

拓扑学：紧致性与连通性

——从直观到严格

目录

1	紧致子空间	2
1.1	基本概念与直观	2
1.2	紧致子空间的基本性质	2
1.3	紧致性与分离性	5
1.4	欧氏空间中的紧致性：Heine-Borel 定理	6
1.5	Lebesgue 引理	7
1.6	局部紧致与仿紧	7
2	拓扑空间的连通性	8
2.1	定义与等价条件	8
2.2	连通空间的基本性质	9
2.3	连通分支与道路连通	10
2.4	拓展：连通性在分析中的应用	10
3	总结与延伸	10
A	习题与思考	11

摘要

紧致性与连通性是拓扑学中最基本、最重要的两个概念。紧致性抽象了欧氏空间中有界闭集的有限覆盖性质，而连通性则刻画了空间“不可分割”的整体性。本文从直观出发，详细阐述这两个概念的定义、等价刻画、基本性质、典型例子以及它们之间的内在联系。每个定理都附有证明思路和详细推导，力求让读者不仅“知其然”，更“知其所以然”。

1 紧致子空间

在欧氏空间或度量空间中，有界闭集具有许多良好的分析性质：连续函数能取到最大值、无穷点列必有收敛子列等。紧致性正是这些性质在一般拓扑空间中的抽象推广。

1.1 基本概念与直观

定义 1.1 (直径与有界性). 设 (X, d) 为度量空间, $A \subseteq X$ 。称

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$$

为 A 的直径。若 $\text{diam}(A) < \infty$ ，则称 A 是有界的。

直观：直径是集合中两点之间的最大距离（可能取不到，是上确界）。有界意味着整个集合可以被某个有限半径的球包含。

定义 1.2 (开覆盖与紧致子空间). 设 (X, τ) 是拓扑空间, $A \subseteq X$ 。

- 一族开集 $\{U_\lambda \in \tau : \lambda \in \Lambda\}$ 称为 A 的一个开覆盖，若 $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ 。
- 若指标集 Λ 有限，则称该覆盖为有限开覆盖。
- A 称为 X 的紧致子空间（或简称紧致），如果 A 的每个开覆盖都有有限子覆盖。

直观：紧致性是一种“有限性”条件——无论我们用多么细碎的开集去覆盖这个集合，总能从中挑出有限个就已经足够覆盖它。这就像我们想用许多小毯子盖住一个区域，如果区域是紧致的，那么总可以从这些毯子中选出有限条就能盖严实。

常见例子：

- 闭区间 $[0, 1]$ 是紧致的（Heine-Borel 定理）。
- 开区间 $(0, 1)$ 不紧致：覆盖 $\{(1/n, 1) : n \geq 2\}$ 没有有限子覆盖。
- $\mathbb{R}$ 不紧致：覆盖 $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ 没有有限子覆盖。

1.2 紧致子空间的基本性质

下面我们逐一证明紧致空间的基本性质，并强调每个证明的核心思路。

命题 1.1 (闭子空间紧致). 紧致空间的闭子空间是紧致的。

证明思路: 要证闭子集 A 的任一开覆盖有有限子覆盖，只需将该覆盖连同 A 的补集（开集）一起构成 X 的一个开覆盖，利用 X 的紧致性取出有限子覆盖，再剔除可能的补集项即可。

证明. 设 X 紧致， $A \subseteq X$ 闭。任取 A 的一个开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ （这里 U_λ 是 X 中的开集）。由于 A 闭， $X \setminus A$ 是开集。于是

$$\{X \setminus A\} \cup \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

是 X 的一个开覆盖。由 X 紧致，存在有限子覆盖

$$\{X \setminus A, U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}\}.$$

那么 $\{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}\}$ 就是 A 的一个有限子覆盖（因为 A 与 $X \setminus A$ 不交）。□

命题 1.2 (连续像紧致). 紧致空间在连续映射下的像也是紧致的。

证明思路: 设 $f: X \rightarrow Y$ 连续，要证 $f(X)$ 的任一开覆盖有有限子覆盖，只需将这些开集的原像拉回 X ，得到 X 的一个开覆盖，用 X 的紧致性取出有限个原像，它们的像即为所求。

证明. 设 X 紧致， $f: X \rightarrow Y$ 连续。任取 $f(X)$ 的一个开覆盖 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ （ V_λ 是 Y 中的开集）。则

$$\{f^{-1}(V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$$

是 X 的一个开覆盖（因为 f 连续，原像开）。由 X 紧致，存在有限子覆盖

$$f^{-1}(V_{\lambda_1}), \dots, f^{-1}(V_{\lambda_n}).$$

于是 $\{V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_n}\}$ 覆盖 $f(X)$ ：对任意 $y \in f(X)$ ，存在 $x \in X$ 使 $y = f(x)$ ，则 $x \in f^{-1}(V_{\lambda_i})$ 对某个 i ，故 $y = f(x) \in V_{\lambda_i}$ 。□

命题 1.3 (连续函数有界并取最值). 紧致拓扑空间上的连续实值函数必有界，且能取到最大值和最小值。

证明思路: 由命题 2， $f(X)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧致子集。而在 $\mathbb{R}$ 中，紧致等价于有界闭集（Heine-Borel 定理），因此 $f(X)$ 有界且闭，从而上下确界属于 $f(X)$ ，即最值可达。

证明. 设 X 紧致, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 连续. 由命题 2, $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ 紧致. 在 $\mathbb{R}$ 中, 紧致子集必然有界且闭 (这是定理 4.1 的结论, 后面会证). 因此 $f(X)$ 有界, 且 $\sup f(X)$ 和 $\inf f(X)$ 都属于 $f(X)$ (因为闭集包含其聚点, 而上下确界是聚点). 故存在 $x_1, x_2 \in X$ 使得 $f(x_1) = \sup f(X)$, $f(x_2) = \inf f(X)$. $\square$

直观: 这个性质是微积分中“闭区间上连续函数取最值”的推广. 紧致性代替了“有界闭”, 连续函数保持紧致性, 因此值域也是紧致的, 从而有最值.

命题 1.4 (乘积空间紧致). 若 X 和 Y 紧致, 则乘积空间 $X \times Y$ (赋予乘积拓扑) 也是紧致的.

这是紧致性在乘积下的保持, 证明需要用到著名的“管状邻域引理”. 我们先单独证明该引理, 再证命题.

引理 1.5 (管状邻域存在性). 设 Y 紧致, $x_0 \in X$, W 是 $X \times Y$ 中包含 $\{x_0\} \times Y$ 的一个开集. 则存在 x_0 的一个开邻域 $U(x_0) \subseteq X$, 使得 $U(x_0) \times Y \subseteq W$.

引理证明思路: 对每个 $y \in Y$, $(x_0, y) \in W$, 由乘积拓扑的定义, 存在开邻域 $U_y \times V_y \subseteq W$. $\{U_y \times V_y\}$ 覆盖 $\{x_0\} \times Y$, 而后者同胚于紧致空间 Y , 故有有限子覆盖. 取这些 U_y 的交作为 $U(x_0)$, 即可保证整个 $U(x_0) \times Y$ 落入 W .

引理证明. 对每个 $y \in Y$, 因为 $(x_0, y) \in W$ 且 W 开, 存在开集 $U_y \subseteq X$ 和 $V_y \subseteq Y$ 使得

$$(x_0, y) \in U_y \times V_y \subseteq W.$$

于是 $\{U_y \times V_y : y \in Y\}$ 是 $\{x_0\} \times Y$ 的一个开覆盖. 由于 $\{x_0\} \times Y$ 同胚于 Y , 而 Y 紧致, 故存在有限子覆盖

$$U_{y_1} \times V_{y_1}, \dots, U_{y_n} \times V_{y_n}.$$

令 $U(x_0) = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$, 则 $U(x_0)$ 是 x_0 的开邻域. 现在取任意 $(x, y) \in U(x_0) \times Y$. 由于 $y \in Y$, 存在某个 i 使 $y \in V_{y_i}$. 又因为 $x \in U(x_0) \subseteq U_{y_i}$, 所以 $(x, y) \in U_{y_i} \times V_{y_i} \subseteq W$. 因此 $U(x_0) \times Y \subseteq W$. $\square$

引理的直观意义: 如果有一根“纤维” $\{x_0\} \times Y$ 完全被一个开集 W 包含, 且 Y 是紧致的, 那么我们可以将这一根纤维“加粗”成一个管状邻域 $U(x_0) \times Y$, 仍然被 W 包含. 这是紧致性在纤维方向上的“均匀性”体现.

现在证明乘积空间紧致.

命题 4 的证明. 设 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 $X \times Y$ 的一个开覆盖. 固定 $x \in X$, 考虑“纤维” $\{x\} \times Y$, 它同胚于 Y , 故紧致. 因此存在有限个 $\lambda_i(x) \in \Lambda$ ($i = 1, \dots, n(x)$) 使得

$$\{x\} \times Y \subseteq U_{\lambda_1(x)} \cup \dots \cup U_{\lambda_{n(x)}(x)}.$$

记 $W_x = \bigcup_{i=1}^{n(x)} U_{\lambda_i(x)}$, 则 W_x 是包含 $\{x\} \times Y$ 的开集。由管状邻域引理, 存在 x 的开邻域 $U(x) \subseteq X$ 使得

$$U(x) \times Y \subseteq W_x.$$

现在 $\{U(x) : x \in X\}$ 是 X 的一个开覆盖。由于 X 紧致, 存在有限个点 $x_1, \dots, x_m$ 使得

$$X = U(x_1) \cup \dots \cup U(x_m).$$

于是

$$X \times Y = \bigcup_{j=1}^m (U(x_j) \times Y) \subseteq \bigcup_{j=1}^m (U_{\lambda_1(x_j)} \cup \dots \cup U_{\lambda_{n(x_j)}(x_j)}).$$

因此 $\{U_{\lambda_i(x_j)} : j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n(x_j)\}$ 是原覆盖的一个有限子覆盖。□

命题 1.6 (Bolzano-Weierstrass 性质). 紧致空间中的无穷子集 (或无穷点列) 必有聚点。

证明思路: 反证法。假设 A 无聚点, 则每点 $x \in X$ 有一个开邻域只含 A 中至多一个点。这些邻域构成开覆盖, 取有限子覆盖, 则每个邻域至多含一点, 从而 A 有限, 矛盾。

证明. 设 X 紧致, $A \subseteq X$ 没有聚点。对任意 $x \in X$, 存在开邻域 U_x 使得 $U_x \cap A$ 至多含一点 (若 $x \notin A$, 可取 U_x 与 A 不交; 若 $x \in A$, 由于 x 不是聚点, 存在邻域只含 x 本身)。于是 $\{U_x : x \in X\}$ 是 X 的一个开覆盖。由紧致性, 存在有限子覆盖 $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ 。每个 U_{x_i} 至多含 A 中一点, 故 $|A| \leq n$, 即 A 有限。因此, 若 A 无穷, 则必有聚点。□

直观: 紧致空间中的无穷点列不可能“逃逸到无穷远”, 总有一个聚点“聚集”。这类似于有界闭区间上的点列必有收敛子列 (列紧性)。在度量空间中, 紧致性与列紧性等价, 但在一般拓扑空间中, 紧致性更强。

1.3 紧致性与分离性

在 Hausdorff (T_2) 空间中, 紧致子集具有更强的分离性质。

命题 1.7 (点与紧致集可分离). 设 X 是 T_2 空间, $A \subseteq X$ 紧致, $x \notin A$ 。则存在不交开集 $U \ni x$ 和 $V \supseteq A$ 。

证明思路: 对每个 $a \in A$, 由 T_2 存在不交开邻域 $U_a \ni a$ 和 $V_a \ni x$ 。 $\{U_a\}$ 覆盖 A , 取有限子覆盖, 对应 V_a 的交作为 x 的邻域, U_a 的并作为 A 的邻域, 它们不交。

证明. 对每个 $a \in A$, 因为 $x \neq a$ 且 X 是 T_2 , 存在开邻域 $U_a \ni a$, $V_a \ni x$ 使得 $U_a \cap V_a = \emptyset$ 。集合 $\{U_a : a \in A\}$ 是 A 的一个开覆盖。由于 A 紧致, 存在有限子覆盖 $U_{a_1}, \dots, U_{a_n}$ 。令

$$U = \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}, \quad V = \bigcap_{i=1}^n V_{a_i}.$$

则 U 是开集且 $A \subseteq U$, V 是开集且 $x \in V$ 。若 $z \in U \cap V$, 则存在 i 使 $z \in U_{a_i}$ 且 $z \in V \subseteq V_{a_i}$, 这与 $U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$ 矛盾。因此 $U \cap V = \emptyset$ 。□

命题 1.8 (紧致子集必闭). T_2 空间的紧致子空间是闭的。

证明思路: 取 $x \notin A$, 由命题 1 得到开邻域 V_x 与 A 不交, 故 x 是 A 的补集的内点, 从而补集开, A 闭。

证明. 设 A 紧致, $x \notin A$ 。由命题 1, 存在开集 $U \ni x$ 使得 $U \cap A = \emptyset$, 即 $U \subseteq X \setminus A$ 。因此 x 是 $X \setminus A$ 的内点, 故 $X \setminus A$ 开, A 闭。□

命题 1.9 (不交紧致集可分离). 设 X 是 T_2 空间, $A, B \subseteq X$ 紧致且 $A \cap B = \emptyset$ 。则存在不交开集 $U \supseteq A, V \supseteq B$ 。

证明思路: 固定 $b \in B$, 由命题 1, 存在不交开集 $U_b \supseteq A, V_b \ni b$ 。 $\{V_b : b \in B\}$ 覆盖 B , 取有限子覆盖, 对应 U_b 的交作为 A 的邻域, V_b 的并作为 B 的邻域, 它们不交。

证明. 对每个 $b \in B$, 由命题 1, 存在不交开集 $U_b \supseteq A, V_b \ni b$ 。 $\{V_b : b \in B\}$ 是 B 的一个开覆盖。由于 B 紧致, 存在有限子覆盖 $V_{b_1}, \dots, V_{b_n}$ 。令

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_{b_i}, \quad V = \bigcup_{i=1}^n V_{b_i}.$$

则 U 是开集且 $A \subseteq U$, V 是开集且 $B \subseteq V$ 。若 $z \in U \cap V$, 则存在 i 使 $z \in V_{b_i}$ 且 $z \in U \subseteq U_{b_i}$, 矛盾于 $U_{b_i} \cap V_{b_i} = \emptyset$ 。故 $U \cap V = \emptyset$ 。□

命题 1.10 (紧致 T_2 空间是 T_3 和 T_4 的). 紧致的 T_2 空间满足 T_3 (正则) 和 T_4 (正规) 公理。

证明: 在紧致 T_2 空间中, 闭子集与紧致子集等价 (命题 2)。因此 T_3 由命题 1 直接得到 (点视为紧致集), T_4 由命题 3 得到 (两个不交闭集视为紧致集)。

1.4 欧氏空间中的紧致性: Heine-Borel 定理

这是联系分析与拓扑学的桥梁。

定理 1.11 (Heine-Borel 定理). $\mathbb{R}^n$ 的子集 A 是紧致的当且仅当 A 是有界闭集。

证明思路:

- 必要性 (紧致 $\Rightarrow$ 有界闭): 紧致空间在 T_2 空间中闭, 故 A 闭。有界性: 用开球覆盖取有限子覆盖。
- 充分性 (有界闭 $\Rightarrow$ 紧致): 有界闭集包含于某个闭方体, 而闭方体紧致 (由有限区间乘积紧致), 闭子集紧致。

证明. **必要性:** 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 紧致. 由于 $\mathbb{R}^n$ 是 T_2 空间, 由命题 2 知 A 闭. 再证有界: 取定 $a \in A$, 考虑开球族 $\{B(a, k) : k \in \mathbb{N}\}$, 它们覆盖 $\mathbb{R}^n$, 从而覆盖 A . 由紧致性, 存在有限个球覆盖 A , 设最大半径为 R , 则 $A \subseteq B(a, R)$, 故有界.

充分性: 设 A 有界闭. 存在闭方体 $I = [a_1 - r, a_1 + r] \times \cdots \times [a_n - r, a_n + r]$ 包含 A . 先证闭区间 $[a, b]$ 在 $\mathbb{R}$ 中紧致 (标准证明: 用区间套定理或直接利用有限覆盖定理). 再由命题 4 (有限个紧致空间的乘积紧致) 知 I 紧致. 而 A 是 I 的闭子集, 由命题 1 知 A 紧致. $\square$

注意: 在一般度量空间中, 紧致等价于完备且完全有界 (但此时不要求是闭子集, 因为整个空间可能不是完备的). Heine-Borel 定理本质上是利用了 $\mathbb{R}^n$ 的完备性和局部紧致性.

1.5 Lebesgue 引理

这是紧致度量空间的一个精细性质, 常用于证明一致连续性.

定理 1.12 (Lebesgue 数引理). 设 (X, d) 是紧致度量空间, $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 X 的一个开覆盖. 则存在 $\delta > 0$ (称为该覆盖的 *Lebesgue 数*), 使得对任意直径小于 δ 的子集 $S \subseteq X$, 都有某个 λ 满足 $S \subseteq U_\lambda$.

证明思路: 反证法. 假设不存在这样的 δ , 则可取直径趋于 0 的集合 S_n 不被任何 U_λ 包含. 取点 $x_n \in S_n$, 由紧致性得收敛子列 $x_n \rightarrow x$. x 属于某个 U_{λ_0} , 利用开性, 取足够小的邻域, 当 n 充分大时, S_n 将落入该邻域, 矛盾.

证明. 假设结论不成立, 则对每个正整数 n , 存在子集 $S_n \subseteq X$ 满足 $\text{diam}(S_n) < 1/n$ 且 S_n 不包含于任何 U_λ . 选取 $x_n \in S_n$. 由于 X 紧致, 序列 $\{x_n\}$ 有收敛子列, 不妨设 $x_n \rightarrow x \in X$. 设 $x \in U_{\lambda_0}$, 因 U_{λ_0} 开, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon) \subseteq U_{\lambda_0}$. 取 N 使得对一切 $n \geq N$, 有 $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ 且 $1/n < \varepsilon/2$. 于是对 $n \geq N$, 对任意 $y \in S_n$, 有

$$d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < \text{diam}(S_n) + \varepsilon/2 < 1/n + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

故 $y \in B(x, \varepsilon)$, 从而 $S_n \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U_{\lambda_0}$, 与 S_n 的取法矛盾. $\square$

直观: 这个引理说, 只要集合足够小 (直径小于某个正数), 它就能完全被覆盖中的一个开集 “包住”. 这类似于 “均匀覆盖” 性质, 在紧致度量空间中总是成立的.

1.6 局部紧致与仿紧

紧致性有时过强, 以下两个较弱概念在几何与拓扑中广泛使用.

定义 1.3 (局部紧致). 拓扑空间 X 称为 **局部紧致**, 若每个点都有一个紧致邻域 (即存在紧致集 K 使得点属于 K 的内部).

例子： $\mathbb{R}^n$ 局部紧致但不紧致；有理数 $\mathbb{Q}$ 不是局部紧致（因为任何紧致邻域内部非空会包含一个区间，而 $\mathbb{Q}$ 中区间不紧致）。

定义 1.4 (仿紧). 拓扑空间 X 称为**仿紧**，若它的每个开覆盖都有**局部有限的开加细**：即存在另一个开覆盖 $\{V_\mu\}$ ，满足

- 每个 V_μ 包含于某个 U_λ ；
- 每个点有一个开邻域只与有限个 V_μ 相交。

重要性：仿紧 T_2 空间是正规的 (T_4)，并且允许单位分解的存在，这在微分几何和代数拓扑中至关重要。

常见结论：

- 紧致空间显然是仿紧的（有限覆盖本身就是局部有限的加细）。
- 度量空间是仿紧的（这是 Stone 定理，较难）。
- 局部紧致的 T_2 空间是 T_3 的，但不一定仿紧。

2 拓扑空间的连通性

与紧致性不同，连通性描述的是空间“不断开”的程度，是另一个基本的拓扑不变量。

2.1 定义与等价条件

定义 2.1 (连通空间). 拓扑空间 X 称为**连通的**，如果它不能表示为两个非空不交开集的并。等价地，若 $X = A \cup B$ 且 A, B 开且 $A \cap B = \emptyset$ ，则 A 或 B 必为空。

直观：一个空间是连通的，意味着它是由一整块“粘”在一起的，不能撕成两个分开的部分。例如，区间 $[0, 1]$ 是连通的，而两个不相交的开区间 $(0, 1) \cup (2, 3)$ 不连通。

定理 2.1 (连通性的等价条件). 设 X 是拓扑空间，以下条件等价：

- (i) X 连通；
- (ii) X 中既开又闭的子集只有 X 和 $\emptyset$ ；
- (iii) X 不能表示为两个非空不交闭集的并；
- (iv) 任何连续映射 $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ （其中 $\{0, 1\}$ 取离散拓扑）必是常值映射。

证明思路：采用循环证明，核心是利用开与闭的互补关系，以及连续映射对开集原像的性质。

证明. (i) $\Rightarrow$ (ii): 假设存在非空真既开又闭子集 A . 则 $B = X \setminus A$ 也是非空既开又闭, 且 $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, 这与 (i) 矛盾。

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 若 $X = A \cup B$, A, B 非空闭且不交, 则 $A = X \setminus B$ 是闭集的补集, 故开, 因此 A 是非空真既开又闭子集, 与 (ii) 矛盾。

(iii) $\Rightarrow$ (iv): 假设存在连续满射 $f: X \rightarrow \{0, 1\}$, 则 $A = f^{-1}(0)$ 和 $B = f^{-1}(1)$ 都是非空闭集 (因为单点集在离散拓扑中既开又闭, 原像闭), 且 $A \cap B = \emptyset$, $X = A \cup B$, 这与 (iii) 矛盾。

(iv) $\Rightarrow$ (i): 若 X 不连通, 则存在非空不交开集 A, B 使得 $X = A \cup B$. 定义 $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ 为 $f(x) = 0$ 若 $x \in A$, $f(x) = 1$ 若 $x \in B$. 则 $f^{-1}(\{0\}) = A$ 开, $f^{-1}(\{1\}) = B$ 开, 故 f 连续且是满射, 与 (iv) 矛盾。 $\square$

直观理解: 条件 (ii) 说, 在连通空间中, 没有“中间状态”的子集同时是开和闭; 条件 (iv) 说, 任何把空间映射到两个点的连续函数都必须恒为一点, 即无法用连续的方式将空间分成两半。

2.2 连通空间的基本性质

命题 2.2 (连续像连通). 连通空间在连续映射下的像是连通的。

证明思路: 若 $f(X)$ 不连通, 则可写成两个不交非空开集之并, 其原像将分离 X , 矛盾。

证明. 设 X 连通, $f: X \rightarrow Y$ 连续. 若 $f(X)$ 不连通, 则存在非空开集 $U, V \subseteq Y$ (在子空间拓扑中) 使得 $f(X) \subseteq U \cup V$, $U \cap V \cap f(X) = \emptyset$, 且 $f(X) \cap U \neq \emptyset$, $f(X) \cap V \neq \emptyset$. 于是 $f^{-1}(U)$ 和 $f^{-1}(V)$ 是 X 中非空开集, 不交且覆盖 X , 与 X 连通矛盾。 $\square$

命题 2.3 (实轴上的连通子集). $\mathbb{R}$ 的连通子集要么是单点, 要么是区间 (包括各种端点情况)。

证明思路: 设 $X \subseteq \mathbb{R}$ 连通, 令 $a = \inf X$, $b = \sup X$ (可为无穷)。则对任意 $c \in (a, b)$, 若 $c \notin X$, 则 X 可被 $(-\infty, c)$ 和 (c, ∞) 分离, 矛盾。因此 X 包含所有介于 a, b 之间的点, 即 X 是区间。

证明. 设 $X \subseteq \mathbb{R}$ 非空连通, 令 $a = \inf X$, $b = \sup X$ (可能取 $-\infty$ 或 $+\infty$)。若 $a = b$, 则 $X = \{a\}$ 是单点。若 $a < b$, 则对任意 $c \in (a, b)$, 必有 $c \in X$ 。否则, 令 $A = X \cap (-\infty, c)$, $B = X \cap (c, \infty)$, 则 A, B 非空 (因为 $a < c < b$ 且 a, b 是确界), 且都是 X 的开子集 (在子空间拓扑中), 不交且覆盖 X , 与连通矛盾。因此 $(a, b) \subseteq X$, 故 X 是区间 (可能包含端点或不含)。 $\square$

命题 2.4 (闭包连通). 若 $A \subseteq X$ 连通, 则 $\text{cl}(A)$ 也连通。

证明思路：若 $\text{cl}(A)$ 被两个不交开集分离，则它们与 A 的交也会分离 A ，从而 A 必全落在其中一个中，但另一个若非空会含有 A 的聚点，矛盾。

证明。假设 $\text{cl}(A) = U \cup V$ ，其中 U, V 是 $\text{cl}(A)$ 中的开集（在子空间拓扑中）， $U \cap V = \emptyset$ ，且 U, V 非空。则 $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ ，且 $A \cap U$ 与 $A \cap V$ 是 A 中的开集（因为 U, V 在 $\text{cl}(A)$ 中开，限制到 A 仍开）。由于 A 连通，必有其中之一为空，比如 $A \cap V = \emptyset$ 。则 $A \subseteq U$ 。但 V 非空且 $V \subseteq \text{cl}(A)$ ，故存在点 $x \in V$ ，且 x 是 A 的聚点（因为 $x \in \text{cl}(A)$ ）。于是 x 的任意邻域与 A 相交。取 x 在 $\text{cl}(A)$ 中的开邻域 V （本身），则 $V \cap A \neq \emptyset$ ，这与 $A \cap V = \emptyset$ 矛盾。因此 $\text{cl}(A)$ 连通。□

命题 2.5 (乘积连通). 若 X 和 Y 连通，则 $X \times Y$ 连通。

证明思路：常用“十字架”方法：固定 $x_0 \in X$ ，对每个 $y \in Y$ ， $\{x_0\} \times Y$ 连通；对每个 $x \in X$ ， $X \times \{y\}$ 连通。通过连续的道路连接任意两点，或用开闭集论证。

证明。设 X, Y 连通。先证对任意 $x \in X$ ， $\{x\} \times Y$ 连通（同胚于 Y ）。再证对任意 $y \in Y$ ， $X \times \{y\}$ 连通。现在取任意两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ 。考虑点 (x_1, y_2) 。由于 $\{x_1\} \times Y$ 连通，存在连通子集 C_1 包含 (x_1, y_1) 和 (x_1, y_2) 。由于 $X \times \{y_2\}$ 连通，存在连通子集 C_2 包含 (x_1, y_2) 和 (x_2, y_2) 。那么 $C_1 \cup C_2$ 连通（因为相交于 (x_1, y_2) ），且包含两点。因此任意两点属于同一个连通子集，故整个空间连通。□

注：这个证明实际上依赖于“并集若交集非空则连通”的性质，以及连通性在乘积中的保持。更严格的论证也可用开闭集法。

2.3 连通分支与道路连通

定义 2.2 (连通分支). 在拓扑空间 X 中定义关系： $x \sim y$ 若存在连通子集同时包含 x 和 y 。这是一个等价关系，每个等价类称为 X 的一个连通分支。

连通分支是极大的连通子集，且是闭的（因为闭包仍连通）。 X 是其所有连通分支的不交并。

定义 2.3 (道路连通). 空间 X 称为道路连通的，若对任意 $x, y \in X$ ，存在连续映射 $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ 使得 $\gamma(0) = x$ ， $\gamma(1) = y$ （这样的 γ 称为道路）。

道路连通性比连通性强：道路连通空间一定是连通的，但反之不一定。经典的例子是“拓扑学家的正弦曲线”：

$$S = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\},$$

它是连通的但不是道路连通的（因为无法用连续道路从曲线部分连接到竖直线部分）。

直观：道路连通意味着空间里任意两点能用一条“连续的线”连起来，而连通性只保证不能分成两个开集，但可能仍然“拧”在一起而无法画出一条连续路径。

2.4 拓展：连通性在分析中的应用

连通性在数学分析中最重要的应用之一是 ** 介值定理 **：设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续，则 $f([a, b])$ 是区间。因为 $[a, b]$ 连通，连续像连通，而 $\mathbb{R}$ 中的连通子集正是区间。这是证明介值定理的拓扑版本。

3 总结与延伸

- 紧致性是有限覆盖性质的抽象，在 $\mathbb{R}^n$ 中等价于有界闭集。它保证了连续函数的最值性、点列的聚点存在性，并且与分离性结合可得到正则和正规性。
- 连通性刻画了空间的整体性，与连续映射配合可以得到介值定理等分析结果。
- 两种性质都是拓扑不变量（即同胚空间保持），因此可用于区分不同胚的空间。
- 进一步的学习方向：
 - 紧致性的变体：可数紧、列紧、伪紧等。
 - 连通性的加强：局部连通、弧连通、单连通、 n -连通等。
 - 在代数拓扑中，紧致性和连通性是构造同伦群、同调群的基础。
 - 在微分几何中，紧致流形具有许多整体性质，如闭流形上的调和形式理论。

A 习题与思考

1. 证明：若 X 紧致， Y 是 T_2 空间，且 $f : X \rightarrow Y$ 是连续双射，则 f 是同胚。
2. 举例说明：紧致空间的连续像不一定紧致？为什么？
3. 证明：紧致度量空间是完备的。
4. 证明：若 X 连通且 $A \subseteq X$ 既开又闭，则 $A = \emptyset$ 或 $A = X$ 。
5. 证明：若 X 连通且 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ 连续，则 $f(X)$ 是区间。
6. 构造一个连通但不是道路连通的空间，并说明理由。