

微分方程习题课

2026 年 3 月 11 日

问题 1. Exercise 1 求以下微分方程的通解

(1) $y' = \frac{1}{(x+y)^2}$

(2) $y' = 1 + xe^y$

(3) $y' - \cos x \sin^2 y = \frac{1}{2} \sin 2y$

(4) $(ye^x + 2e^x + y^2)dx + (e^x + 2xy)dy = 0$

(5) $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$

(6) $(xy^2 + x^3y)dx + (y^3 - x^4)dy = 0$

解答. (1) 令 $u = x + y$, $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$, 于是原式可化为

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u^2} \iff \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) du = dx$$

积分后得到

$$u - \arctan u = x + C$$

即

$$y - \arctan(x + y) = C'$$

(2) 两边同乘 e^{-y} , 于是

$$e^{-y}y' = e^{-y} + x \iff \frac{d(e^{-y})}{dx} - e^{-y} = x$$

然后就是解线性方程。

(3) 两边同时除以 $\sin^2 y$, 有

$$\frac{y'}{\sin^2 y} - \cos x = \cot y \implies \frac{d(\cot y)}{dx} + \cot y = -\cos x$$

两边乘以 e^x ,

$$\frac{d(e^x \cot y)}{dx} = -e^x \cos x$$

积分可得

$$e^x \cot y + \frac{1}{2}e^x (\cos x + \sin x) = C.$$

(4) $(ye^x + 2e^x + y^2)dx + (e^x + 2xy)dy = 0$ 是恰当方程。

$$d(ye^x + 2e^x + xy^2) = 0.$$

(5) 先给一个定理:

定理 1. 考虑方程 $Pdy + Qdx = 0$, 如果 $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ 只是 x 的函数, 则

$$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^x G(t)dt}$$

是该方程的一个积分因子。其中 $G(x) = \frac{P_y - Q_x}{Q}$.

若 $\frac{Q_x - P_y}{P}$ 只是 y 的函数, 则

$$\mu(x) = e^{\int_{y_0}^y H(s)ds}$$

是积分因子, 其中 $H(x) = \frac{Q_x - P_y}{P}$.

代入发现, 本题

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{3x^2 + 2x + 3y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 3$$

所以 $\mu(x) = e^{3x}$ 是一个积分因子, 两边同乘 $\mu(x)$, 有

$$e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3)dx + e^{3x}(x^2 + y^2)dy = 0$$

观察可得:

$$\begin{aligned}(2xye^{3x} + 3x^2ye^{3x})dx + x^2e^{3x}dy &= d(x^2ye^{3x}) \\ y^3e^{3x}dx + y^2e^{3x}dy &= d\left(\frac{1}{3}y^3e^{3x}\right)\end{aligned}$$

所以方程的解为

$$e^{3x}\left(x^2y + \frac{1}{3}y^3\right) = C.$$

(6) 改写 $(xy^2 + x^3y)dx + (y^3 - x^4)dy = 0$ 变成

$$y^2(xdx + ydy) + x^3(ydx - xdy) = 0$$

前面的东西恰好是 $\frac{1}{2}y^2d(x^2 + y^2)$, 后面的除以 y^2 之后是 $x^3d\left(\frac{x}{y}\right)$. 所以原式同除 y^2 , 有

$$\frac{1}{2}d(x^2 + y^2) + x^3d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

使用极坐标换元, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 于是

$$rdr - r^3 \cos^3 \theta \frac{1}{\sin^2 \theta} d\theta = 0$$

分离变量, 有

$$\frac{1}{r^2}dr = \frac{\cos^3 \theta}{\sin^2 \theta}d\theta$$

两边积分, 有

$$-\frac{1}{r} = -\frac{1}{\sin^2 \theta} - \sin^2 \theta + C$$

代入 $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 可得最终答案。

问题 2. Exercise 2

设 f 和 g 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数且当 $x \neq 0$ 时 $xf(x) > 0$, 证明微分方程 $x'' + f(x') + g(x) = 0$ 没有非常数的周期解。

解答. 在方程两边乘上 x' , 于是原式等于

$$x'x'' + x'f(x') + x'g(x) = 0$$

设 $x(t)$ 是周期解, $T > 0$ 是周期, 对上面的方程在 $[0, T]$ 积分可得

$$\frac{x'(T)^2 - x'(0)^2}{2} + \int_0^T x'(t)f(x'(t))dt + \int_{x(0)}^{x(T)} g(t)dt = 0 \implies \int_0^T x'(t)f(x'(t))dt = 0$$

由于 $xf(x) > 0$, 所以 $x'(t) \equiv 0$, 即 $x(t)$ 是常数。

问题 3. Exercise 3

考虑微分方程 $x' = -x + f(t, x)$, 这里 $|f(t, x)| \leq \phi(t)|x|$, ϕ 是连续函数且 $\int_0^{+\infty} \phi(t)dt < +\infty$ 。证明若 $x(t)$ 是该方程的解, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ 。

解答. 首先介绍一个不等式:

引理 1. (*Gronwall* 不等式) 设连续函数 $\alpha(t), \beta(t), \varphi(t)$ 满足

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\varphi(s)ds, \quad \beta \geq 0, t \in [0, T]$$

则

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)e^{\int_s^t \beta(r)dr}ds$$

且当 α 递增时,

$$\varphi(t) \leq \alpha(t)e^{\int_0^t \beta(s)ds}.$$

$$\begin{aligned} x' &= -x + f(t, x) \\ \implies (e^t x)' &= e^t f(t, x(t)) \\ \implies e^t (x(t) - x(0)) &= \int_0^t e^s f(s, x(s))ds \\ \implies e^t |x(t)| &\leq |x(0)| + \int_0^t e^s |x(s)|\phi(s)ds \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式知,

$$e^t |x(t)| \leq |x(0)| e^{\int_0^t \phi(s)ds} \leq |x(0)| e^{\int_0^\infty \phi(s)ds}$$

这就得到了 $e^t x(t)$ 有界, 进而 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。

定理 2. (积分因子存在性定理) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是开区域, f 和 g 是 D 上光滑函数, $f'(u_0, v_0) + g^2(u_0, v_0) \neq 0$, 则 $\exists (u_0, v_0)$ 的邻域 D 和 U 上的光滑函数 λ 和 k , 使得

$$dk(u, v) = \lambda(u, v)(f(u, v)du + g(u, v)dv), \quad \lambda \neq 0$$

证明. 不妨设 $g(u_0, v_0) \neq 0$,

$$f(u, v) du + g(u, v) dv = 0 \implies \frac{dv}{du} = -\frac{f(u, v)}{g(u, v)}.$$

则存在 x_0 的邻域 I 和 y_0 的邻域 J , 使得在 $I \times J$ 上 $g \neq 0$. 考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{dv}{du} = -\frac{f(u, v)}{g(u, v)} \\ v(u_0) = k \end{cases} \quad \forall k \in J, \text{ 在 } I \text{ 上有解}$$

$v = v(u, k)$ 是 u 和 k 的函数,

$$v(u_0, k) = k \implies \left. \frac{\partial v}{\partial k} \right|_{u=u_0} = 1.$$

考虑映射 $\varphi: I \times J \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} u \\ k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v(u, k) \end{pmatrix}$, 那么

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial k} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{g}{f} & \frac{\partial v}{\partial k} \end{pmatrix}$$

由反函数定理, φ 局部可逆, 于是

$$D^{-1}\varphi = \left(\frac{\partial v}{\partial k} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial k} & 0 \\ \frac{g}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

所以

$$\frac{\partial k}{\partial u} = \left(\frac{\partial v}{\partial k} \right)^{-1} \frac{f}{g} \frac{\partial k}{\partial v}$$

所以

$$dk = \left(\frac{\partial v}{\partial k} g \right)^{-1} (f du + g dv).$$

□