

微分方程习题课的补充题

2026 年 6 月 18 日

问题 1. n 维波动方程的解

问题 2. 证明初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div}(a(x) \nabla u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \ a(x) > 0 \\ u = f, \ u_t = g & \text{in } \Omega \times \{0\} \\ u = h & \text{in } \partial\Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

至多有一个解。

问题 3. 问题 5. 考虑单位区间 $[0, 1]$ 上带周期边界条件的热方程：

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \partial_{xx} u(t, x) = 0, & \forall t > 0, \forall x \in (0, 1), \\ u(t, 0) = u(t, 1), & \forall t > 0, \\ \partial_x u(t, 0) = \partial_x u(t, 1), & \forall t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

(1). 写出 $L^2([0, 1])$ 的一组标准正交基，不需要验证。证明二阶导数算子 $f \mapsto f''$ ，其定义域为

$$\mathcal{F} := \{f \in H^2([0, 1]) : f(0) = f(1), f'(0) = f'(1)\} \subset L^2([0, 1]),$$

是一个自伴算子。

(2). 回忆：热方程(1)的基本解是指定义在 $(0, \infty) \times [0, 1] \times [0, 1]$ 上的函数 $h(t, x, y)$ ，满足：

(a) 对任意 $y \in [0, 1]$ ，函数 $(t, x) \mapsto h(t, x, y)$ 是方程(1)的一个解；

(b) 对任意 $x \in [0, 1]$ ，当 $t \rightarrow 0$ 时， $h(t, x, y) \rightarrow \delta_x$ 弱收敛。也就是说，对于任意满足 $\varphi(0) = \varphi(1)$ 的连续函数 φ ，都有

$$\int_0^1 h(t, x, y) \varphi(y) dy \rightarrow \varphi(x), \quad t \rightarrow 0.$$

求热方程(1)的基本解 $h(t, x, y)$ ，并验证它满足条件 (a) 和 (b)。

(3). 对每个固定的 $t > 0$ ，基本解 $h(t, x, y)$ 在哪里取得最大值？也就是说，对于哪些 $x, y \in [0, 1]$ ， h 取得最大值？

当 $t \rightarrow \infty$ 时，关于 $h(t, x, y)$ 可以说些什么？

最后，证明当 $t > 0$ 很小时，

$$h(t, x, y) \sim t^{-1/2} \exp\left(-\frac{d(x, y)^2}{t}\right),$$

其中

$$d(x, y) := \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}.$$

也就是说, 存在常数 $A, B, C, D > 0$, 使得对所有 $t \in (0, 1)$ 与 $x, y \in [0, 1]$, 都有

$$\frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{Bd(x,y)^2}{t}} \leq h(t, x, y) \leq \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-\frac{Dd(x,y)^2}{t}}.$$

提示: 本题有多种解法。你可以使用如下事实: 高斯函数

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)$$

是实直线上的热方程基本解。根据解法不同, Poisson 求和公式也可能有用。

问题 4. (刘维尔定理) 1. 设 u 在 $\mathbb{R}^n$ 中调和且有上(下)界, 证明 $u = \text{常数}$ 。

2. 设 $u \in C(\overline{B} \setminus \{0\})$ 且在 $B \setminus \{0\}$ 中调和, $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$, 若 $u|_{\partial B} \geq 0$ 且 u 有下界, 则 $u \geq 0$ 在 $B \setminus \{0\}$ 上。

问题 5. 补充题: $u \in C(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} u \Delta \varphi = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 那么 u 调和。

问题 6. 补充题: $\partial B(0, 1) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 是右半圆, Γ_2 是左半圆, Γ_1, Γ_2 是 $\partial B(0, 1)$ 的开子集。若 $u|_{\Gamma_1} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0$, 并且 u 调和, 那么 $u \equiv 0$ 。

问题 7. 若 $u|_{\Gamma_1} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = 0$, 并且 u 调和, 那么 $u \equiv 0$ 。