从点 r 到点 y 的一条道路 ($\gamma(0) = r, \gamma(1) = y$). 设 $\widetilde{f \circ \gamma}: (I, 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ 是 X 中的道路 $f \circ \gamma: (I, 0) \rightarrow (X, x_0)$ 的保持基点的唯一提升. 并定义

$$\tilde{f}(y) := \widetilde{f \circ \gamma}(1).$$

则有 $p \circ \tilde{f}(y) = f(y)$. 只需要再证 $\tilde{f}$ 的定义合理且连续。

a) 合理性: 设 $\gamma' : (I, 0) \rightarrow (Y, r)$ 是 Y 中从点 r 到 y 的另一条道路, 则得 Y 中的一条闭路 $\gamma \cdot \gamma'^{-1} \in \Omega(Y, r)$



它满足

$$f_*[\gamma \cdot \gamma'^{-1}] = [f \circ \gamma \cdot f \circ \gamma'^{-1}] \in \text{Imp}_*$$

由定理1中的性质2)知, 闭路 $f \circ \gamma \cdot f \circ \gamma'^{-1}$ 的唯一提升是复叠空间中一条闭路 $\widetilde{f \circ \gamma \cdot f \circ \gamma'^{-1}} \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ 中的一条闭路, 从而

$$y = \widetilde{f \circ \gamma} \text{ 的终点} = \widetilde{f \circ \gamma'^{-1}} \text{ 的起点} = \widetilde{f \circ \gamma'} \text{ 的终点}.$$

b) 连续性: 对于一点 $y \in Y$ 可以取到 $f(y) \in X$ 的开邻域 $U \subset X$, 以及 $\tilde{f}(y) \in \tilde{X}$ 的开邻域 $V \subset \tilde{X}$, 使得 $p|V : V \rightarrow U$ 是一个同胚. 对于 $y \in f^{-1}(U)$ 中的一个道路连通的开邻域 $N \subset f^{-1}(U)$, 我们有

$$\tilde{f}|N = (p|V)^{-1} \circ f : N \rightarrow V.$$

据此 $\tilde{f}$ 在 y 点附近连续.

综上, 充分性得证. $\square$

定理2的证明蕴含了:

习题1(提升映射的唯一性): 已知连续映射 $f : Y \rightarrow X$ 的两个提升:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 & \tilde{X} \\ Y & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow \rho & \end{array}$$

如果存在一点 $r \in Y$ 使得 $\tilde{f}_1(r) = \tilde{f}_2(r)$, 则 $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$.

提示: 取基点 $x_0 = f(r)$, $\tilde{x}_0 = \tilde{f}_1(r) = \tilde{f}_2(r)$. 则有

$$\begin{array}{ccc}
 & \nearrow \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\
 (Y, x_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \\
 & \searrow \rho &
 \end{array}$$

对于任意 $y \in Y$, 令 $\gamma: (I, 0) \rightarrow (Y, r)$ 是从 r 到 y 的一条道路, 则 $\widetilde{f_1 \circ \gamma}$ 和 $\widetilde{f_2 \circ \gamma}$ 是空间 X 中同一条道路 $f \circ \gamma$ 的两个起点相同的提升. 由道路提升引理的唯一性知

$$\widetilde{f_1 \circ \gamma}(t) = \widetilde{f_2 \circ \gamma}(t).$$

在上式中令 $t = 1$ 得 $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$

习题2: 已知连续映射的复合:

$$p = p_1 \circ p_2: \tilde{X}_2 \xrightarrow{p_2} \tilde{X}_1 \xrightarrow{p_1} X,$$

其中 p, p_1 均是复迭映射. 证明 p_2 也是复迭映射.

定义: 空间 X 上的两个复迭映射 $p_i: \tilde{X}_i \rightarrow X$, $i = 1, 2$ 称为**等价地**, 记为 $p_1 \cong p_2$, 如果存在一个同胚 $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$, 满足 $p_1 = p_2 \circ f$:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X}_1 & \xrightarrow{f} & \tilde{X}_2 \\
 \searrow P_1 & & \swarrow P_2 \\
 & X &
 \end{array}$$

进一步, 如果 $p_1 = p_2$ ($\tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$), 则同胚 f 称为复迭映射 $p (= p_1 = p_2)$ 的一个**复迭变换**.

例2: 令 $g: S^n \rightarrow S^n$, $g(x) = -x$; $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $f_k(x) = x + k$, $k \in \mathbb{Z}$. 则映射 g 和 f_k 均是复迭变换:

$$\begin{array}{ccc}
 S^n & \xrightarrow{g} & S^n \\
 \searrow P & & \swarrow P \\
 & \mathbb{R}P^n &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{f_k} & \mathbb{R} \\
 \searrow P & & \swarrow P \\
 & S' &
 \end{array}$$

定理3(复迭映射的分类): 对于空间 X 上的两个复迭映射 $p_i: (\tilde{X}_i, \tilde{x}_i) \rightarrow (X, x_0)$, $i = 1, 2$, 令 $H_i = p_{i*}\pi_1(\tilde{X}_i, \tilde{x}_i) \subset \pi_1(X, x_0)$, $i = 1, 2$.

1) 如果 $H_1 \subseteq H_2$, 则存在复迭映射 $p: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$, 满足 $p_1 = p_2 \circ p$:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\quad P \quad} & \tilde{X}_2 \\
 \searrow P_1 & & \swarrow P_2 \\
 & X &
 \end{array}$$

2) $p_1 \cong p_2$ 的充要条件是, 子群 H_1 和 H_2 在基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 中共轭.

证明: 由于 $H_1 \subseteq H_2$, 根据定理5.2, 映射提升问题

$$\begin{array}{ccc}
 & (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) & \\
 & \nearrow p & \\
 (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) & \xrightarrow{p_1} & (X, x_0)
 \end{array}$$

存在唯一解 p , $p(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. 由于 $p_1 = p_2 \circ p$, 其中 p_1, p_2 均是复迭映射, 根据习题2, 令 p 是一个复迭映射.

下设存在一个同胚 $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$, 满足映射的交换图表

$$\begin{array}{ccc}
 (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) & \xrightarrow{\quad f \quad} & (X_2, f(\tilde{x}_1)) \\
 \searrow P_1 & & \swarrow P_2 \\
 & (X, x_0) &
 \end{array}
 \quad (\Leftrightarrow P_1 \cong P_2)$$

则得

(A) 基本群诱导同态的交换图表

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) & \xrightarrow[\cong]{\quad f \quad} & \pi_2(X_2, f(\tilde{x}_1)) \\
 \searrow P_{1*} & & \swarrow P_{2*} \\
 & \pi_1(X, x_0) &
 \end{array}$$

由于 $f(\tilde{x}_1), \tilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x_0)$ 且 $\tilde{X}_2$ 道路连通, 存在 $\tilde{X}_2$ 中的一条道路 $\gamma: I \rightarrow \tilde{X}_2$, 使得:

$$\gamma(0) = \tilde{x}_2, \quad \gamma(1) = f(\tilde{x}_1).$$

据此得

(B) $[\alpha] = [p_2 \circ \gamma] \in \pi_1(X, x_0)$

(C) $\pi_1(\tilde{X}_2, f(\tilde{x}_1)) = \{[\gamma^{-1} \cdot \beta \cdot \gamma], \beta \in \pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)\}$ (基本群基点的作用)

只需要再证明 $H_1 = [\alpha]^{-1} \cdot H_2 \cdot [\alpha]$:

$$H_1 = p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, f(\tilde{x}_1)) \quad (\text{根据 (A)})$$

$$\begin{aligned}
&= \{p_{2*}[\gamma^{-1} \cdot \beta \cdot \gamma], \beta \in \pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)\} \quad (\text{根据 (C)}) \\
&= \{[\alpha]^{-1} \cdot [p_{2*}\beta] \cdot [\alpha], \beta \in \pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)\} \quad (\text{根据 (B)}) \\
&= [\alpha]^{-1} \cdot H_2 \cdot [\alpha]. \quad \square
\end{aligned}$$

3.5.3 实现问题

实现问题: 已知一个道路连通、局部道路连通的拓扑空间 (X, x_0) , 以及它的一个基本群的子群 $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$, 是否存在一个复迭映射(空间):

$$p: (\tilde{X}_H, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$$

满足 $\text{Imp}_* = H$?

拓扑空间 X 是称为**局部单连通**, 如果对于其中每一点 $x \in X$, 存在一个开邻域 $U \in X$, 使得 $\pi_1(U, x) = 0$.

定理4: 如果 X 是道路连通, 局部道路连通, 局部单连通的空问, 则对于任一子群 $H \subset \pi_1(X, x_0)$, 存在一个复迭映射 $p: (X_H, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$, 满足 $\text{Imp}_* = H$.

证明: 取定的一个基点 $x_0 \in X$, 考察 X 中以 x_0 为起点的道路的集合:

$$P(X, x_0) = \{\alpha: I \rightarrow X, \alpha(0) = x_0\}.$$

利用已知子群 $H \subset \pi_1(X, x_0)$, 在集合 $P(X, x_0)$ 中引入等价关系 $\sim_H$ 如下:

$$\alpha \sim_H \beta \Leftrightarrow \alpha(1) = \beta(1) \quad \text{且} \quad [\alpha \cdot \beta^{-1}] \in H.$$

令 $X_H = P(X, x_0) / \sim_H$ 为相应的商集合, 并用 $[\alpha]_H$ 表示道路 $\alpha \in P(X, x_0)$ 所决定的等价类.

引入集合间的对应

$$p: X_H \rightarrow X \quad \text{为} \quad p[\alpha]_H = \alpha(1).$$

则对应 p 具有如下显而易见的性质

(A) 对于任意一点 $x \in X$, 有 $p^{-1}(x) \leftrightarrow \pi_1(X, x_0)/H$.

下面来规定集合 X_H 中的拓扑: 对于一个等价类 $[\alpha]_H \in X_H$, 令

$$U([\alpha]_H) = \{[\alpha \cdot \beta]_H \in X_H, \beta: I \rightarrow V_{\alpha(1)}, \beta(0) = \alpha(1)\},$$

其中 $V_{\alpha(1)} \subset X$ 是点 $\alpha(1) \in X$ 的一个单连通邻域. 用所有形如 $U([\alpha]_H)$ 的子集作为拓扑基, 生成集合 X_H 中的一个拓扑. 则上述映射 $p: X_H \rightarrow X$ 是一个复迭映射, 它满足 $\text{Imp}_* = H$. $\square$

定义: 如果 $H = \{e\} \subset \pi_1(X, x_0)$ 是平凡群, 则定理5.4中所构造的复迭空间 $X_H \rightarrow X$ 称为空间 X 的**泛复迭空间 (the universal covering of X)**.