

第1章 点集拓扑

1.1 度量空间与连续映射

度量空间的一般性理论, 在“数学分析”中有系统介绍. 本节针对后续课程的需要, 做一个概要回顾. 主要内容有:

- 1.1.度量空间及实例.
- 1.2.度量空间中的开集(与闭集);
- 1.3.度量空间之间的连续映射.

1.1.1 度量空间

用 $\mathbb{R}$ 表示全体实数的集合. 在实数的加法和乘法下, 它是一个数域. 一个集合之间的对应 $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$, 也称为集合 Y 上的一个函数.

定义: 已知集合 X , 以及乘积集合上的一个函数

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, ((x, y) \rightarrow d(x, y) \in \mathbb{R}).$$

如果对于所有 $x, y, z \in X$, 函数 d 具有下述性质:

- 1) **正定性:** $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- 2) **对称性:** $d(x, y) = d(y, x)$;
- 3) **三角不等式:** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

则 d 称为集合 X 上的一个**度量(或距离)函数**, 并称 (X, d) 是一个**度量空间**.□

推论1. (度量函数的正定性) 对于度量空间 (X, d) 中的任意两点 $x, y \in X$, 均有

$$d(x, y) \geq 0,$$

其中等式成立的充要条件是 $x = y$.

证明 在度量函数的条件 3) 中取 $x = z$, 则由条件 1) 得

$$0 \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

据此 $d(x, y) \geq 0$. □.

度量空间是几何学所关心的一类基本对象. 它有许多表现形式.

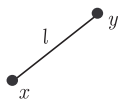
例1. 欧氏空间: 考虑 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$. 在集合 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上规定对应 $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 如下:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2},$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. 则 d 是集合 $\mathbb{R}^n$ 上的一个度量函数, 所得度量空间 $(\mathbb{R}^n, d)$ 称为 n 维欧氏空间.

1 维欧氏空间 $\mathbb{R}^1$ 也称为实直线; 2 维欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 也称为实平面.

证明: 对于 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 令 l 为 x, y 两点间的线段.



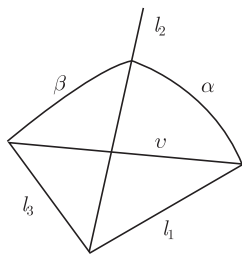
则 $d(x, y) = l$ 的长度. $\square$

例2. 实射影平面: 令 $\mathbb{R}P^2$ 为 3 维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中全体过原点的直线的集合. 定义集合间的对应 $d: \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 如下:

$$d(l_1, l_2) = \min\{\alpha, \pi - \alpha\}$$

其中 α 是 l_1 和 l_2 的两个夹角之一. 则 d 是集合 $\mathbb{R}P^2$ 上的一个度量函数, 度量空间 $(\mathbb{R}P^2, d)$ 称实射影平面.

证明: 对应 d 显然满足度量函数的性质 1) 和 2). 对于任意三条直线 $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}P^2$, 考虑它们与 3 维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中以原点为心的单位球面的交点所决定的球面三角形:



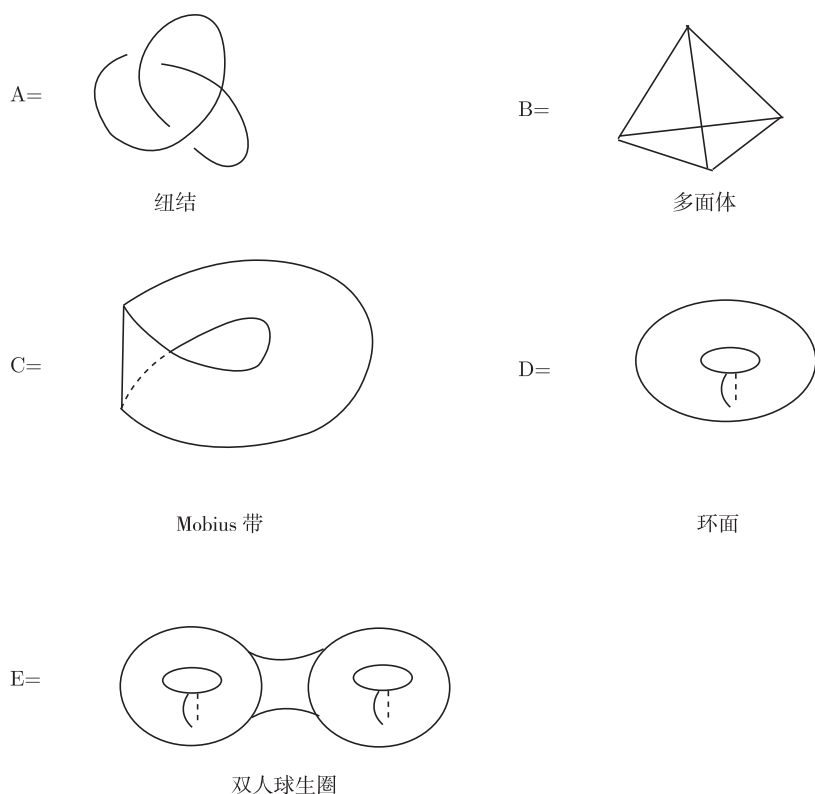
它的三条弧段长度满足不等式 $\alpha \leq \beta + \gamma$. $\square$

推论2. (度量空间的子空间.) 已知度量空间 (X, d) 以及一个子集合 $A \subset X$. 考虑复合映射

$$d_A: A \times A \rightarrow X \times X \xrightarrow{d} \mathbb{R}.$$

则 d_A 是集合 A 上的一个度量函数. 所得度量空间 (A, d_A) 称为原空间 (X, d) 的一个子空间. $\square$

例3. 考虑欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中下列图形所规定的子集合:



根据推论2, 欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 上的度量诱导了度量空间 $(A, d_A), (B, d_B), (C, d_C), \dots$. $\square$

例4. 切比雪夫空间: 对于一对实数 $a < b$, 令 $C[a, b]$ 为闭区间 $[a, b]$ 上全体连续函数所构成的集合。例如, 集合 $C[a, b]$ 包括了正弦和余弦函数

$$f(x) = \sin x, \cos x \in C[a, b].$$

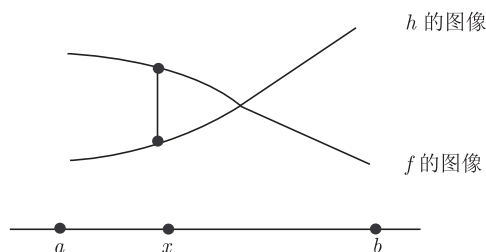
也包括对数函数, 指数函数, 多项式函数

$$f(x) = \ln(x), e^x, a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in C[a, b],$$

等等, 其中 $x \in [a, b]$.

定义集合间的对应 $d: C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 如下:

$$d(f, h) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - h(x)|.$$



则 d 是集合 $C[a, b]$ 上的一个度量函数, 所得度量空间 $(C[a, b], d)$ 称为切比雪夫空间.

证明: 对应 d 的正定性和对称性显然. 三角不等式可由下式获得: 对于 $f, g, h \in C[a, b]$, 有

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq d(f, h) + d(h, g). \quad \square$$

1.1.2 度量空间中的开子集

在上面的讨论中我们注意到, 度量空间有多种具体表现形式. 一个自然的考虑是, 精益求精的找出所有度量空间“最为本质的要素”, 从而可为所有度量空间的研究, 建立统一语言.

定义: 已知度量空间 (X, d) . 对于一点 $a \in X$ 以及一个实数 $\delta > 0$, 子集合

$$B(a, \delta) := \{x \in X, d(x, a) < \delta\}$$

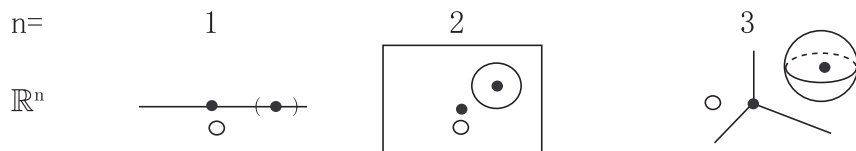
称为度量空间 X 中, 以点 $a \in X$ 为中心, 半径为 δ 的**开球体**. 也称为 a 点在 X 中的 δ -球体领域.

度量空间 (X, d) 的一个子集 $U \subset X$ 称为 X 的**开子集**, 如果对于任意一点 $a \in U$, 存在一个实数 $\delta > 0$, 使得

$$B(a, \delta) \subset U.$$

空间 X 中所有开子集所构成的集合, 记为 $\tau_X := \{U \subset X, U \text{ 是开子集}\}.$

例6. 在欧氏空间 $(\mathbb{R}^n, d)$ 中, $B(a, \delta)$ 是通常意义下“欧式空间中以 a 为中心的球体”:



下设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是一个子集合, 并考察度量空间 (A, d_A) . 对于一点 $a \in A$ 以及一个实数 $\delta > 0$, 我们有

$$B_A(a, \delta) = B(a, \delta) \cap A. \quad \square$$

定理1.1(度量空间中开集的性质): 度量空间 (X, d) 中所有开子集所构集合 τ_X 具有下述性质:

1) $X, \phi \in \tau_X$;

2) 对于 τ_X 的一个有限子集 $\{U_i \in \tau_X, 1 \leq i \leq n\}$, 有 $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \tau_X$;

3) 对于 τ_X 的任意一族子集 $\{U_\lambda \in \tau_X, \lambda \in \Lambda\}$, 有 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau_X$.

证明: 性质 1), 3) 显然. 性质 2) 的证明如下: 对于 $a \in U_1 \cap \cdots \cap U_n$, 存在 $\delta_i > 0$, 使得 $B(a, \delta_i) \subset U_i$. 令 $\varepsilon = \min\{\delta_i | 1 \leq i \leq n\}$, 则有

$$B(a, \varepsilon) \subset U_i, 1 \leq i \leq n \Rightarrow B(a, \varepsilon) \subset U_1 \cap \cdots \cap U_n. \square$$

1.1.3 度量空间之间的连续映射

函数的连续性是分析学里的一个基本的概念. 其中, 诸位最为熟知是所谓“ ε - δ 语言”. 我们回顾一下.

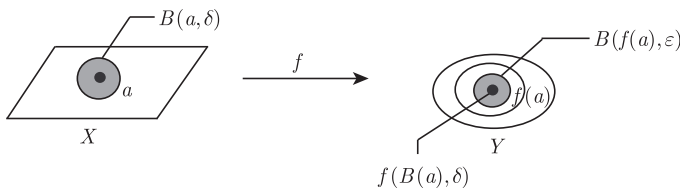
定义: 一个集合间的对应 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 称为**连续函数**, 如果对于任意一点 $a \in \mathbb{R}$ 以及实数 $\varepsilon > 0$, 存在一个实数 $\delta > 0$, 使得

$$\text{每当 } |x - a| < \delta, \text{ 就有 } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

上述连续函数的概念可以毫无障碍地推广到度量空间之间的连续映射.

定义 (连续映射的 ε - δ 语言): 已知度量空间 (X, d) 与 (Y, d') . 一个集合间的对应 $f: X \rightarrow Y$ 称为从 X 到 Y 的**连续映射**, 如果对于任意一点 $a \in X$ 以及实数 $\varepsilon > 0$, 存在一个实数 $\delta > 0$, 满足:

$$f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$$



值得强调的是, 利用度量空间中开集的概念, 映射的连续性有一个更为简洁、实用的刻画. 设 τ_X, τ_Y 分别是度量空间 $(X, d), (Y, d')$ 中全体开子集所组成的集合.

定理1.2. 对于度量空间之间的一个对应 $f: X \rightarrow Y$, 下述条件等价:

- i) f 是连续映射;
- ii) 对于 Y 中的每个开集 $U \in \tau_Y$, 都有 $f^{-1}(U) \in \tau_X$.

证明: $i) \implies ii)$: 设 $U \in \tau_Y$ 且 $a \in f^{-1}(U)$, 我们有 $f(a) \in U \in \tau_Y$. 由于 U 是开集, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(f(a), \varepsilon) \in U$. 由于 f 连续, 存在 $\delta > 0$, 使得 $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon) \subset U$. 据此, $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$, 从而 $f^{-1}(U) \in \tau_X$ 得证.

$ii) \implies i)$: 对于任意一点 $a \in X$ 以及 $\varepsilon > 0$, 我们有 $a \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. 由于 $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ 是 X 中的开子集, 存在实数 $\delta > 0$, 满足

$$B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)).$$

它表明 $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$. 根据定义, f 是一个连续映射. $\square$

1.1.4 度量空间的闭子集

定义: 度量空间 (X, d) 的一个子集 $A \subset X$ 称为 X 的一个闭子空间(或闭集), 如果它的补空间是 X 中的开集 $X - A \in \tau_X$. $\square$

习题1. 在 1 维欧氏空间 $\mathbb{R}^1$ 中, 对于 $a < b$, 我们有 $(a, b) \in \tau_{\mathbb{R}^1}$, $[a, b), (a, b], [a, b] \notin \tau_{\mathbb{R}^1}$. $\square$

习题2. 设 $\mathbb{Q}, \mathbb{W} \subset \mathbb{R}$ 分别为全体有理数和无理数所构成的集合. 证明 $\mathbb{Q}, \mathbb{W} \notin \tau_{\mathbb{R}^1}$. $\square$

习题3. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个非常值的连续映射. 则有无交并分解

$$\mathbb{R}^n = A^- \sqcup A^0 \sqcup A^+,$$

其中

$$A^- = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) < 0\}; A^0 = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}; A^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > 0\}.$$

证明 $A^-, A^+ \in \tau_{\mathbb{R}^n}$, $A^0 \notin \tau_{\mathbb{R}^n}$. $\square$

习题4. 已知度量空间 (X, d) . 证明

- 1) X 中的空集 ϕ 是 X 的闭子空间.
- 2) 如果 $A_1, \dots, A_n$ 是 X 中的有限个闭子空间, 则它们的并集 $A_1 \cup \dots \cup A_n$ 也是 X 的闭子空间.
- 3) 如果 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$, 是 X 中的一簇闭子空间, 则它们的交集 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 也是 X 的闭子空间. $\square$

习题5. 设 A 是度量空间 (X, d) 的一个闭子空间, $x \in X$ 是一个点. 定义

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \in \mathbb{R} | a \in A\}.$$

证明

1) $x \rightarrow d(x, A)$ 是 X 上的连续函数 (称为到子集合 A 的距离函数);

2) $d(x, A) = 0$ 的充分必要条件是 $x \in A$. □

习题6. 已知度量空间 (X, d) , (Y, d') 以及集合间的映射 $f: X \rightarrow Y$. 证明 f 是连续映射的充要条件是, 对于 Y 中的任意一个闭集 $B \subset Y$, $f^{-1}(B)$ 是 X 中的闭集. □

1.2 拓扑空间与连续映射

本节的主要内容有

- 2.1 拓扑空间.
- 2.2 拓扑空间的子空间.
- 2.3 拓扑空间之间的连续映射.
- 2.4 拓扑基、乘积空间.

1.2.1 拓扑空间

设 X 是一个集合. 它的全体子集所构成集合称为 X 的**幂集**, 记为

$$2^X := \{A, A \subseteq X\},$$

显然有 $\phi, X \in 2^X$, 其中 ϕ 表示 X 中的“空子集”. 幂集 2^X 的一个子集合 $\tau \subset 2^X$, 也称为 X 的**一簇子集**.

定义: 已知集合 X 以及它的一簇子集合 $\tau \subset 2^X$. 如果 τ 具有下述性质

- 1) $\phi, X \in \tau$;
- 2) τ 中有限个成员的交集属于 τ : $U_1, \dots, U_n \in \tau \implies U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$;
- 3) τ 中任意多个成员的并集属于 τ : $U_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda \implies \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau$

则称 τ 是集合 X 上的一个**拓扑**.

配备了一个拓扑 τ 的集合 X 称为一个**拓扑空间**, 记为 (X, τ) . 集合 τ 中的成员称为拓扑空间 (X, τ) 中的**开集**. □

例1. 设 (X, d) 是一个度量空间. 令 $\tau \subset 2^X$ 是 X 中由度量函数 d 所规定的全体开集的集合. 根据定理1.1, τ 是 X 上的一个拓扑. (X, τ) 称为由**度量空间** (X, d) 所决定的**拓扑空间**. □

例2. 同一个集合 X , 可以有不同的方式, 成为拓扑空间. 例如, 我们取

- 1) $\tau_1 = 2^X$;
- 2) $\tau_2 = \{\phi, X\} \subset 2^X$;
- 3) $\tau_3 = \{\phi, X - B \subset X \mid B \subseteq X \text{ 是有限集}\}$;

容易验证, 上面规定的 τ_i 均是集合 X 上的拓扑, 它们依次称为:

- 1) 集合 X 上**离散拓扑**;
- 2) 集合 X 上**平凡拓扑**;
- 3) 集合 X 上**余有限拓扑**.

证明: 只有结论 3) 需要证明. 我们有

$$U \subset X \text{ 余有限} \iff U = X - B, |B| < \infty.$$

下设 $U_i \subset X$ 余有限: $U_i = X - B_i, |B_i| < \infty$. 则由 De Morgan 公式知:

$$\begin{aligned} \text{a) } U_1 \cap \cdots \cap U_n &= X - \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i \right), \quad \left| \bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i \right| < \infty. \\ \text{b) } \bigcap_{i \in \Lambda} U_\lambda &= X - \left(\bigcup_{i \in \Lambda} B_i \right), \quad \left| \bigcup_{i \in \Lambda} B_i \right| < \infty. \end{aligned}$$

1.2.2 拓扑空间的子空间

一般拓扑学的基本考虑是, 从拓扑空间 (X, τ) 的开集出发, 来研究 X 的整体几何性质. 一个自然的问题是, 与度量空间相比较, 拓扑空间的条件弱了许多. 那么, 对于一个拓扑空间而言, 是否存在有意义的几何学? 整个《拓扑学》课程的核心任务是展示, 在拓扑空间中存在丰富的几何学.

命题1. 已知拓扑空间 (X, τ) , 以及它的一个子集合 $A \subset X$. 令

$$\tau_A = \{A \cap U \subset A \mid U \in \tau\} \subseteq 2^A.$$

则 τ_A 是集合 A 上的一个拓扑. 所得拓扑空间 (A, τ_A) 称为原空间 (X, τ) 的一个子空间. $\square$

围绕子空间的概念, 我们将度量空间所具有的一些基本概念, 推广至拓扑空间.

A. 拓扑空间中的开子空间与闭子空间

定义: 已知拓扑空间 (X, τ) , 以及一个子集合 $A \subset X$.

如果 $A \in \tau$, 则称 A 是 X 的一个开子空间;

如果 $B = X - A$, 其中 $A \in \tau$, 则称 B 是 X 的一个闭子空间. $\square$

命题2. 拓扑空间 (X, τ) 中的闭子空间具有以下性质:

- 1) X 与 ϕ 都是闭子空间;
- 2) 任意多个闭子空间的交集是闭子空间;
- 3) 有限多个闭子空间的并集是闭子空间.

证明. 注意到 $X, \phi \in \tau$, 结论 1) 可由下式得证:

$$\phi = X - X, \quad X = X - \phi.$$

性质 2) 和 3) 可由 De Morgan 公式直接验证, 其中 $U_\lambda \in \tau$:

$$\bigcup_\lambda (X - U_\lambda) = X - \left(\bigcap_\lambda U_\lambda \right).$$

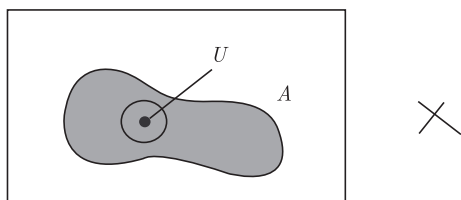
$$\bigcap_\lambda (X - U_\lambda) = X - \left(\bigcup_\lambda U_\lambda \right). \quad \square$$

B. 子空间内点、内部和邻域

定义: 已知拓扑空间 (X, τ) 以及它的一个子空间 $A \subset X$.

1) 点 $x \in A$ 称为子空间 A 的一个内点, 如果存在一个开集 $U \in \tau$, 使得 $x \in U \subseteq A$.

2) 子空间 A 的全体内点所构成的集合, 称为 A 的内部, 记为 $\overset{\circ}{A}$.



命题3. 已知拓扑空间 (X, τ) , 以及它的子空间 $A, B \subseteq X$.

1) $A = \overset{\circ}{A}$ 的充要条件是 $A \in \tau$;

2) $\overset{\circ}{A}$ 是 A 所包含的最大开集;

3) $A \subseteq B \implies \overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$

4) $(A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$

5) $(A \cup B)^\circ \supseteq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

证明. 1) 设 $A = \overset{\circ}{A}$. 则对于任意一点 $x \in A$, 存在 $x \in U_x \in \tau$, 使得 $x \in U_x \subset A$. 于是

$$A = \bigcup_{x \in A} U_x \in \tau.$$

反之, 设 $A \in \tau$, 则对于所有 $x \in A$, 有 $x \in A \in \tau$. 它表明 $x \in \overset{\circ}{A}$, 即 $A = \overset{\circ}{A}$.

2) 设有 $\overset{\circ}{A} \subseteq U \subseteq A$ 且 $U \in \tau$. 只需要证明 $U \subseteq \overset{\circ}{A}$. 对于所有 $x \in U$, 有 $x \in U \subseteq A$, 并且 $U \in \tau$. 它表明 $x \in \overset{\circ}{A}$.

3) 对于 $x \in \overset{\circ}{A}$, 存在 $U_x \in \tau$, 使得 $x \in U_x \subseteq A (\subseteq B)$, 它表明 $x \in \overset{\circ}{B}$. 从而有 $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$.

4) 由于 $A \cap B \subset A, B$, 从关系式 3) 知 $(A \cap B)^\circ \subseteq \overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}$. 从而

$$(A \cap B)^\circ \subseteq \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

反之, 由于 $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subseteq A \cap B$ 且 $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ 是开集, 由关系式 2) 知

$$\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subseteq (A \cap B)^\circ.$$

总之, 性质 4) 得证.

5) 由于 $A, B \subset A \cup B$, 由性质 3) 知

$$\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B} \subseteq (A \cup B)^\circ.$$

据此得 $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq (A \cup B)^\circ$. $\square$

例3. 在命题 3 的关系式 5) 中, 等式一般不成立。

考虑 $X = \mathbb{R}$, $A = X - \{0\}$, $B = \{0\}$. 则有 $(A \cup B)^\circ = X$.

另一方面, $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = A$. $\square$

C. 子空间 $A \subset X$ 的聚点与闭包

定义: 已知拓扑空间 (X, τ) , 以及它的一个子空间 $A \subset X$.

1) 点 $x \in X$ 称为子空间 A 的一个**聚点**, 如果 x 的每个开邻域中均有 $A - \{x\}$ 中的点.

2) 子空间 A 的全体聚点的集合称为 A 的**导集**, 记为 A' .

3) 子空间 A 的**闭包**是 $\bar{A} := A' \cup A \subset X$.

例4. 下面的例子说明

a) 拓朴空间的子空间 A 的聚点的概念, 和分析中聚点的概念相吻合.

b) 子空间 A 的聚点可以属于 A , 也可以不属于 A .

下设 $X = \mathbb{R}$. 作为一个度量空间, 它自然也是一个拓扑空间.

1) 如果 $A = \{\frac{1}{n} \in \mathbb{R}, n \geq 1\}$. 则 $A' = \{0\}$;

2) 如果 $A = [0, 1)$, 则 $A' = [0, 1]$;

3) 如果 $A = \mathbb{Z}$, 则 $A' = \emptyset$;

4) 如果 $A = \mathbb{Q}$, 则 $A' = \mathbb{R}$.

命题4. (闭包和内部的关系) 对于拓扑空间 X 的一个子空间 $A \subset X$, 有

$$X - \bar{A} = (X - A)^\circ.$$

尤其是, 闭包 $\bar{A}$ 是 X 的闭子空间.

证明. $x \in X - \bar{A}$ 等价于 $x \notin A$; $x \notin A'$. 后者等价于, 存在 x 的开邻域 $U_x \in \tau$, 使得 $U_x \subset X - A$. 既 $x \in (X - A)^\circ$. $\square$

利用命题 4 和 De Morgan 公式, 可将命题 3 中有关子空间内部的性质, 直接翻译为子空间闭包的性质:

命题5. (子空间 $A \subset X$ 的闭包的性质) 已知拓扑空间 (X, τ) 的一个子空间 $A \subset X$.

1) $A = \bar{A} \iff A$ 是 X 的闭子空间;

2) $\bar{A}$ 是 X 中包含 A 的最小闭集;

3) 如果 $A \subseteq B$, 则 $\bar{A} \subseteq \bar{B}$;

4) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

$$5) \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}. \quad \square$$

一个从属于闭包的常见概念是

定义: 已知拓扑空间 (X, τ) 以及它的子空间 $A \subset X$ 。如果 $\bar{A} = X$, 则称 A 是空间 X 的稠密子空间. $\square$

D. 拓扑空间中点列的极限

定义: 已知拓扑空间 (X, τ) 中一个点列

$$\{x_n \in X, n = 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

点 $a \in X$ 称为该点列的一个极限, 如果对于每个包含 a 的开集 $U \in \tau$, 存在一个正整数 $N > 0$, 使得 $\{x_{N+i}, i = 1, 2, 3, \dots\} \subset U$. $\square$

例: 对于全体实数的集合 $\mathbb{R}$, 令

$\tau_1 = \mathbb{R}$ 中由欧氏度量所规定的拓扑;

$\tau_2 = \mathbb{R}$ 中的平凡拓扑 $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

设 $\{x_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个点列. 则有

1) 在拓扑空间 $(\mathbb{R}, \tau_1)$ 中, 如果点列 $\{x_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 的极限存在, 则必唯一.

2) 在拓扑空间 $(\mathbb{R}, \tau_2)$ 中, 任意一点 $b \in \mathbb{R}$ 都是该点列的极限. $\square$

习题1. 设 $\mathbb{Q}^n$ 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中坐标为有理数的点的集合. 证明 $\mathbb{Q}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的稠密子空间. $\square$

习题2. 已知拓扑空间 (X, τ) 的一个子空间 $A \subseteq X$. 它的边界是

$$\partial A := \bar{A} - \overset{\circ}{A}.$$

证明:

$$(1) \partial A = \bar{A} \cap \overline{(X - A)}$$

$$(2) \partial A = \emptyset \iff A \text{ 即开且闭.}$$

1.2.3 拓扑空间之间的连续映射

定义: 已知两个拓扑空间 $(X, \tau), (Y, \tau')$, 以及一个集合间对应 $f: X \rightarrow Y$.

如果对于空间 Y 的任一开集 $U \in \tau'$, 原像 $f^{-1}(U)$ 是空间 X 中的开集, 则称 f 是拓扑空间之间的连续映射, 记作

$$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau'). \square$$

对于两个度量空间 (X, d) 及 (Y, d') , 令

$$\begin{aligned}\tau_X &= X \text{ 中开集的集合} \\ \tau_Y &= Y \text{ 中开集的集合}\end{aligned}$$

下面的结论表明, 对于度量空间之间的映射而言, 两种连续性定义等价.

推论1: 对于一个集合间对应 $f: X \rightarrow Y$, 下述结论等价

- i) f 是度量空间之间的连续映射 $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$;
- ii) f 是拓扑空间之间的连续映射 $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$

证明 见 § 1, 定理1.2. □

推论2. 一个集合间对应 $f: X \rightarrow Y$ 是拓扑空间之间的连续映射的充要条件是, 对于 Y 的任一闭子空间 $B \subseteq Y$, 原像 $f^{-1}(B)$ 是 X 的闭子空间.

证明. 对于任一子空间 $B \subset Y$, 可得空间 Y 的一个“无交并分解”:

$$Y = B \sqcup (Y - B).$$

从而对于集合之间的一个对应 $f: X \rightarrow Y$, 有无交并分解

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(B) \sqcup f^{-1}(Y - B).$$

下设 f 连续. 则有

$$B \text{ 闭} \iff Y - B \text{ 开} \iff f^{-1}(Y - B) \text{ 开} \iff f^{-1}(B) \text{ 闭} \quad \square$$

例: 常见连续映射

1) 对于拓扑空间 (X, τ) , 它到自己的恒同映射 $id: X \rightarrow X, x \rightarrow x$, 是一个连续映射.

证明. 对于任意开集 $U \in \tau_X$, 我们有 $1_X^{-1}(U) = U \in \tau_X$. □

2) 已知拓扑空间 $(X, \tau), (Y, \tau')$ 以及一点 $y_0 \in Y$. 常值映射 $f: X \rightarrow Y, f(X) = y_0 \in Y$, 是一个连续映射.

证明: 对于任意开集 $U \in \tau'$, 我们有

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} \phi, & \text{若 } y_0 \notin U \\ X, & \text{若 } y_0 \in U. \end{cases}$$

总之 $f^{-1}(U) \in \tau$. □

3) 已知拓扑空间之间的两个连续映射

$$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau'), \quad g: (Y, \tau') \rightarrow (Z, \bar{\tau}).$$

则它们的复合映射

$$g \circ f : X \rightarrow Y \rightarrow Z$$

是一个连续映射.

证明. 对于空间 Z 的任意开集 $U \in \bar{\tau}$, 有 $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau$. $\square$

4) 已知拓扑空间 (X, τ) 以及它的一个子空间 $A \subset X$, 则**含入映射**

$$i_A : A \rightarrow X, \quad i_A(a) = a, \quad a \in A$$

是一个连续映射.

进一步, 如果 $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ 是一个连续映射. 则复合映射

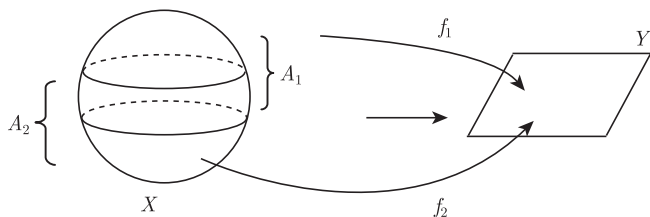
$$f \circ i_A : A \rightarrow X \rightarrow Y$$

也是连续映射, 称为 f 在子空间 A 上的**限制映射**, 记为 $f|_A$. $\square$

推论3. (焊接引理) 设 $X = A_1 \cup A_2$, 并且 A_i 是闭子空间. 如果 $f_i : A_i \rightarrow Y, i = 1, 2$, 是一对连续映射, 满足

$$f_1|_{A_1 \cap A_2} = f_2|_{A_1 \cap A_2},$$

则存在唯一一个连续映射 $f : X \rightarrow Y$, 满足 $f|_{A_i} = f_i, i = 1, 2$.



证明. 利用已知连续映射 $f_i : A_i \rightarrow Y, i = 1, 2$, 定义集合间的对应 $f : X \rightarrow Y$ 如下

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{若 } x \in A_1; \\ f_2(x), & \text{若 } x \in A_2. \end{cases}$$

由于 $f_1|_{A_1 \cap A_2} = f_2|_{A_1 \cap A_2}$, 映射 f 的定义合理.

下设 $B \subset Y$ 是一个闭子空间, 则有

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= f^{-1}(B) \cap X = f^{-1}(B) \cap (A_1 \cup A_2) \\ &= (f^{-1}(B) \cap A_1) \cup (f^{-1}(B) \cap A_2) \\ &= f_1^{-1}(B) \cup f_2^{-1}(B) \end{aligned}$$

后者显然是 X 的闭子空间. 根据推论2, f 连续. $\square$

习题1. 考虑 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的下述两个拓扑:

- 1) τ_1 : 由距离函数 $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 所规定的拓扑;
- 2) τ_2 : $\mathbb{R}^n$ 上的余有限拓扑.

证明集合之间的恒同映射 $id: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

- 1) 是一个连续映射 $:(\mathbb{R}^n, \tau_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \tau_2)$;
- 2) 不是一个连续映射 $:(\mathbb{R}^n, \tau_2) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \tau_1)$.

□

习题2. 举例说明, 焊接引理中 $A_1, A_2 \subset X$ 是闭子空间的条件不可去。□

1.2.4 拓扑基与乘积空间

已知两个拓扑空间 (X, τ) 和 (Y, τ') . 考查集合 X 与 Y 的笛卡尔积

$$X \times Y := \{(x, y), x \in X, y \in Y\},$$

以及它到第一、第二个因子的两个自然投影:

$$\begin{aligned} p_1: X \times Y &\rightarrow X, & p_2: X \times Y &\rightarrow Y \\ p_1(x, y) &= x; & p_2(x, y) &= y. \end{aligned}$$

我们希望在集合 $X \times Y$ 上引入一个拓扑, 使得

- 1) $X \times Y$ 成为一个拓扑空间;
- 2) p_1, p_2 是拓扑空间之间的连续映射.

观察: 令 $\tau \times \tau' = \{U \times V \subseteq X \times Y, U \in \tau, V \in \tau'\}$. 则有

- 1) $\tau \times \tau' \subset 2^{X \times Y}$;
- 2) $\phi, X \times Y \in \tau \times \tau'$;
- 3) 如果 $U \times V, U_1 \times V_1 \in \tau \times \tau'$, 则有

$$U \times V \cap U_1 \times V_1 = (U \cap U_1) \times (V \cap V_1) \in \tau \times \tau'.$$

- 4) 然而, 一般说来, 对于 $U \times V, U_1 \times V_1 \in \tau \times \tau'$,

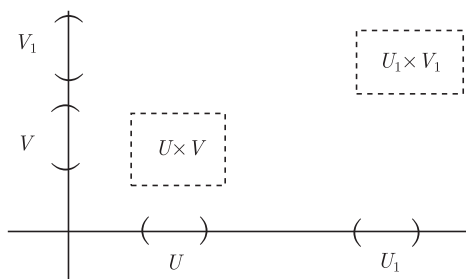
$$(U \times V) \cup (U_1 \times V_1) \notin \tau \times \tau'.$$

既子集簇 $\tau \times \tau' \subset 2^{X \times Y}$ 不满足“开集公理”中的第3条, 因此不是集合 $X \times Y$ 上的一个拓扑!

例. 对于 $X = Y = \mathbb{R}$, 有 $X \times Y = \mathbb{R}^2$. 取

$$U = V = (1, 2); \quad U_1 = V_1 = (3, 4)$$

则 $U \times V \cup U_1 \times V_1 = (1, 2) \times (1, 2) \cup (3, 4) \times (3, 4) \notin \tau \times \tau'$.



定义: 已知拓扑空间 (X, τ) 以及一个子集 $\beta \subset \tau$. 如果对于 X 中任意一点 $x \in X$ 以及它的任意一个开邻域 $x \in U \in \tau$, 存在 $V \in \beta$, 使得

$$x \in V \subseteq U,$$

则称 β 是拓扑空间 (X, τ) 的一个**拓扑基**.

例. 设 (X, d) 是一个度量空间, τ 是由度量 d 所决定的 X 上的拓扑. 考虑 X 中所有球状邻域的集合

$$\beta = \{B(x, \varepsilon) \subseteq X, x \in X, \varepsilon > 0\}.$$

则有

- 1) $\beta \subset \tau$;
- 2) β 是拓扑空间 (X, τ) 的一个拓扑基.

定理2.1. 设 X 是一个集合, $\beta \subseteq 2^X$. 如果 β 中的成员具有如下性质

- 1) $X = \bigcup_{U \in \beta} U$;
- 2) 对于任意 $U_1, U_2 \in \beta$, 都有 $U_1 \cap U_2 \in \beta$.

则在集合 X 上存在唯一一个最小拓扑 τ , 以 β 为拓扑基.

证明. 称 X 的一个子集 $U \subset X$ 为“开集”, 如果对于每一点 $x \in U$, 存在 $V \in \beta$, 使得

$$x \in V \subseteq U.$$

令 $\tau = \{\emptyset, U \subseteq X, U \text{ 是开集}\}$. 则 τ 是 X 上的一个拓扑, 它以 β 为拓扑基. $\square$

定义1. 定理证明中所构造的集合 X 上的拓扑 τ , 称为 X 上由拓扑基 β 所生成的最小拓扑.

定义2. 对于拓扑空间 (X, τ) 和 (Y, τ') , 笛卡尔积 $X \times Y$ 的子集簇

$$\beta = \tau \times \tau' \subseteq 2^{X \times Y}$$

满足定理2.1 中的性质 1) 和 2). 它所生成的集合 $X \times Y$ 上的最小拓扑, 称为乘积拓扑, 记为 $\tau_{X \times Y}$. 所得拓扑空间

$$(X \times Y, \tau_{X \times Y})$$

称为拓扑空间 (X, τ) 和 (Y, τ') 的乘积空间.

推论1. 在乘积拓扑 $\tau_{X \times Y}$ 下, 投影映射

$$p_1 : X \times Y \rightarrow X, \quad p_2 : X \times Y \rightarrow Y$$

是拓扑空间的连续映射.

证明. 对于 $U \in \tau_X$, 有 $p_1^{-1}(U) = U \times Y \in \tau_{X \times Y}$, 从而 p_1 连续. 同理 p_2 连续.

推论2. 已知三个拓扑空间 (X, τ_X) , (Y, τ_Y) , (Z, τ_Z) 以及集合间的对应

$$f : Z \rightarrow X \times Y,$$

则 f 是连续映射的充要条件是, 复合映射

$$p_1 \circ f : Z \rightarrow X; \quad p_2 \circ f : Z \rightarrow Y$$

连续.

证明. 如果 f 连续, 则由推论1 知, 复合映射 $p_1 \circ f$ 和 $p_2 \circ f$ 连续.

反之, 设 $p_1 \circ f$ 和 $p_2 \circ f$ 是连续映射. 对于 $X \times Y$ 中一个形如 $U \times V$ 的开集, $U \in \tau_X, V \in \tau_Y$, 我们有集合间的等式:

$$f^{-1}(U \times V) = (p_1 \circ f)^{-1}U \cap (p_2 \circ f)^{-1}V.$$

由 $p_1 \circ f$ 和 $p_2 \circ f$ 的连续性知, $(p_1 \circ f)^{-1}(U), (p_2 \circ f)^{-1}(V) \in \tau_Z$. 因此

$$f^{-1}(U \times V) \in \tau_Z.$$

另一方面, 对于 $X \times Y$ 任一开集 W , 根据乘积拓扑的定义

$$W = \cup_{(x,y) \in W} U_x \times V_y, \quad U_x \in \tau_X, V_y \in \tau_Y,$$

从而得 $f^{-1}(W) = \cup_{(x,y) \in W} f^{-1}(U_x \times V_y) \in \tau_Z$. $\square$

1.3 拓扑空间的分离性

在上节的讨论中我们注意到, 在一个集合 X 中可以引入不同的拓扑 τ , 使之成为拓扑空间 (X, τ) . 例如, 对于集合 $X = \mathbb{R}^n$, 我们可以取 τ 为

- i) 平凡拓扑;
- ii) 离散拓扑;
- iii) 余有限拓扑;
- iv) 欧氏空间拓扑。

相应地, 所得拓扑空间 $(\mathbb{R}^n, \tau)$ 所具有的几何和分析性质之间, 可能存在很大差异. 例如 n 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^n, d)$ 中具有一些基本且常用的分析性质:

- 1) $\mathbb{R}^n$ 中的有限点集是一个闭集;
- 2) 如果 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点列 $\{x_k \in \mathbb{R}^n, k \geq 0\}$ 存在极限, 则极限点唯一;
- 3) 如果 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 是闭子空间 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的一个连续函数, 则存在一个连续函数 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 满足 $F|_A = f$ (即 f 可扩张为整个空间上的一个连续函数).

而对于集合 $\mathbb{R}^n$ 上的一般拓扑 τ 而言, 上述性质不一定成立. 本节通过分离性的讨论, 追究其深层次的原因.

问题: 当集合 X 上的拓扑结构 τ 满足何种条件时, 上述性质对于拓扑空间 (X, τ) 成立?

本节内容安排如下:

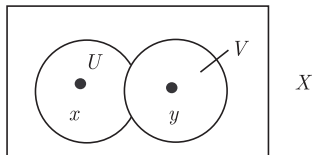
- 3.1 拓扑空间的第一、二分性 (T_1, T_2) .
- 3.2 拓扑空间的第三、四分性 (T_3, T_4) .
- 3.3 Urysohn 引理.
- 3.4 Tietze 扩张定理.

1.3.1 第一、二分性公理

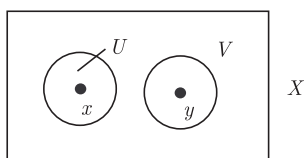
已知拓扑空间 (X, τ) 以及它的一个子空间 $A \subset X$. 如果 $A \in U \in \tau$, 则称 U 是 A 的一个开邻域.

定义: 已知拓扑空间 (X, τ) .

- 1) 如果 X 中任意两个不同点 $x, y \in X, x \neq y$, 存在各自不包含对方的开邻域, 则称 (X, τ) 是 T_1 空间, 或满足**第一分离性公理**.



- 2) 如果 X 中任意两个不同点 $x, y \in X, x \neq y$, 存在各自彼此不相交的开邻域, 则称 (X, τ) 是 T_2 空间, 或满足**第二分离性公理**.



例1. 一个拓扑平凡的空间 (X, τ) , $\tau = \{\phi, X\}$, 不是 T_1 或 T_2 空间。

如果 (X, τ) 是余有限拓扑空间; 则它是 T_1 空间。

例2. 如果 (X, d) 是度量空间. 则 (X, τ) 是 T_2 空间。

事实上, 对于空间 (X, d) 中任意两个不同点 $x, y \in X$, $x \neq y$, 由度量函数 d 的正定性知 $d(x, y) = \varepsilon > 0$. 从而

$$x \in B(x, \frac{\varepsilon}{3}) \in \tau, \quad y \in B(y, \frac{\varepsilon}{3}) \in \tau.$$

再由度量函数 d 的三角不等式知 $B(x, \frac{\varepsilon}{3}) \cap B(y, \frac{\varepsilon}{3}) = \phi$. □

推论1. 一个 T_2 空间 (X, τ) 也是 T_1 空间。

命题1. 一个拓扑空间 (X, τ) 是 T_1 空间的充要条件是, X 中的有限点集是闭集。

证明. 由于有限个闭集的并集是闭集, 只需要证明 X 是 T_1 空间的充要条件是, X 中的单点是闭集。

充分性: 设 X 满足 T_1 公理. 则对于任意一点 $y \in X - \{x\}$, 存在 $U \in \tau$, 使得

$$y \in U \subset X - \{x\}.$$

因此有 $X - \{x\} \in \tau$, 从而 $\{x\}$ 是闭子空间。

必要性: 设对于任意一点 $x \in X$, $\{x\}$ 是闭子空间. 对于 X 的任意两个不同点 $x, y \in X$, $x \neq y$, 它们各自有不包括对方的开邻域

$$X - \{x\}, X - \{y\} \in \tau \quad \square$$

命题2. 设 (X, τ) 是 T_2 空间, 并且 $\{x_n \in X, n \geq 0\}$ 是 X 中一个有极限的点列, 则该点列的极限点唯一。

证明: 设 $a \in X$ 是点列 $\{x_n \in X, n \geq 0\}$ 的一个极限. 下证任意一个不同于 a 的点 $y \neq a$, 不可能是该点列 $\{x_n, n \geq 0\}$ 的极限。

由于 $y \neq a$ 且 X 是 T_2 空间, 点 y 和 a 有各自不相交的开邻域

$$y \in U \in \tau, \quad a \in V \in \tau, \quad U \cap V = \phi$$

由于 a 是点列 $\{x_n \in X, n \geq 0\}$ 的极限, 存在 $N > 0$, 使得

$$\{x_{N+i} \in X, i \geq 0\} \subset V.$$

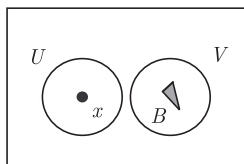
从而点 y 不可能是点列 $\{x_n \in X, n \geq 0\}$ 的极限. $\square$

定义: 满足 T_2 公理的空间也称为 Hausdorff 空间. 在一个 T_2 空间 (X, τ) 中, 若点 $a \in X$ 是某点列 $\{x_n \in X, n \geq 0\}$ 的极限, 则记为 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. $\square$

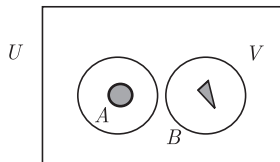
1.3.2 第三、四分分离性公理

定义: 一个空间拓扑 (X, τ) 称为

1) T_3 -空间, 或满足第三分离性公理, 如果 X 中任意一点与不包含它的一个闭集, 有各自不相交的开邻域:



2) T_4 -空间, 或满足第四分离性公理, 如果 X 中任意两个不相交闭集, 有各自不相交的开邻域:



$\square$

下面的命题表明, 四个分离性公理并非彼此独立:

命题3. T_2 空间是 T_1 空间;

$T_1 + T_4$ 空间是 T_3 空间;

$T_1 + T_3$ 空间是 T_2 空间. $\square$

命题4. 如果 (X, τ) 是由度量空间 (X, d) 所规定的拓扑空间, 则 X 满足全部四个分离性公理 $T_i, i = 1, 2, 3, 4$.

证明: 由于 (X, τ) 已经是 $T_1(T_2)$ 空间, 根据命题 3, 只要证明 X 是 T_4 空间.

设 $A, B \subset X$ 是一对不相交的闭集. 考虑 X 上的实函数

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

其中

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a), a \in A\}.$$

由于 A, B 是闭子空间, $d(x, A)$ 与 $d(x, B)$ 都是 X 上的连续函数. 再由三角不等式知

$$d(x, A) + d(x, B) > 0, \quad x \in X,$$

从而 f 是连续函数. 它满足

$$f^{-1}(0) = A; \quad f^{-1}(1) = B.$$

从而

$$U = f^{-1}\left(-\infty, \frac{1}{2}\right), \quad V = f^{-1}\left(\frac{1}{2}, \infty\right) \in \tau$$

是分别包含 A, B 的不相交开邻域.

命题5. 拓扑空间 (X, τ) 是 T_3 空间的充分必要条件是, 对于 X 中任意一点 x 以及它的一个开邻域 U , 存在该点 x 的另一开邻域 V , 满足

$$x \in V \subset \bar{V} \subset U.$$

拓扑空间 (X, τ) 是 T_4 空间的充分必要条件是, 对于 X 中的任意一个闭集 A 以及它的一个开邻域 U , 存在 A 的一个开邻域 V , 满足

$$A \subset V \subset \bar{V} \subset U.$$

证明. 两个结论的证明过程雷同. 下面仅考虑 T_4 空间的情形.

必要性: 设 A 是 T_4 空间 X 中的一个闭集, 并有 $A \subset U \in \tau$. 则 A 和 $B = X - U$ 是 X 中的不交闭集. 因此存在它们各自不相交的开邻域

$$A \subset U_1 \in \tau, \quad B \subset V_1 \in \tau, \quad U_1 \cap V_1 = \emptyset.$$

据此有

$$A \subset U_1 \subset X - V_1 \subset U,$$

其中, $\bar{U}_1 \subset X - V_1$ 是闭子空间. 必要性得证。

充分性: 设 $A, B \subset X$ 是两个不相交闭集, 并且 A 有开邻域 U , 满足

$$A \subset U \subseteq \bar{U} \subseteq X - B.$$

令 $V = X - \bar{U}$, 则有

$$A \subset U \in \tau, B \subset V \in \tau \text{ 且 } U \cap V = \phi.$$

充分性得证. $\square$

1.3.3 Urysohn引理

下面的定理断言, 对于 T_4 空间中两个不相交闭集, 可用连续函数的取值予以区分.

定理3.1 (Urysohn引理): 空间 (X, τ) 是 T_4 空间的充要条件是, 对于 X 中的每对不相交闭集 $A, B \subset X$, 存在一个连续映射 $f : X \rightarrow [0, 1]$, 满足 $f(A) = 0, f(B) = 1$.

定理 3.1 的证明需要如下引理.

引理: 对于 T_4 空间 X 中的一对不相交闭集 A, B , 存在 X 中的一簇开子集 $\{U(r) \subset X, r \in [0, 1]\}$, 它满足

- 1) 对于 $r \in [0, 1]$, 我们有 $A \subset U(r) \subseteq X - B$.
- 2) 对于 $r < r'$, 我们有 $\overline{U(r)} \subset U(r')$.

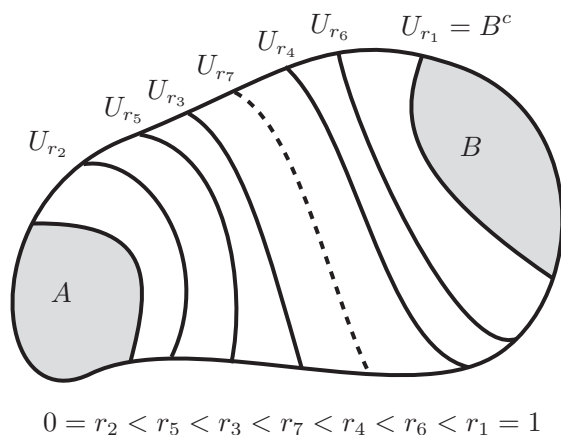
证明: 引理所断言的开子集簇 $\{U(r) \subset X, r \in [0, 1]\}$ 的构造, 依赖于单位区间 $[0, 1]$ 中的有理数集 $\mathbb{Q}$ 所具有的下述性质

- a) 可数性: $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3 \cdots\}$;
- b) 有序性: 对于任意 $s, t \in \mathbb{Q}$, 关系式 $s \leq t$ 或 $s > t$ 之一成立。
- c) 稠密性: $\bar{\mathbb{Q}} = [0, 1]$.

利用归纳法, 我们先来构造开集簇

$$\{U(r) \subset X, r \in \mathbb{Q}\},$$

它满足引理所断言的性质 1) 和 2).



第一步：不妨设在 a) 中有 $r_1 = 1, r_2 = 0$.

令 $U(r_1) = U(1) := X - B$. 则有 $A \subset U(r_1)$. 根据 T_4 公理(命题5), 存在包含 A 的开邻域 $A \subset U \in \tau$, 满足

$$A \subset U \subseteq \bar{U} \subset U(r_1).$$

定义 $U(r_2) = U(0) := U$.

第二步：下设 $U(r_1), \dots, U(r_k), k \geq 2$, 已获构造. 对于 $r_{k+1} \in \mathbb{Q}$, 令

$$a = \max\{r \in \{r_1, \dots, r_k\}, r < r_{k+1}\}.$$

$$b = \min\{r \in \{r_1, \dots, r_k\}, r > r_{k+1}\}.$$

则由 $a < b$ 知 $\bar{U}(a) \subset U(b)$. 根据 T_4 公理, 存在开集 $U \in \tau$, 满足

$$\bar{U}(a) \subset U \subset \bar{U} \subset U(b).$$

令 $U(r_{k+1}) := U$. 至此, 我们完成了开集簇 $\{U(r), r \in \mathbb{Q}\}$ 的归纳构造.

最后, 对于任意实数 $r \in [0, 1]$, 令

$$U(r) = \bigcup_{\substack{s \in \mathbb{Q} \\ s \leq r}} U(s) \in \tau.$$

则开集簇 $\{U(r) \in \tau, r \in [0, 1]\}$ 满足引理所述性质 1) 和 2). □

定理3.1的证明：充分性显然, 只需要证明必要性.

对于两个不相交闭集 $A, B \subset X$, 设 $\{U(r) | r \in [0, 1]\}$ 是引理证明所构造的一个开集簇. 定义空间 X 上的函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 如下:

$$f(x) = \begin{cases} \sup\{r \in [0, 1], x \in U(r), x \notin A\} \\ \inf\{r \in [0, 1], x \in U(r), x \notin B\} \end{cases}$$

则 f 的定义合理. 它满足:

- 1) $f(A) = 0, f(B) = 1$.
- 2) 对于所有 $a \in [0, 1]$

$$f^{-1}[0, a) = U(a) \quad (x \in U(a) \iff 0 \leq f(x) < a)$$

$$f^{-1}(a, 1] = X - \bar{U}(a) \quad (x \in f^{-1}(a, 1] \iff 1 \geq f(x) > a \iff x \in X - \bar{U}(a))$$

根据 2), 对于单位区间 $[0, 1]$ 中任意一对实数 $a < b$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(a, b) &= f^{-1}([0, b) \cap (a, 1]) \\ &= U(b) \cap (X - \bar{U}(a)) \in \tau. \end{aligned}$$

由于形如 $[0, a), (a, b), [b, 1]$ 的区间是 $[0, 1]$ 的一个拓扑基, f 的连续性得证.

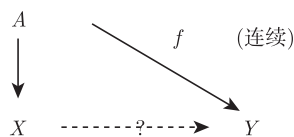
□

1.3.4 Tietze 扩张定理

定理3.2 (Tietze 扩张定理) 对于 T_4 空间 (X, τ) 中的一个闭子空间 A 上的连续函数 $f : A \rightarrow [0, 1]$. 存在 X 上的连续映射 $F : X \rightarrow [0, 1]$, 它满足 $F|_A = f$.

补注1: 利用同胚 $[0, 1] \cong [a, b]$, 定理中 f 和 F 的值域, 可以是任何闭区间.

补注2: 拓扑学的一个基本问题是连续映射的扩张问题: 已知子空间 $A \subset X$ 上的一个连续映射 $f : A \rightarrow Y$, 是否存在一个连续映射 $F : X \rightarrow Y$, 满足 $F|_A = f$?



图示: 连续映射的扩张问题

证明: 利用 Urysohn 引理, 我们先来归纳地构造一串函数

$$\{\varphi_n : X \rightarrow \left[0, \frac{2^{n-1}}{3^n}\right], n \geq 1\},$$

它们具有如下性质: 对于所有 $x \in A$ 以及 $n \geq 1$, 有

$$0 \leq f(x) - \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

φ_1 的构造: 将单位区间三等分 $[0, 1] = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. 则

$$A_1 = f^{-1}\left[0, \frac{1}{3}\right], \quad B_1 = f^{-1}\left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

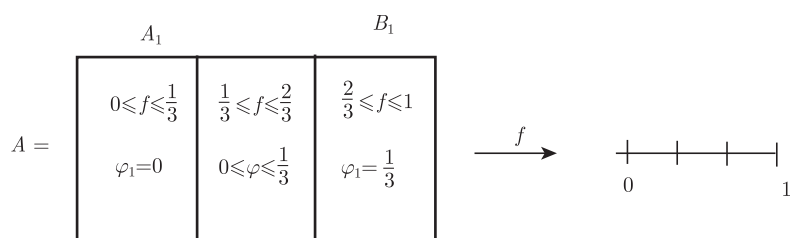
均是 A 的闭子空间, 并且 $A_1 \cap B_1 = \emptyset$. 由 Urysohn 引理, 存在连续函数

$$\varphi_1 : X \rightarrow \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

,

它满足 $\varphi_1(A_1) = 0$; $\varphi_1(B_1) = \frac{1}{3}$, 从而

$$0 \leq f(x) - \varphi_1(x) \leq \frac{2}{3}, \quad x \in A,$$



下设连续函数串 $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ 已获构造. 我们接着考虑 φ_{k+1} 的构造. 对于连续函数

$$f' = f - \sum_{1 \leq i \leq k} \varphi_i : A \rightarrow \left[0, \left(\frac{2}{3}\right)^k\right]$$

令

$$A' = f'^{-1} \left[0, \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k\right], \quad B' = f'^{-1} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}, \left(\frac{2}{3}\right)^k\right],$$

则得 A 中的两个不相交闭集 A', B' . 根据 Urysohn 引理, 存在连续函数

$$\varphi_{k+1} : X \rightarrow \left[0, \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k\right]$$

使得 $\varphi_{k+1}(A') = 0$; $\varphi_{k+1}(B') = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k$, 从而

$$0 \leq f - \sum_{1 \leq i \leq k+1} \varphi_i \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}, \quad \forall x \in A$$

至此, 我们完成了函数串 $\{\varphi_n : X \rightarrow [0, \frac{2^{n-1}}{3^n}], n \geq 1\}$ 的归纳构造.

最后, 令

$$F = \varphi_1 + \dots + \varphi_n + \dots : X \rightarrow [0, 1].$$

则有

1) F 的定义合理: 对于每点 $x \in X$, $a_n(x) = \varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x) \in [0, 1], n \geq 1$, 是一个单调递增数列, 极限是 $F(x)$;

2) $F|A = f$.

只需要再证 F 是连续函数.

对于充分大的 $N \gg 0$, 我们有 $F(x) = a_N(x) + b_N(x)$, 其中

$$a_N = \varphi_1 + \dots + \varphi_N \quad (F \text{ 的主部}).$$

$$b_N = \varphi_{N+1} + \dots + \varphi_\infty \quad (F \text{ 的余部})$$

$$\leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^N + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1} + \dots \leq \left(\frac{2}{3}\right)^N.$$

对于 $(a, b) \subset [0, 1]$ 以及 $x_0 \in F^{-1}(a, b)$, 有 $a < F(x_0) < b$, 即

$$a < F(x_0) - \varepsilon < F(x_0) < F(x_0) + \varepsilon < b.$$

存在 $N \gg 0$, 使得 $b_N \leq \left(\frac{2}{3}\right)^N < \frac{\varepsilon}{2}$. 令

$$U = a_N^{-1} \left(F(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, F(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \right) \in \tau.$$

则有 $x_0 \in U$, 并且对于所有 $x \in U$

$$F(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < F(x) < F(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

它表明 $x_0 \in U \subset F^{-1}(a, b)$, 即 $F^{-1}(a, b) \in \tau$. 至此, 函数 F 的连续性得证. $\square$

习题1. 对于一个拓扑空间 (X, τ) , 乘积空间 $X \times X$ 的对角子空间是

$$\Delta(X) = \{(x, x) \in X \times X, x \in X\}.$$

证明 (X, τ) 是 T_2 空间的充分必要条件是, $\Delta(X)$ 是乘积空间 $X \times X$ 的闭子空间.

习题2. 设 A 是度量空间 (X, d) 的一个闭子空间. 定义函数

$$d_A : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_A(x) = \inf\{d(x, a) \in \mathbb{R}, a \in A\}.$$

证明:

- 1) d_A 是 X 上的连续函数;
- 2) $d_A(x) = 0$ 的充分必要条件是, $x \in A$.

习题3. 证明两个 T_2 空间的乘积空间也是 T_2 空间。

习题4. 证明 T_1 空间中的任一子集的导集是闭集。

习题5. 设 (X, τ) 是 T_2 空间, $f : X \rightarrow X$ 是连续映射. 证明 f 的不动点集

$$\text{Fix}(f) := \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

是 X 的闭子空间.

习题6. 设 (Y, τ) 是 T_2 空间, $f : X \rightarrow Y$ 是连续映射. 证明 f 的图像

$$G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

是乘积空间 $X \times Y$ 的闭子空间.

习题7. 设 (X, τ) 是 T_3 空间, A 是 X 的闭子空间, $x \notin A$. 证明存在 x 和 A 各自的开邻域 U 和 V , 使得 $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.

习题8. 已知 T_4 空间 (X, τ) 中的一个闭子空间 A 上的连续映射 $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$. 证明存在 X 上的连续映射 $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, 它满足 $F|_A = f$.

习题9. 举例说明, Tietze 扩张定理中 $A \subset X$ 是闭子空间的条件不可去.

提示: 写出一个映射 $f : \mathbb{R} - 0 \rightarrow [0, 1]$, 它不能扩张为连续映射 $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$.

1.4 拓扑空间的紧致子空间

已知欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ (或度量空间 (X, d)) 中的一个子空间 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ($A \subset X$), 它的直径是

$$d(A) := \sup\{d(a, b) \in \mathbb{R}, a, b \in A\}.$$

如果 $d(A)$ 有限, 则称 A 是 $\mathbb{R}^n$ 或 X 中的一个**有界子空间**.

推论: 子空间 $A \subset \mathbb{R}^n$ 有界的充要条件是, 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开球体 $B(a, r)$, 使得 $A \subset B(a, r)$.

通常, 我们所关心的几何体都是欧式空间中的有界闭集. 这类子空间具有很好的分析性质. 例如

- 1) 有界闭集上的连续函数可取到最大、最小值;
- 2) 有界闭集中的无限点列必有收敛子列(列紧性).

本节, 我们将上述性质推广到拓扑空间中的“紧致子空间”。

定义: 已知拓扑空间 (X, τ) 以及它的一个子空间 $A \subseteq X$. X 中的一簇开子集 $\{U_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda\}$ 称为 A 的一个**开复盖**, 如果

$$A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

进一步, 如果该覆盖的指标集 Λ 有限, 则称开集簇 $\{U_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda\}$ 是 A 的一个**有限开复盖**.

A 称为 (X, τ) 的一个**紧致子空间**, 如果对于它的每个开复盖 $\{U_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda\}$, 都有一个有限的子复盖

$$\{U_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda'\}, \Lambda' \subset \Lambda, |\Lambda'| < \infty.$$

本节的主要内容有:

- 1) A 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭集的充分必要条件是, A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致子空间;
- 2) 欧氏空间中有界闭集的许多基本性质, 可以推广到拓扑空间的紧致子空间.

本节主要内容如下

- 4.1. 拓扑空间中的紧致子空间的性质;
- 4.2. 紧致性和分离性的关系;
- 4.3. 欧式空间中的有界闭集;
- 4.4. Lebesgue 定理;
- 4.5. 局部紧致空间和仿紧空间

1.4.1 紧致子空间的性质

命题1. 紧致空间中的闭子空间紧致.

证明: 对于紧致空间 X 中的一个闭子空间 $A \subset X$, 设 $\{U_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda\}$ 是它的一个开复盖. 则 $\{X - A, U_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda\}$ 是整个空间 X 的一个开复盖. 由于 X 紧致, 它有一个有限子覆盖 $\{U_1, \dots, U_n \in \tau\}$, 由此得到 A 的一个有限开复盖, 它是原开覆盖的一个子覆盖. $\square$

命题2. 紧致空间在连续映射下的像紧致.

证明: 设 X 紧致且 $f: X \rightarrow Y$ 连续. 下证 $f(X) \subseteq Y$ 是紧致子空间. 设 $\{U_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda\}$ 是像集 $f(X)$ 的一个开复盖. 则得 X 的一个开复盖

$$\Lambda_f := \{f^{-1}(U_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$$

由于 X 紧致, 它有有限子复盖;

$$\Lambda'_f = \{f^{-1}(U_i), 1, \dots, n \in \Lambda\}.$$

据此, $\{U_i, 1 \leq i \leq n\}$ 是 $f(X)$ 的一个有限开覆盖, 它是原覆盖的一个子覆盖. $\square$

命题3. 紧致拓扑空间上的连续函数有界,并可取到最大、最小值.

证明: 设 X 紧致且 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 连续. 则由命题2, $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ 是一个紧致子空间, 从而是一个有界闭集. 因此

$$\begin{aligned} a &= \sup\{f(x) \in \mathbb{R}, x \in X\} \in f(X) \\ b &= \inf\{f(x) \in \mathbb{R}, x \in X\} \in f(X) \end{aligned}$$

尤其是, 存在 $x_1, x_2 \in X$, 使得 $f(x_1) = a, f(x_2) = b$. $\square$

命题4. 紧致空间 X, Y 的乘积空间 $X \times Y$ 紧致.

引理 (管状邻域的存在性): 设 Y 紧致, $x_0 \in X$ 是一个定点, W 是乘积空间 $X \times Y$ 中包含了子空间 $x_0 \times Y$ 的一个开集.

则存在点 $x_0 \in X$ 的一个开邻域 $U(x_0) \in \tau_X$, 使得 $U(x_0) \times Y \subset W$.

证明: 根据乘积拓扑的定义, 对于任意一点 $y \in Y$, 存在点 x_0 的开邻域 $U_y \subset X$, 以及点 y 的开邻域 $V_y \subset Y$, 使得

$$(x_0, y) \in U_y \times V_y \subset W.$$

从而得 $x_0 \times Y$ 的一个开复盖 $\Lambda = \{U_y \times V_y, y \in Y\}$. 由于 $x_0 \times Y$ 紧致, 它有有限子覆盖

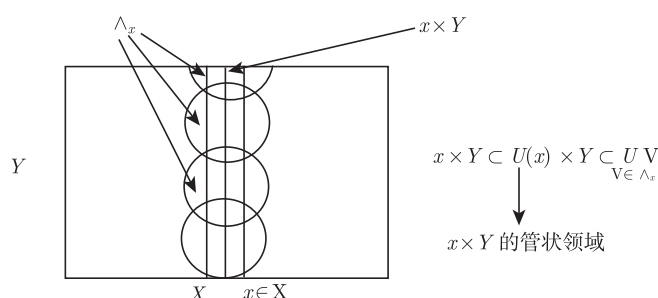
$$\Lambda = \{U_{y_i} \times V_{y_i}, 1 \leq i \leq n\}.$$

令 $U(x_0) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_{y_i}$, 则有

$$1) x_0 \in U(x_0) \in \tau_X;$$

$$2) x_0 \times Y \subset U(x_0) \times Y \subset W. \quad \square$$

[引理证明示意图]



命题4的证明: 设 $\{U_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda\}$ 是乘积空间 $X \times Y$ 的一个开复盖. 对于每点 $x \in X$, 它也是紧致空间 $x \times Y$ 的一个开复盖, 因此存在有限子覆盖

$$x \times Y \subset U_{\lambda_1(x)} \cup \cdots \cup U_{\lambda_{n(x)}(x)}, \lambda_i(x) \in \Lambda.$$

根据引理, 存在点 x 的开邻域 $x \in U(x) \in \tau_X$, 它满足

$$x \times Y \subset U(x) \times Y \subset U_{\lambda_1(x)} \cup \cdots \cup U_{\lambda_{n(x)}(x)}, \lambda_i(x) \in \Lambda.$$

由于 $\{U(x) \in \tau_X, x \in X\}$ 是紧致空间 X 的一个开复盖, 它有有限子复盖

$$X \subset U(x_1) \cup \cdots \cup U(x_m).$$

总之, 我们得到乘积空间 $X \times Y$ 开覆盖 $\{U_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda\}$ 的一个有限子覆盖

$$\{U_{\lambda_i(x_j)}, j = 1, \cdots, m; i = 1, \cdots, n(x_j), \lambda_i(x_j) \in \Lambda\}. \square$$

命题5(紧致空间的 Bolzano-Weierstrass性质). 紧致空间中的一个无穷子集 (或无穷点列) A 必有聚点.

证明: 只需要证明, 如果 X 紧致且 $A \subset X$ 没有聚点, 则 $|A| < \infty$.

根据聚点的定义, 对于任意一点 $x \in X$, 存在开邻域 $x \in U(x) \in \tau$ 使得

$$A \cap U(x) = \begin{cases} \phi, & \text{若 } x \in A \\ x & \text{若 } x \in A. \end{cases}$$

由于 X 紧致, 它的开复盖 $\{U(x) \in \tau, x \in X\}$ 存在一个有限的子复盖

$$\{U(x_1), \dots, U(x_n)\}.$$

由于每个开集 $U(x_i)$ 至多包含 A 中的一点, 从而 $|A| \leq n$ 是一个有限集. $\square$

1.4.2 T_2 空间的紧致子空间(分离性和紧致性的关系)

命题1: 设 A 是 T_2 空间 (X, τ) 的一个紧致子集. 则对于每点 $x \in X - A$, 点 x 和 A 有不交开邻域.

证明: 由于 X 是 T_2 空间且 $x \in X - A$, 对于每一点 $a \in A$ 存在

$$a \in U(a) \in \tau, x \in V_a(x) \in \tau$$

使得 $U(a) \cap V_a(x) = \phi$. 由于 A 紧致, 它的开复盖 $\{U(a) \in \tau, a \in A\}$ 存在有限子复盖 $\{U(a_1), \dots, U(a_n)\}$, 令

$$U(A) = U(a_1) \cup \dots \cup U(a_n), V(x) = V_{a_1}(x) \cap \dots \cap V_{a_n}(x) \in \tau,$$

则有 $x \in V(x) \in \tau, A \subset U(A) \in \tau$, 并且 $V(x) \cap U(A) = \phi$. $\square$

命题2: T_2 空间的紧致子空间是闭子空间.

证明: 由命题1的证明知, 若 $A \subset X$ 紧, 则它的补空间 $X - A$ 是开集. $\square$

命题3: T_2 空间中不交的紧致子空间有不交的开邻域.

证明: 设 X 是 T_2 空间, $A, B \subset X$ 紧致且 $A \cap B = \phi$. 根据命题2, 对于任意点 $b \in B$ 存在

$$A \subset U_b(A) \in \tau, b \in V(b) \in \tau$$

使得 $U_b(A) \cap V(b) = \phi$.

由于 B 紧致, 它的开复盖 $\{V(b) \in \tau, b \in B\}$ 有有限子复盖 $\{V(b_1), \dots, V(b_n)\}$. 令

$$U(A) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_{b_i}(A) \in \tau, V(B) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} V(b_i) \in \tau.$$

则有 $A \subset U(A), B \subset V(B)$, 并且 $U(A) \cap V(B) = \phi$. $\square$

命题4: 紧致 T_2 空间满足 T_3, T_4 公理.

证明: 在紧致 T_2 空间 X 中, $A \subseteq X$ 是闭子空间等价于 A 紧致. 证明由命题2, 4完成. $\square$

1.4.3 欧式空间中的有界闭集

定理4.1: 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 A 紧致的充要条件是, A 是一个有界闭集.

证明: 充分性: 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 紧致. 由于 $\mathbb{R}^n$ 是 T_2 空间, A 是一个闭子空间. 下证 A 有界.

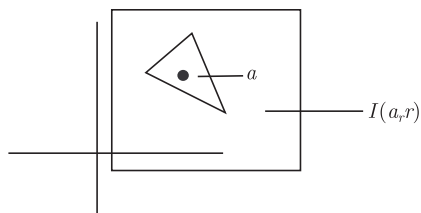
对于 $a \in A$, 令 $U(a) = \{x \in \mathbb{R}^n, d(a, x) < 1\}$. 则得 A 的一个开复盖 $\{U(a) \in \tau, a \in A\}$. 由于 A 紧致, 它有有限子复盖

$$\{U(a_1), \dots, U(a_n)\}$$

由三角不等式得 $d(A) \leq d(a_1, \dots, a_n) + 2$.

必要性: 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界闭集. 取定一点 $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$, 并设 $r = d(A) < \infty$. 则有

$$A \subseteq I(a, r) := [a_1 - r, a_1 + r] \times \dots \times [a_n - r, a_n + r].$$



由于每个闭区间 $[a, b]$ 紧致, 它们的乘积空间 $I(a, r)$ 紧致, 且 $A \subset I(a, r)$ 闭. 从而 A 紧致. $\square$

1.4.4 Lebesgue引理

定理4.2 对于紧致度量空间 (X, d) 的一个开复盖 $\{U_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda\}$, 存在一个正数 $\delta > 0$, 使得对于 X 中每个直径小于 δ 的子空间 $A \subset X$ ($d(A) < \delta$), 存在 $\lambda \in \Lambda$, 满足 $A \subset U_\lambda$.

证明 用反证法. 设 $\{U_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda\}$, 是紧致度量空间 (X, d) 的一个开复盖, 并且对于每个整数 $n = 1, 2, 3, \dots$, 存在子空间 $A_n \subset X$, 满足

$$d(A_n) < \frac{1}{n} \text{ 但 } A_n \not\subset U_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda.$$

任取 $a_n \in A_n$, 则 $\{a_n \in X, n \geq 1\}$ 是紧致度量空间 X 中的一个无穷点列, 从而有收敛子列. 不妨设

$$\lim a_n = a \in U_{\lambda_0}, \lambda_0 \in \Lambda$$

由于 U_{λ_0} 开, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $a \in B(a, \varepsilon) \subset U_{\lambda_0}$. 另一方面, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$d(a, a_N) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{且} \quad \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$$

它们表明 $A_N \subset B(a, \varepsilon) \subset U_{\lambda_0}$. 这与 A_N 的取法相矛盾. $\square$

1.4.5 补充: 局部紧致空间与仿紧空间

在和流形有关的几何和拓扑学中, 基于“紧性”的论证和构造十分基本. 其中, 紧致性的要求常常显得过于苛刻. 下面介绍两个较弱、但十分常用的紧性版本.

定义: 一个拓扑空间 (X, τ) 称为**局部紧致空间**, 如果对于它的任意一点 $x \in X$, 存在紧致子空间 $A \subset X$, 使得 $x \in \overset{\circ}{A}$.

定义: 一个拓扑空间 (X, τ) 称为**仿紧空间**, 如果对于它的每个开复盖 $\{U_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda\}$, 存在第二个开复盖 $\{V_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda' \subset \Lambda\}$, 满足下列条件:

- 1) 对于每个 $\lambda \in \Lambda' \subset \Lambda$, 有 $V_\lambda \subset U_\lambda$;
 - 2) 对于每点 $x \in X$, 存在一个开邻域 $U(x)$, 它仅与有限个 U_λ 相交;
- 上述第二个开复盖 $\{V_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda'\}$ 称为原开复盖 $\{U_\lambda \in \tau, \lambda \in \Lambda\}$ 的一个**局部有限的开加细**.

关于这两种弱化了了的紧致性的讨论, 在相当程度上和紧致性的讨论平行. 希望读者通过下列作业体会这一点.

习题1. 紧致空间必是局部紧致空间. 欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 局部紧致, 但不紧致.

习题2. 局部紧致的 T_2 空间满足 T_3 公理.

习题3. 仿紧的 T_2 空间满足 T_4 公理.

1.5 拓扑空间的连通性

和分离性和紧致性相比较, 拓扑空间的连通性是一个较为直观的概念. 例如, 在我们所生活的 3 维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 令

$X =$ 地球(包括内部)所占据的位置(点)的集合(度量空间).

考虑函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) =$ 点 $x \in X$ 的海拔高度. 令

$$A = \{x \in X, f(x) > 0\}, \quad B = \{x \in X, f(x) < 0\}.$$

则有

- 1) B 是一个连通空间;
- 2) $A = \text{欧亚板块} \sqcup \text{美洲板块} \sqcup \text{岛屿} \dots$ 是一个不连通空间.

对于一个拓扑空间 (X, τ) , 如何利用 X 中的拓扑结构 τ , 对于空间 X 的连通性给出一个严格定义, 它与我们对“连通性”的直观认识相契合?

定义: 拓扑空间 (X, τ) 称为连通的, 如果对于 X 的任意非空无交并分解

$$X = A \sqcup B, \quad A, B \neq \phi,$$

都有 $\bar{A} \cap B \neq \phi$, 或 $A \cap \bar{B} \neq \phi$ (即 B 中存在 A 的聚点, 或 A 中存在 B 的聚点).

例1: 考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 中的子空间 $X = A \cup B$, 其中

$$A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}, \quad B = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in (0, 1)\}$$

则有 $\bar{A} \cap B = \phi$, 但 $A \cap \bar{B} = A \neq \phi$. 从而 X 是一个连通空间.

例2: 欧氏直线 $\mathbb{R}$ 的子空间 $X = (-1, 0) \cup (0, 1)$ 不连通.

考察平面 $\mathbb{R}^2$ 中的两条曲线

$$A = \{(x, e^x) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}; \quad B = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}.$$

则 $A \cup B$ 不连通: $A \cap B = \phi, A = \bar{A}, B = \bar{B}$.

本节的主要内容有:

- 5.1. 连通空间的性质与判定;
- 5.2. 拓扑空间的连通分支及分解;
- 5.3. 道路连通空间

1.5.1 连通空间的性质与判定

定理5.1: 对于一个拓扑空间 (X, τ) , 以下性质等价

- 1) X 连通;
- 2) X 中即开且闭的子空间只有 X 和 ϕ ;
- 3) X 不能表为两个非空不交开集的并集;
- 4) 任一连续映射 $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ 必是常值映射, 其中 $\{0, 1\}$ 赋予离散拓扑.

证明: 采用循环证法 $1) \implies 2) \implies 3) \implies 4) \implies 1)$.

1) $\Rightarrow$ 2): 设 X 连通. 若不然, 存在空间 X 的一个即开且闭的非空的真子空间 $A \subset X$. 从而 $B = X \setminus A$ 也是 X 的一个即开且闭的非空真子空间. 从而有

$$X = A \cup B \text{ 且 } \bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = A \cap B = \phi.$$

这与 X 得连通性相矛盾.

2) $\Rightarrow$ 3): 显然

3) $\Rightarrow$ 4): 若存在连续满射 $f: X \rightarrow \{0, 1\}$, 则

$$X = A \cup B, \quad A = f^{-1}(0), \quad B = f^{-1}(1).$$

其中 $A, B \subset X$ 是不交开集. 这与 3) 矛盾.

4) $\Rightarrow$ 1): 若 X 不连通, 则有 $X = A \cup B$, $A, B \neq \phi$ 且

$$\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \phi.$$

从而 $A, B \subset X$ 是不交开子空间. 定义映射:

$$f: X \rightarrow \{0, 1\} \text{ 为 } f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

则 f 连续且是满射, 这与 4) 相矛盾. □

下面讨论连通空间具有的一般性质

命题1: 实轴 $\mathbb{R}$ 中的连通子空间或是一个单点, 或是一个区间.

证明: 设 $X \subset \mathbb{R}$ 非空且连通. 令

$$a = \inf\{r \in X\} \quad b = \sup\{r \in X\}.$$

则有:

$$X \subseteq \begin{cases} a = b, & \text{若 } X = \{a\} \\ (a, b), & \text{若 } a, b \in X, \\ [a, b], & \text{若 } a, b \in X \\ [a, b), & \text{若 } a \in X, \text{ 但 } b \notin X \\ (a, b], & \text{若 } a \notin X, \text{ 但 } b \in X \end{cases}$$

下证等式成立。

如若不然, 存在 $a < c < b$, 使得 $c \notin X$. 令

$$A = X \cap (-\infty, c), \quad B = X \cap (c, +\infty)$$

则 $A, B \subset X$ 是非空开子空间, 并且有

$$A = A \cup B, \quad A \cap B = \phi$$

根据定理5.1中结论 3) 知, X 不连通, 与已知相矛盾. $\square$

命题2: 连通空间在连续映射下的像连通.

证明: 下设 $f: X \rightarrow Y$ 连续且 X 连通, 往证 $f(X) \subseteq Y$ 是一个连通子空间.

若不然, 根据定理5.1, 存在一个连续满射 $g: f(X) \rightarrow \{0, 1\}$, 从而合成映射

$$g \circ f: X \xrightarrow{f} f(X) \xrightarrow{g} \{0, 1\}$$

是一个连续满射. 此与定理5.1中的性质4) 相矛盾. $\square$

命题3 (介值定理): 连通空间 X 上的一个连续函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 可取到所有中间值.

证明: 根据命题 1 和 2, $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间. $\square$

命题4: 设 $\{A_\lambda \subseteq X, \lambda \in \Lambda\}$ 是拓扑空间 X 的一个连通复盖(即 A_λ 连通且 $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$). 如果存在 $\lambda_0 \in \Lambda$, 使得对于任意 $\lambda \in \Lambda$, 都有 $A_{\lambda_0} \cap A_\lambda \neq \emptyset$, 则 X 是连通空间.

证明: 设 $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ 是一个连续映射. 根据定理5.1, 只需要证明它是一个常值映射.

由于 A_{λ_0} 连通, 根据定理5.1中的性质4), 我们有 $f(A_{\lambda_0}) = 0$ 或 $f(A_{\lambda_0}) = 1$. 不妨设 $f(A_{\lambda_0}) = 0$.

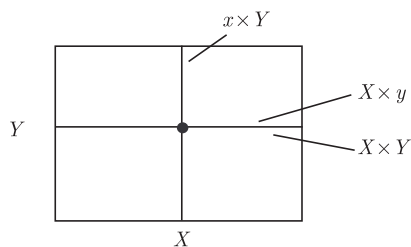
对于每个 $\lambda \in \Lambda$, 由于 A_λ 连通并且 $A_{\lambda_0} \cap A_\lambda \neq \emptyset$, 从而 $f(A_\lambda) = 0$. 据此

$$f(X) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda) = 0. \square$$

命题5: 如果 X, Y 连通, 则乘积空间 $X \times Y$ 连通.

证明: 任取一点 $y_0 \in Y$. 由于 X, Y 连通, 乘积空间 $X \times Y$ 有如下连通覆盖

$$\{X \times y_0, x \times Y, x \in X\},$$



它满足

$$X \times y_0 \cap x \times Y = (x, y_0) \neq \emptyset$$

根据命题4, 命题5 成立. $\square$

命题6: 设 $A \subset X$ 是一个稠密子空间 $\bar{A} = X$. 如果 A 连通, 则 X 连通.

证明: 设 $B \subseteq X$ 即开且闭, 根据定理5.1, 只需要证明 $B = \phi$ 或 $B = X$. 由于 $B \cap A \subseteq A$ 即开且闭, 且 A 连通, 从而

$$B \cap A = \begin{cases} \phi, \\ A. \end{cases}$$

1) 如果 $B \cap A = \phi$, 则有 $A \subseteq X - B$. 取闭包得

$$X = \bar{A} \subseteq (\overline{X - B}) = X - B$$

它表明 $B = \phi$.

2) 如果 $B \cap A = A$, 则有 $A \subseteq B \subseteq X$. 取闭包得

$$X = \bar{A} \subseteq \bar{B} = B \subseteq X.$$

它表明 $B = X$. $\square$

1.5.2 拓扑空间的连通分支

定义: 拓扑空间 X 的一个子空间 $A \subset X$ 称为 X 的一个连通分支, 如果 A 连通, 且不是 X 的任何连通子空间的真子空间.

命题7: 在一个拓扑空间 X 中

- 1) X 的每个连通子空间 A 都包含于唯一一个连通分支中;
- 2) X 的每个连通分支都是 X 的闭子空间.

证明: 1) 设 $A \subseteq X$ 是一个连通子空间. 令

$$\Lambda = \{B \subset X, B \text{ 连通且 } A \subseteq B\} \subseteq 2^X; \quad X_0 = \bigcup_{B \in \Lambda} B.$$

则 Λ 是 X_0 的一个连通复盖, 且满足

$$\forall B, B' \in \Lambda, \text{ 有 } A \subset B \cap B' \neq \phi.$$

根据命题4, X_0 连通.

下证 X_0 是一个连通分支. 如果有 $X_0 \subseteq X_1$, 且 X_1 连通, 则 $X_1 \in \Lambda$. 从而 $X_1 \subseteq X_0$.

2) 设 $X_0 \subseteq X$ 是一个连通分支. 则由命题6 知, $\bar{X}_0$ 连通. 由 X_0 的极大性知 $X_0 = \bar{X}_0$, 从而 X_0 是 X 的闭子空间.

例3: 针对命题7的结论2), 我们举例说明, 拓扑空间 X 的一个连通分支 A 可以不是开子空间.

设 $X = \mathbb{R}^1$ 中全体有理数构成的子空间. 则 X 中的每个非空开集是一个无穷集. 下证 X 的每个连通分支必为一个单点, 从而 X 的连通分支不是开集.

证明: 设 $A \subset X$ 是一个连通分支. 考虑含入映射

$$f: A \hookrightarrow X \xrightarrow{i} \mathbb{R}.$$

由于 f 连续, $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ 连通. 由于 $f(A)$ 是有理数的子集合, 根据命题1, 只能有 $f(A) = \{r\}$, 据此, $A = \{r\}$ 是单点. $\square$

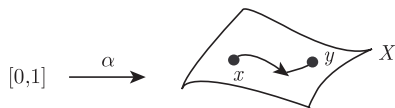
定理5.2 设 $\{X_\lambda \subseteq X, \lambda \in \Lambda\}$ 是拓扑空间 X 的全体连通分支的集合. 则有

1) $X_\lambda \cap X_{\lambda'} = \emptyset$, 若 $\lambda \neq \lambda'$;

2) $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. $\square$

1.5.3 道路连通空间

定义: 拓扑空间 (X, τ) 中的一条道路是指一个连续映射 $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$, 其中 α 在区间两端的值 $\alpha(0), \alpha(1) \in X$ 分别称为道路 α 的起点和终点, 统称为 α 的端点. $\square$



拓扑空间 (X, τ) 称为道路连通空间, 如果对于 X 中任意两点 $x, y \in X$, 存在一条道路 $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$, 满足 $(\alpha(0), \alpha(1)) = (x, y)$. $\square$

定理5.3: 道路连通空间具有下述性质:

- 1) 道路连通空间是连通空间;
- 2) 道路连通空间在连续映射下的像道路连通;
- 3) 道路连通空间的乘积空间道路连通.

证明: 1) 用反证法. 设 X 道路连通但不连通. 则有分解

$$X = A \sqcup B, \quad A \cap B = \emptyset,$$

其中 A, B 即开且闭. 取 $x \in A, y \in B$, 根据道路连通性, 存在连续映射

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow X, \text{ 满足 } \alpha(0) = x, \alpha(1) = y.$$

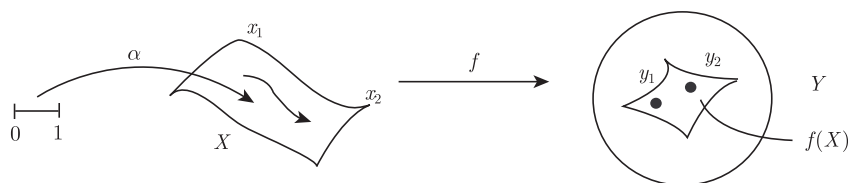
于是有

$$[0, 1] = \alpha^{-1}(A) \sqcup \alpha^{-1}(B),$$

其中 $\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B) \subseteq [0, 1]$ 即开且闭, 并且有 $\alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B) = \emptyset$. 这与闭区间 $[0, 1]$ 的连通性矛盾.

2) 设 $f : X \rightarrow Y$ 连续且 X 道路连通. 下证 $f(X) \subseteq Y$ 道路连通. 对于任意两点 $y_1, y_2 \in f(X)$, 存在 $x_1, x_2 \in X$, 使得

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2.$$



由于 X 道路连通, 存在一条道路 $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$, 满足 $\alpha(0) = x_1, \alpha(1) = x_2$. 易见, 复合映射:

$$f \circ \alpha : [0, 1] \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y.$$

连续, 并且满足 $f \circ \alpha(0) = y_1, f \circ \alpha(1) = y_2$.

3) 设 X, Y 均是道路连通空间. 对于乘积空间的任意两点 $(x_i, y_i) \in X \times Y, i = 1, 2$, 令

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow X, \quad \beta : [0, 1] \rightarrow Y$$

分别是 x_1 到 x_2, y_1 到 y_2 的两条道路. 则

$$\gamma = (\alpha, \beta) : [0, 1] \rightarrow X \times Y, \quad \gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$$

是乘积空间 $X \times Y$ 中从 (x_1, y_1) 到 (x_2, y_2) 的一条道路. □

定义: 已知拓扑空间 (X, τ) 中两点 $x, y \in X$. 如果存在一条道路 $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ 满足

$$\alpha(0) = x, \quad \alpha(1) = y,$$

则称 x, y 位于同一路径连通分支, 记为 $x \sim y$. □

引理: 空间 X 中的上述两元关系 $\sim$ 是一个等价关系.

证明: 1) 自反性: 对于任意一点 $x \in X$, 常值道路 $\alpha: [0, 1] \rightarrow x \in X$ 是 x 到自己的一条道路, 它表明 $x \sim x$.

2) 对称性: 如果 $x \sim y$, 则存在从 x 到 y 的一条道路 $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ ($\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$). 令

$$\alpha^{-1}: [0, 1] \rightarrow X \quad \text{为} \quad \alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t).$$

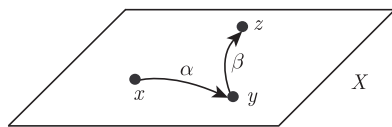
则 α^{-1} 连续, 且满足 $\alpha^{-1}(0) = y, \alpha^{-1}(1) = x$. 它表明 $y \sim x$.

3) 传递性: 如果 $x \sim y$, 且 $y \sim z$, 则有

$$\begin{aligned} \alpha: [0, 1] \rightarrow X & \text{ 满足 } \alpha(0) = x, \alpha(1) = y; \\ \beta: [0, 1] \rightarrow X & \text{ 满足 } \beta(0) = y, \beta(1) = z. \end{aligned}$$

令 $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ 为

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2t - 1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$



根据映射的焊接原理, γ 连续, 并有 $\gamma(0) = x, \gamma(1) = z$. 从而 $x \sim z$. $\square$

定义: 在引理的证明中, α^{-1} 称为道路 α 的 **逆道路**, γ 称为道路 α 与 β 的 **乘积道路**, 也记为 $\gamma := \alpha * \beta$. $\square$

命题1: 已知欧氏空间的开子集 $X \subseteq \mathbb{R}^n$. 则 X 连通的充要条件是 X 道路连通.

证明: 充分性显然. 下证必要性.

设 X 连通. 取一定点 $x_0 \in X$, 令

$$U(x_0) = \{x \in X, x \sim x_0\}, \quad V(x_0) = \{x \in X, x \not\sim x_0\}$$

则有:

$$a) \quad X = U(x_0) \cup V(x_0), \quad U(x_0) \cap V(x_0) = \emptyset;$$

b) $U(x_0)$ 是 X 的非空开子集: $\forall x \in U(x_0)$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$x \in B(x, \varepsilon) \subset X \quad (\text{由于 } X \text{ 开}).$$

由关系 $\sim$ 的传递性知: $x \in B(x, \varepsilon) \subset U(x_0)$.

c) 和 b) 同理, $V(x_0)$ 是 X 的开子集.

如果 $V(x_0) = \phi$, 则 $X = U(x_0)$ 道路连通. 如果 $V(x_0) \neq \phi$, 则 X 是两个非空不交开子空间的并, 这与 X 的连通性相矛盾. $\square$

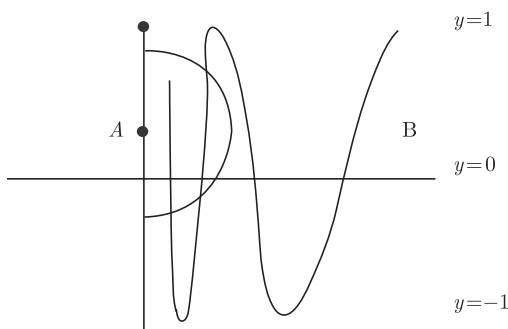
例4: $\mathbb{R}^n$ 中的连通子空间不一定道路连通. 尤其是, 命题1中连通子空间 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是开集的条件不可去.

考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 中的下述子空间.

$$A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq y \leq 1\}$$

$$B = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2, 0 < x \leq 1 \right\}$$

则 A, B 各自道路连通. 令 $X = A \cup B$. 则由 $A \cap \bar{B} = A$ 知 X 连通.



下证不存在从 A 到 B 的道路, 从而 X 非道路连通.

观察: 对于 $a \in A$, 令 $D =$ 平面 $\mathbb{R}^2$ 以 a 为心, 半径为 $\frac{1}{2}$ 的闭圆盘. 则

$$D \cap X = l_0 \sqcup l_1 \sqcup l_2 \sqcup \cdots$$

其中 $l_0 = D \cap A$, 而 $l_1, \dots, l_k, \dots$ 是 $D \cap B$ 中的连通闭弧段, 它们是空间 $D \cap X$ 的连通分支.

设 $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ 是一条道路, 满足 $\alpha(0) = (0, 0) \in A$. 下证 $\alpha[0, 1] \subseteq A$ (即不存在从 A 到 B 的道路).

记 $H = \alpha^{-1}(A)$, 则 $H \subseteq [0, 1]$ 是非空闭集. 只需证明 H 亦是一个开集, 从而 $H = [0, 1]$.

对于 $t_0 \in H$, 令 $a = \alpha(t_0)$, $D = \overline{B\left(a, \frac{1}{2}\right)}$. 则有

1) 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\alpha(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset \overset{\circ}{D}$;

$$2) D \cap X = l_0 \sqcup l_1 \sqcup l_2 \sqcup \cdots.$$

由于 $\alpha(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ 连通, α 连续, 且 $\alpha(t_0) \in l_0$, 从而

$$\alpha(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subseteq l_0 \subset A$$

我们得 $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset H$. □

定义: 拓扑空间 (X, τ) 关于等价关系 $\sim$ 的一个等价类, 也称为 X 的一个道路连通分支. □

定理5.4: 每个拓扑空间 (X, τ) 可唯一分解为它的全部道路连通分支的无交并:

$$X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \quad \Lambda = X / \sim.$$

对于一点 $x_0 \in X$, 令 A, B 分别是包含它的道路连通分支和连通分支, 则有 $A \subseteq B$ □

例5: 对于例4中的连通空间 $X = A \cup B$, 它的道路连通分支是 A, B , 其中 B 不是一个闭子空间.

1.5.4 局部连通性和局部道路连通性

定义: 已知拓扑空间 (X, τ) .

1) X 称为局部连通空间, 如果对于 X 中的每点 $x \in X$ 以及它的一个邻域 U , 存在 x 的一个连通邻域 V , 满足 $x \in V \subseteq U$.

2) X 称为局部道路连通空间, 如果对于 X 中的每点 $x \in X$ 以及它的一个邻域 U , 存在 x 的一个道路连通的邻域 V , 满足 $x \in V \subseteq U$.

例6. 需要注意的是

连通 $\not\Rightarrow$ 局部连通

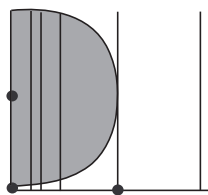
道路连通 $\Rightarrow$ 局部道路连通

考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 中的下述子空间

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots; 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

$$B = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1\}$$

并令 $X := A \cup B$:



则有

1) X 道路连通: 对于任意 $(x, y) \in X$, 存在从 (x, y) 到 $(0, 0)$ 的一条道路 $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$.

2) X 不局部道路连通: 取 $\left(0, \frac{1}{2}\right) \in X$, 并令

$$U = \left\{ (x, y) \in X, d\left((x, y), \left(0, \frac{1}{2}\right)\right) < \frac{1}{2} \right\}.$$

则有 $U = l_0 \sqcup l_1 \sqcup l_2 \sqcup \cdots$, 它是无穷多个道路连通分支的并集。

习题1. 设 C 为 X 的连通子空间, 并且 $C \subset A \subset \bar{C}$. 证明 A 也是 X 的连通子空间.

下面的习题2-3用到介值定理 (命题3)

习题2. 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = 0$.

习题3 (1维Brouwer不动点定理): 设 $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ 连续. 存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = c$. **提示:** 如果 $f(-1) = -1$ 或 $f(1) = 1$, 结论已经成立. 下设 $f(1) < 1$, $f(-1) > -1$. 引入辅助函数 $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. 则有 $g(1) \cdot g(-1) < 0$.

习题4. 证明拓扑空间 X 连通的充要条件是 X 的每个非空真子空间有非空的边界。

习题5. 设 X 是一个拓扑空间, $A \subset X$ 是连通子空间, $B \subseteq X$ 既开又闭. 证明若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 $A \subseteq B$.

习题6. 设 X 是一个拓扑空间, $A \subset X$ 是连通子空间, $B \subseteq X$ 既开又闭. 证明 $A \subseteq B$, 或 $A \subseteq X - B$.

习题7. 证明每个开集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的连通分支可数.

习题8. 证明 n 维球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, d(x, x) = 1\}$ 道路连通.

习题9. 设 $C \subset \mathbb{R}^2$ 是一个可数集. 证明补空间 $\mathbb{R}^2 - C$ 道路连通.

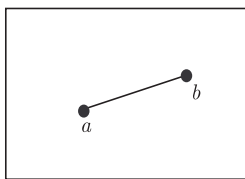
习题10. 令 $A = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2, s, t \in \mathbb{Q}\}$ 是平面中全体有理点的集合. 证明它的补空间 $\mathbb{R}^2 - A$ 道路连通.

定义: 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间 Ω 称为**凸子空间**, 如果对于任意两点 $a, b \in \Omega$, 它们之间的连线位于 Ω .

补注: 空集也是凸集.

在 $\mathbb{R}^n$ 中, $a, b \in \mathbb{R}^n$ 之间线段的参数方程是

$$\alpha(t) = tb + (1-t)a, \quad t \in [0, 1].$$



习题11. 证明.

- 1) 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集是道路连通空间;
- 2) 设 $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ 是凸子空间, 则 $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 也是凸子空间.

习题12. 考虑 n 元二次多项式函数

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i^2$$

其中的系数 $a_i > 0$. 设 $r > 0$ 是一个正实数, 证明

$$\Omega(f, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq r\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸子空间.

(提示: 方程 $f(x) = r$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个椭球面, $\Omega(f, r)$ 是该椭球面所界的闭椭球体).

习题13. 考虑 n 元一次多项式函数

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum a_i x_i,$$

其中的系数 a_i 不全为 0. 对于一个实数 $r \in \mathbb{R}$, 令

$$\Omega^+(f, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \geq r\}$$

$$\Omega^0(f, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = r\}$$

$$\Omega^-(f, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq r\}$$

证明 $\Omega^+, \Omega^0, \Omega^- \subseteq \mathbb{R}^n$ 是凸子空间.

提示: $\Omega^0(f, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一张超平面, Ω^+, Ω^- 位于它的两侧.

习题13. 证明局部连通空间中的开子空间局部连通.