

微分方程与动力系统选讲： 从传染病、振荡电路、行星轨道到 Lorenz 混沌

基于 Hirsch–Smale–Devaney 第三版 Chapter 11–14讲义修订版：含核验说明、口播稿与 MATLAB 作

2026 年 5 月 25 日

目录

使用说明	3
对上一版讲稿的核验与本版修订	3
1 总主线：为什么选这四个模型	4
2 SIR 传染病模型：从传播到阈值	4
2.1 背景：为什么感染项是 SI	4
2.2 零线与阈值	5
2.3 第一积分：不显式求解，也能知道相轨道	6
2.4 SIRS：免疫会消失时会发生什么	7
2.5 本节口播稿	8
3 van der Pol 方程与 Hopf 分岔：平衡点如何生出振荡	9
3.1 从电路到 Lienard 方程	9
3.2 能量视角：为什么会自己振荡	9
3.3 唯一吸引周期轨道	10
3.4 Poincare 映射思想	11
3.5 Hopf 分岔：从静止到振荡	12
3.6 本节口播稿	14
4 Kepler 第一定律：从牛顿方程到圆锥曲线	14
4.1 牛顿第二定律与保守系统	14
4.2 中心力场与角动量	14
4.3 牛顿中心力系统	15
4.4 核心替换： $W = 1/r$	16
4.5 圆锥曲线方程	17

4.6 本节口播稿	18
5 Lorenz 吸引子：确定性系统中的混沌	18
5.1 为什么要进入三维	18
5.2 Lorenz 系统	19
5.3 平衡点与对称性	19
5.4 敏感依赖：差一点，长期差很多	20
5.5 从三维流到 Poincare 映射	22
5.6 混沌的三个性质	23
5.7 本节口播稿	24
6 整场汇报的串联稿	24
开场口播稿	24
SIR 部分口播稿	24
van der Pol / Hopf 部分口播稿	25
Kepler 部分口播稿	25
Lorenz 部分口播稿	26
结尾口播稿	26
7 图像与 MATLAB 文件说明	26
参考文献	27

使用说明

这份讲义是给课堂汇报直接使用的版本。它不是逐节复述 Chapter 11–14，而是选出四个最适合讲清楚、讲好看的主题：SIR 传染病模型，van der Pol 方程与 Hopf 分岔，Kepler 第一定律，Lorenz 吸引子。每一部分都分成四层：背景问题，模型与公式，图像解释，最后给一段可以直接照着讲的口播稿。

讲法安排. 若汇报时间约 20 分钟，建议安排为：开场 1 分钟，SIR 4 分钟，van der Pol/Hopf 5 分钟，Kepler 4 分钟，Lorenz 5 分钟，结尾 1 分钟。若汇报时间约 30 分钟，可把 SIRS 模型、Poincare 映射、Kepler 的变量替换，以及 Lorenz 的几何模型多讲一些。

口播提示. 这份讲义中的“口播提示”不是严格证明，而是汇报时可以说给听众听的话。正式讲的时候可以适当放松语气，但数学公式部分要保持准确。

对上一版讲稿的核验与本版修订

我对上一版讲稿做了四方面核验。

第一，核心模型与教材相符。SIR 模型、SIRS 模型的阈值 ν/β 、第一积分 $I + S - (\nu/\beta) \log S$ 、van der Pol 方程的唯一吸引周期轨道、Hopf 分岔中 $f_\mu(x) = x^3 - \mu x$ 、Kepler 推导中的 $W = 1/r$ ，以及 Lorenz 模型的三条混沌性质，均与教材 Chapter 11–14 对应内容一致。

第二，上一版有几个地方需要更严谨。本版已经修正或加了提醒：

- (1) SIRS 模型中，地方病平衡点是渐近稳定的；但若要说明所有轨道都趋向它，需要排除闭轨道，教材本身也提醒这一步不能只靠相图直觉。
- (2) Poincare–Bendixson 定理不能简单说成“二维系统只有平衡点或周期轨道”。严格说，若一个平面轨道的 ω -极限集非空、紧、且不含平衡点，则它是一条周期轨道；若含有平衡点，结构可能更复杂，但仍不是 Lorenz 型奇怪吸引子。
- (3) Kepler 第一定律中，能量分类默认角动量 $\ell \neq 0$ ，并且轨道为物理上允许的非碰撞轨道。
- (4) Lorenz 章节中，教材严格证明混沌性质的是 Lorenz 的几何模型或 Poincare 映射模型，而不是在短篇幅内完整证明原始 Lorenz 微分方程的全部性质。

第三，本版增强了口语化解释。每个主题都加入了“可以直接讲”的段落，尤其是 SIR 阈值、van der Pol 能量补偿、Kepler 推导链、Lorenz 敏感依赖这些地方。

第四，本版补充了更多图像。新版 MATLAB 文件会生成 19 张图，比上一版更适合汇报展示，包括 SIRS 相图、van der Pol 零线、能量平衡、Hopf 分岔图、Kepler 有效势、Lorenz 时间序列和 Poincare 截面等。

1 总主线：为什么选这四个模型

教材第 11–14 章的共同目标，是说明非线性微分方程如何进入具体科学问题。第 11 章进入生物模型，第 12 章进入电路振荡，第 13 章进入经典力学，第 14 章进入三维混沌系统。若汇报时间有限，最忌讳把目录从头念到尾。更好的做法是选取少数模型，把模型背后的动力系统思想讲清楚。

主题	对应章节	适合汇报的原因
SIR 传染病模型	Chapter 11.1	背景直观；可用零线和阈值说明感染人数为何先增后减。
van der Pol / Hopf	Chapter 12.3–12.4	展示极限环和分岔；是“平衡点生出周期运动”的典型例子。
Kepler 第一定律	Chapter 13.3–13.6	经典而有力量；展示微分方程如何推出行星轨道是圆锥曲线。
Lorenz 吸引子	Chapter 14.1–14.5	视觉冲击强；说明确定性系统也可能长期不可预测。

这四个模型可以形成一条完整叙事线：

传播阈值 $\implies$ 稳定振荡 $\implies$ 守恒轨道 $\implies$ 混沌吸引子。

换句话说，它们分别展示了非线性系统的四类长期行为：趋向平衡线，趋向极限环，沿守恒曲线运动，以及被吸引到奇怪吸引子上。

口播提示。 我今天不想把四章平均讲一遍，因为那样很容易变成目录介绍。我选了四个模型，它们分别代表生物、电路、力学和混沌。我的主线是：微分方程不只是求显式解，它更重要的作用是帮助我们理解系统的长期行为。

2 SIR 传染病模型：从传播到阈值

2.1 背景：为什么感染项是 SI

设一个封闭群体中总人口近似不变。我们把人群分为三类：易感者 $S(t)$ ，感染者 $I(t)$ ，康复者 $R(t)$ 。这里 t 是时间，三个量可以表示人数，也可以表示人口比例。参数 $\beta > 0$ 表示传播强度，参数 $\nu > 0$ 表示康复速率。

SIR 模型的基本建模假设是：新感染的产生需要易感者与感染者接触。若混合足够均匀，则单位时间内的接触机会与 SI 成正比。于是易感者减少项为 $-\beta SI$ ，感染者增加项为 $+\beta SI$ 。另一方面，感染者以速率 νI 康复。

因此得到三维系统

$$S' = -\beta SI, \quad I' = \beta SI - \nu I, \quad R' = \nu I. \quad (1)$$

定义 2.1 (总人口守恒). 令 $\tau = S + I + R$ 。由 (1) 得

$$(S + I + R)' = -\beta SI + (\beta SI - \nu I) + \nu I = 0.$$

因此 τ 沿解保持不变。

由于 $R = \tau - S - I$ ，分析 S, I 就足够。因此系统降为

$$S' = -\beta SI, \quad I' = I(\beta S - \nu). \quad (2)$$

口播提示. 这个模型最重要的地方不是公式复杂，而是每一项都能解释。 $-\beta SI$ 的意思是：感染不是由一个人单独决定的，而是由“易感者和感染者相遇”决定的。所以它自然是一个乘积项。

2.2 零线与阈值

定义 2.2 (零线). 对二维系统 $S' = F(S, I)$ 、 $I' = G(S, I)$ ，集合 $F(S, I) = 0$ 称为 S -零线，集合 $G(S, I) = 0$ 称为 I -零线。零线把相平面分成若干区域，使我们能够判断轨道方向。

对 SIR 系统 (2)，有

$$S' = 0 \iff S = 0 \text{ 或 } I = 0,$$

并且

$$I' = 0 \iff I = 0 \text{ 或 } S = \frac{\nu}{\beta}.$$

因此直线

$$S = \frac{\nu}{\beta} \quad (3)$$

是判断感染人数增减的关键线。教材称 ν/β 为疾病的 threshold level。

命题 2.1 (感染峰值判据). 假设 $I(t) > 0$ 。若 $S(t) > \nu/\beta$ ，则 $I'(t) > 0$ ，感染人数增加；若 $S(t) < \nu/\beta$ ，则 $I'(t) < 0$ ，感染人数减少。因此感染人数达到峰值的时刻满足

$$S(t) = \frac{\nu}{\beta}.$$

证明. 由 (2)， $I' = I(\beta S - \nu)$ 。在 $I > 0$ 的区域， I' 的符号与 $\beta S - \nu$ 的符号相同。结论立即得到。□

严格说. 这里的阈值 ν/β 不是说“感染者人数超过某个数就爆发”，而是说：当易感者数量 S 高于这个阈值时，感染人数 I 正在增加；当 S 低于这个阈值时，感染人数 I 正在减少。

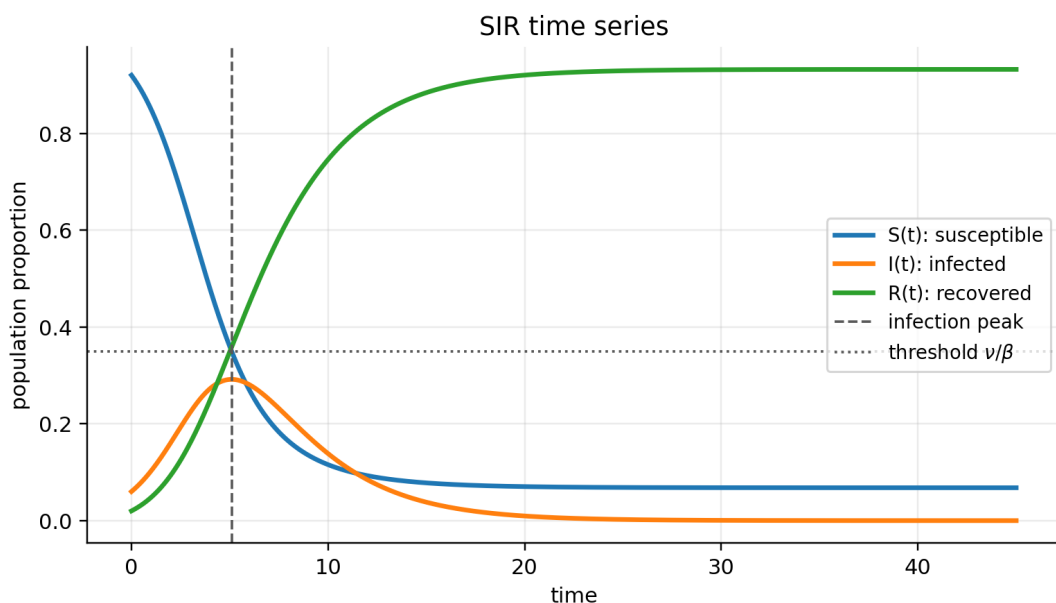


图 1: SIR 模型的时间曲线。感染峰值出现在轨道穿过阈值线 $S = \nu/\beta$ 的时刻附近。

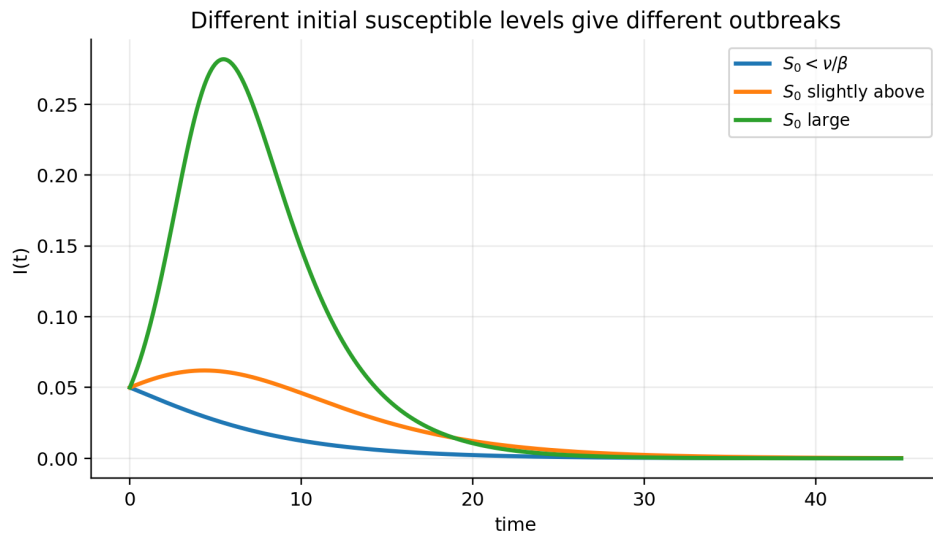


图 2: 不同初始易感者比例导致不同规模的感染过程。若初始 S_0 低于阈值, 感染人数一开始便下降。

口播提示. 这一点很适合讲给听众听: 感染人数什么时候开始下降? 不是靠猜, 而是看 S 有没有降到 ν/β 以下。换句话说, 疫情的拐点是由易感者数量控制的。

2.3 第一积分: 不显式求解, 也能知道相轨道

SIR 系统通常不直接求 $S(t)$ 、 $I(t)$ 的显式表达式, 但可以求 I 关于 S 的轨道关系。若 $S > 0$ 、 $I > 0$, 则沿解有

$$\frac{dI}{dS} = \frac{I'}{S'} = \frac{\beta SI - \nu I}{-\beta SI} = -1 + \frac{\nu}{\beta S}.$$

对 S 积分, 得到

$$I = -S + \frac{\nu}{\beta} \log S + C.$$

也就是说, 函数

$$H(S, I) = I + S - \frac{\nu}{\beta} \log S \quad (4)$$

沿每条解曲线保持常数。

命题 2.2 (SIR 轨道的几何图像). 在 $S > 0$ 、 $I > 0$ 区域中, 每条 SIR 轨道都位于 (4) 的一条水平集上。由于 $S' = -\beta SI < 0$, 轨道整体向左运动; 当 $S > \nu/\beta$ 时向上, 当 $S < \nu/\beta$ 时向下。

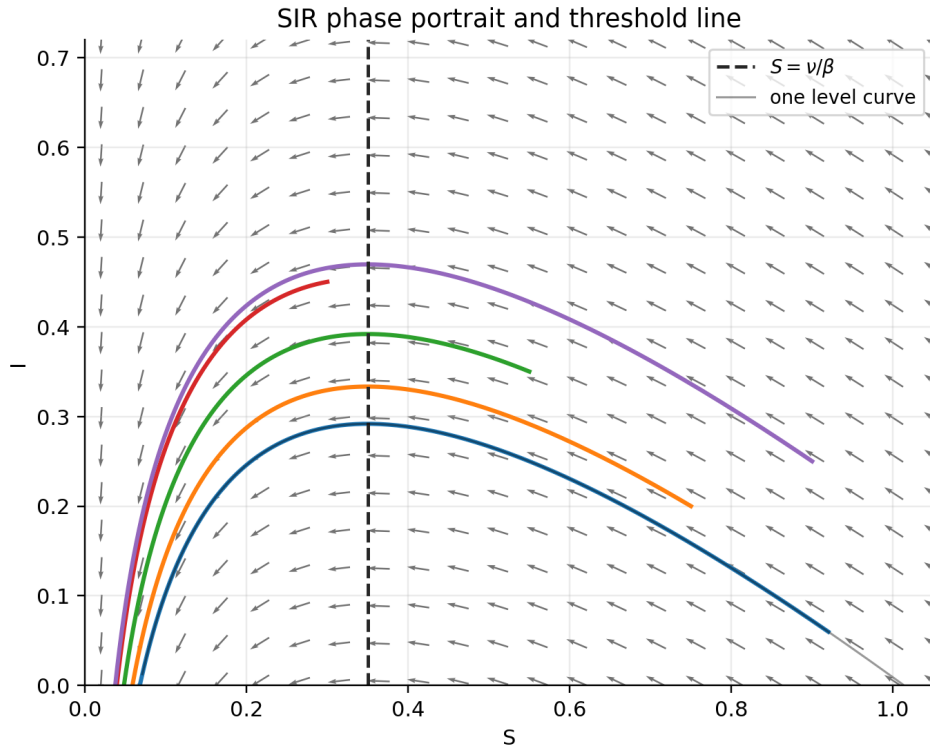


图 3: SIR 模型相图。轨道穿过竖直阈值线 $S = \nu/\beta$ 后, 感染人数开始下降。

数学要点. 这一节体现了动力系统方法的优势: 即使不写出完整解, 我们仍能知道解的方向、峰值位置、最终趋势。这就是相平面方法的价值。

2.4 SIRS: 免疫会消失时会发生什么

SIR 假设康复者不会再次感染。若康复者可能失去免疫并重新变为易感者, 则得到 SIRS 模型:

$$S' = -\beta SI + \mu R, \quad I' = \beta SI - \nu I, \quad R' = \nu I - \mu R, \quad (5)$$

其中 $\mu > 0$ 是免疫丧失速率。总人口 $\tau = S + I + R$ 仍守恒。消去 $R = \tau - S - I$, 得到二维系统

$$S' = -\beta SI + \mu(\tau - S - I), \quad I' = \beta SI - \nu I. \quad (6)$$

此时平衡点至多有两个: 无病平衡点

$$(\tau, 0),$$

以及地方病平衡点

$$(S^*, I^*) = \left(\frac{\nu}{\beta}, \frac{\mu(\tau - \nu/\beta)}{\nu + \mu} \right). \quad (7)$$

第二个平衡点存在的条件是 $\tau \geq \nu/\beta$ 。当 $\tau = \nu/\beta$ 时, 两平衡点合并, 出现分岔。

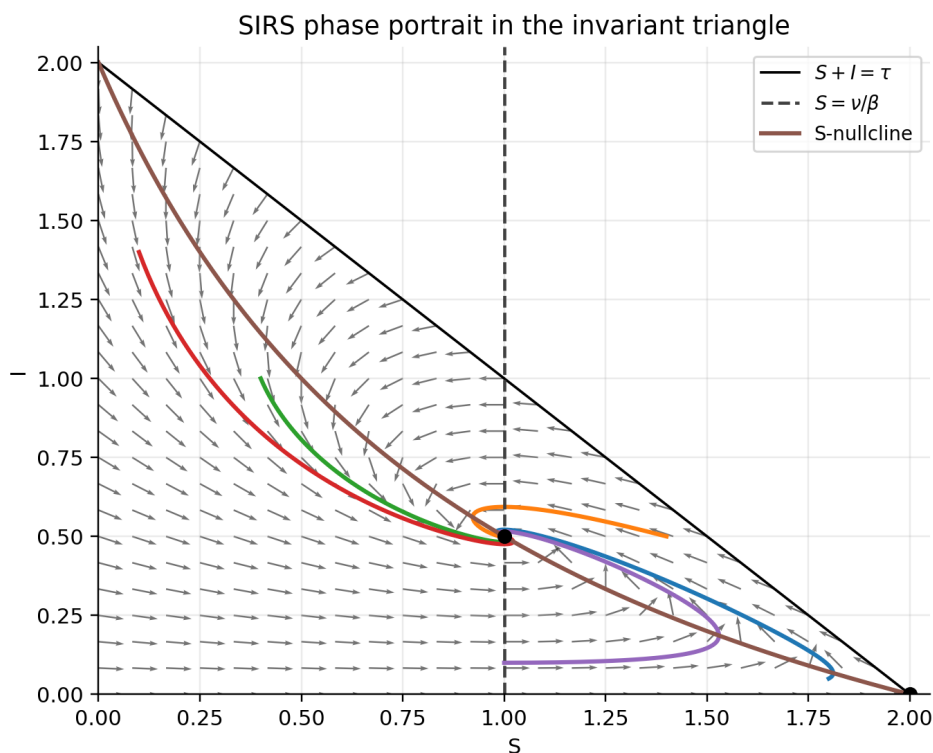


图 4: SIRS 模型在正不变三角形 $S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq \tau$ 中的相图。

线性化矩阵为

$$\begin{pmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S - \mu \\ \beta I & \beta S - \nu \end{pmatrix}.$$

在无病平衡点 $(\tau, 0)$ 处，特征值为 $-\mu$ 和 $\beta\tau - \nu$ 。因此当 $\tau > \nu/\beta$ 时，无病平衡点是鞍点。教材进一步指出，在地方病平衡点处，矩阵迹为负、行列式为正，因此该平衡点渐近稳定。

容易讲错的地方. 不要把相图上“看起来所有轨道都趋向地方病平衡点”直接说成已经严格证明。教材提醒：若要证明全局收敛，还需要排除围绕该平衡点的闭轨道。汇报时可说“相图显示出这种趋势，并且地方病平衡点是局部渐近稳定的”。

2.5 本节口播稿

口播提示. SIR 模型把人群分成易感者、感染者和康复者。新感染项是 βSI ，因为感染来自易感者和感染者的接触；康复项是 νI ，因为感染者按比例康复。三类人数相加为常数，所以三维系统可以降成 (S, I) 的二维系统。关键公式是 $I' = I(\beta S - \nu)$ 。只要还有感染者，感染人数是上升还是下降，只取决于 S 是否大于 ν/β 。所以 $S = \nu/\beta$ 是阈值线。相图中轨道一直向左走，先上升后下降，最后趋向 $I = 0$ 。如果考虑免疫会消失，就得到 SIRS 模型，这时疾病可能形成一个稳定的地方病平衡。这个例子说明，简单的非线性系统已经能解释传播过程中的阈值、峰值和稳态。

3 van der Pol 方程与 Hopf 分岔：平衡点如何生出振荡

3.1 从电路到 Lienard 方程

教材第 12 章从 RLC 电路出发，说明电路也可以写成二维动力系统。在合适变量下，某类非线性电路可以写为

$$x' = y - f(x), \quad y' = -x. \quad (8)$$

这是一类 Lienard 方程。若取

$$f(x) = x^3 - x,$$

则得到 van der Pol 方程

$$x' = y - x^3 + x, \quad y' = -x. \quad (9)$$

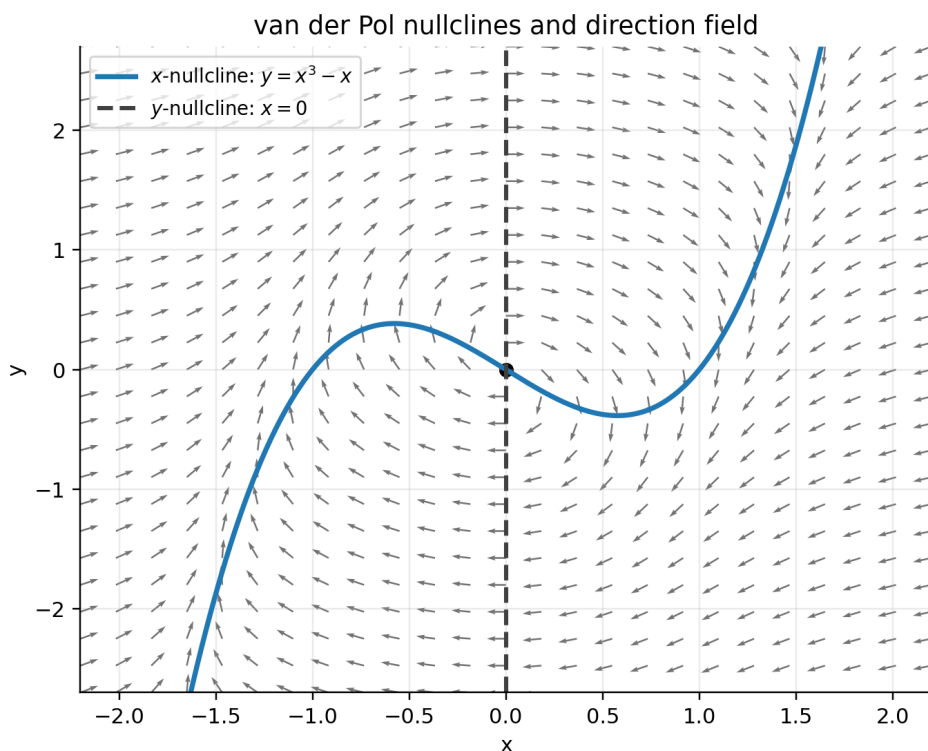


图 5: van der Pol 方程的零线与方向场。 x -零线为 $y = x^3 - x$ ， y -零线为 $x = 0$ 。

口播提示. 如果不想花太多时间讲电路推导，可以这样说：电阻、电感、电容组成的系统本来是一个电路问题，但经过变量选择后，它变成了一个二维微分方程。非线性电阻的性质被压缩进函数 $f(x)$ 里。取 $f(x) = x^3 - x$ ，就得到著名的 van der Pol 方程。

3.2 能量视角：为什么会自己振荡

考虑函数

$$W(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

它可以理解为到原点距离平方的一半，也可以粗略类比为能量。沿一般 Lienard 系统 (8)，有

$$\dot{W} = x(y - f(x)) + y(-x) = -xf(x).$$

若 $xf(x) > 0$ 对 $x \neq 0$ 成立，则 $\dot{W} < 0$ ，轨道不断靠近原点。这对应被动电阻，能量不断耗散。

但对 van der Pol 方程， $f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1)$ ，于是

$$\dot{W} = -x(x^3 - x) = x^2(1 - x^2). \quad (10)$$

因此

$$|x| < 1 \Rightarrow \dot{W} > 0, \quad |x| > 1 \Rightarrow \dot{W} < 0.$$

小振幅时系统补充能量，大振幅时系统消耗能量。于是轨道既不会塌到原点，也不会无限发散，而是趋向一个稳定周期运动。

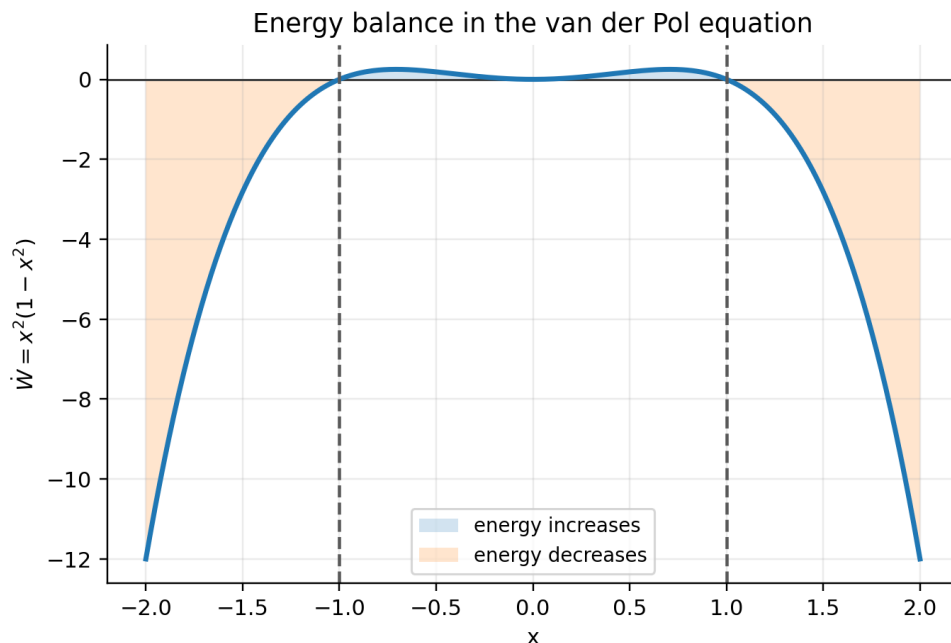


图 6: van der Pol 方程的能量平衡。小振幅时能量增加，大振幅时能量减少。

数学要点. van der Pol 振荡不是“外力强迫振荡”，而是“自激振荡”。系统内部的非线性机制让小振幅变大，让大振幅变小，最后自动筛选出一个稳定的振幅。

3.3 唯一吸引周期轨道

系统 (9) 的平衡点满足

$$y - x^3 + x = 0, \quad x = 0,$$

所以唯一平衡点是原点。线性化矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

特征值满足 $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ ，其实部为 $1/2 > 0$ ，故原点是螺旋源。

教材证明了如下重要结论。

定理 3.1 (van der Pol 方程的周期解). *van der Pol* 系统 (9) 存在唯一非平凡周期解；除原点外的所有其他解都趋向这条周期解。

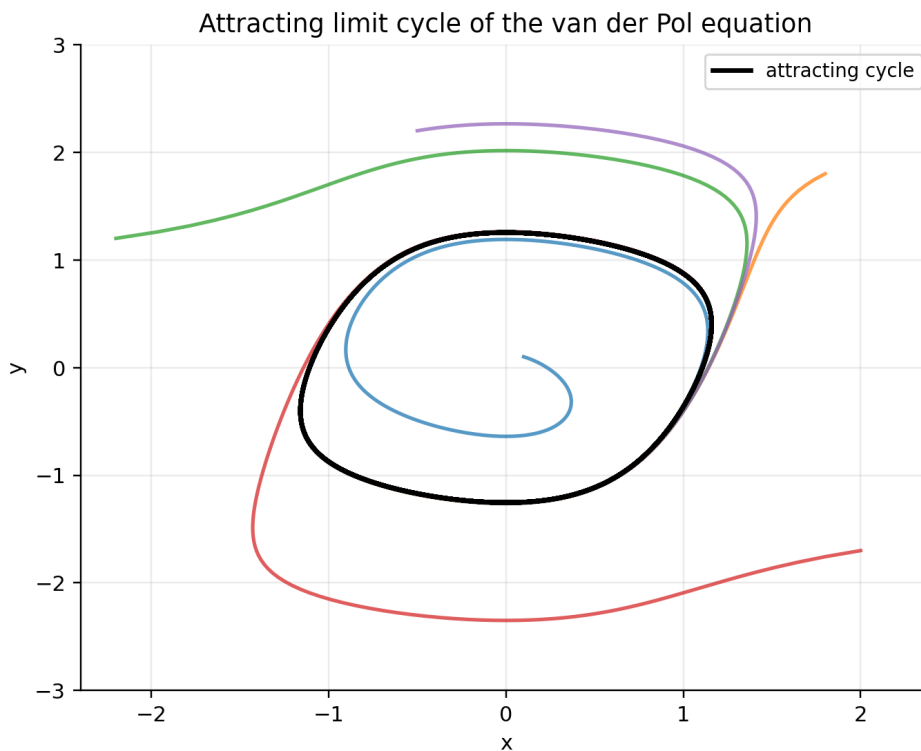


图 7: van der Pol 方程的稳定极限环。不同初值的轨道最终趋向同一周期轨道。

这个定理可从三层理解：

- (1) 原点是源，附近轨道被推出去。
- (2) 远处能量耗散，轨道被拉回来。
- (3) 平面系统中，轨道被困在环形区域内，又不能趋向原点，于是出现周期轨道；教材进一步用 Poincare 映射证明它唯一且吸引。

3.4 Poincare 映射思想

取正 y -轴半直线

$$v^+ = \{(0, y) : y > 0\}.$$

从 $(0, y_0)$ 出发，轨道绕原点顺时针旋转，并再次回到 v^+ 。定义

$$P(y_0) = \text{第一次返回 } v^+ \text{ 时的 } y \text{ 坐标}.$$

这就是 Poincare 映射。连续时间系统中的周期轨道，对应离散映射的固定点：

$$P(y_0) = y_0.$$

教材通过分析半返回映射和能量差，证明这个固定点唯一。这正是“连续流问题 $\rightarrow$ 截面返回映射问题”的典型做法。

口播提示. 这里可以不用讲完整证明，但一定要把思想讲出来：找周期轨道很难，因为它是连续时间中的闭合轨道；但如果取一个截面，每次轨道回来记一次位置，那么周期轨道就变成了返回映射的固定点。这和后面 Lorenz 混沌的处理方法是同一类思想。

3.5 Hopf 分岔：从静止到振荡

引入参数 μ ，考虑

$$x' = y - x^3 + \mu x, \quad y' = -x. \quad (11)$$

这对应 $f_\mu(x) = x^3 - \mu x$ 。当 $\mu = 1$ 时，回到 van der Pol 系统。

平衡点仍只有原点。线性化矩阵为

$$A_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

特征值为

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4} \right).$$

当 $-1 \leq \mu < 0$ 时，特征值实部为负，原点为螺旋汇；当 $0 < \mu \leq 1$ 时，特征值实部为正，原点为螺旋源。

对 (11)，同样计算

$$\dot{W} = x(y - x^3 + \mu x) + y(-x) = x^2(\mu - x^2).$$

当 $\mu < 0$ 时， $\dot{W} < 0$ 对 $x \neq 0$ 成立，轨道趋向原点。当 $\mu > 0$ 时，小振幅附近能量被放大，大振幅处能量被消耗，系统产生稳定周期轨道。

定理 3.2 (Hopf 分岔的具体表现). 对系统 (11)，当 μ 从负值穿过 0 变为正值时，原点由稳定变为不稳定，并诞生一条吸引的非平凡周期轨道 γ_μ 。当 $\mu \rightarrow 0^+$ 时， γ_μ 收缩到原点。

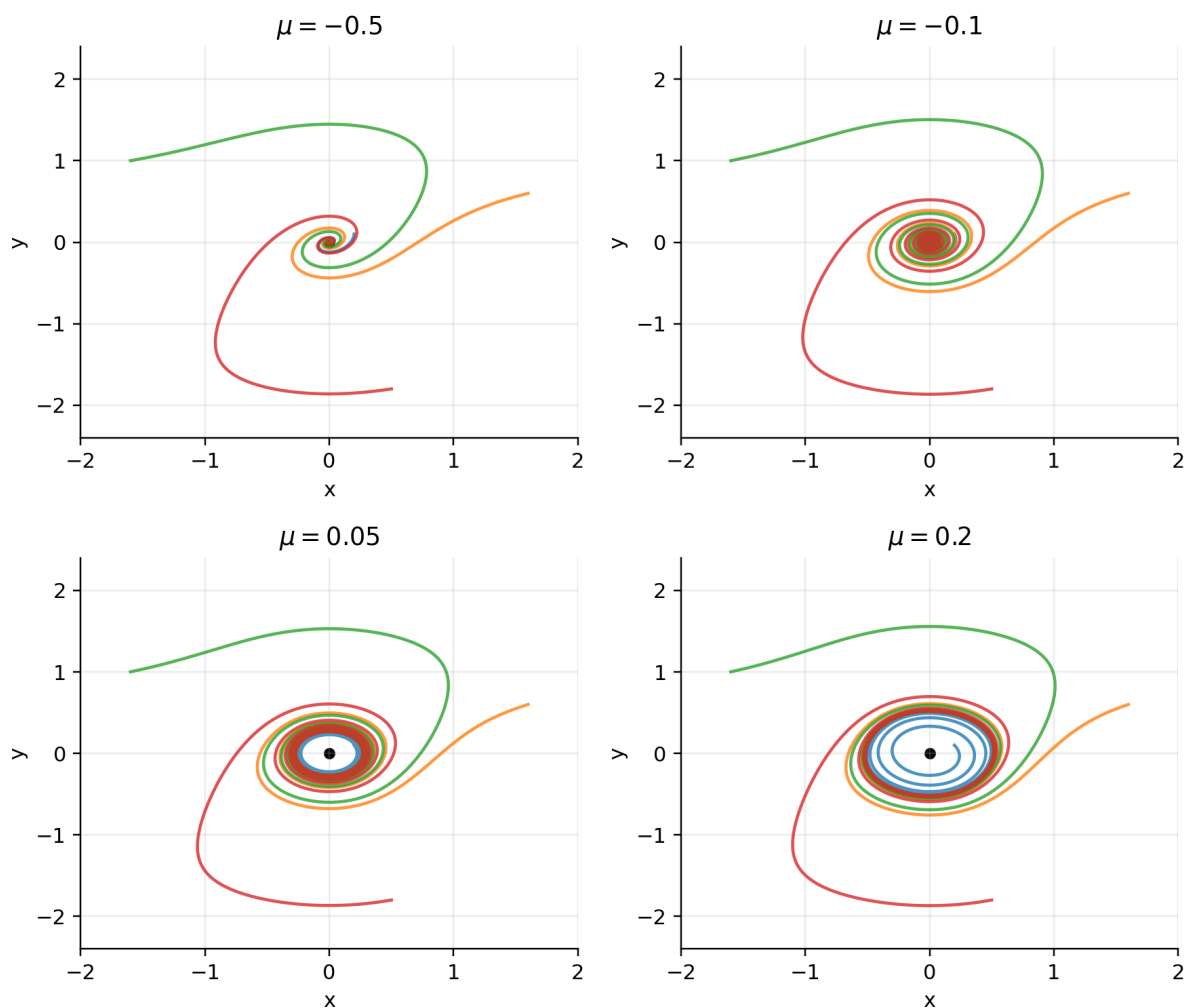


图 8: Hopf 分岔前后的相图。 $\mu < 0$ 时轨道趋向原点； $\mu > 0$ 时原点失稳并出现稳定周期轨道。

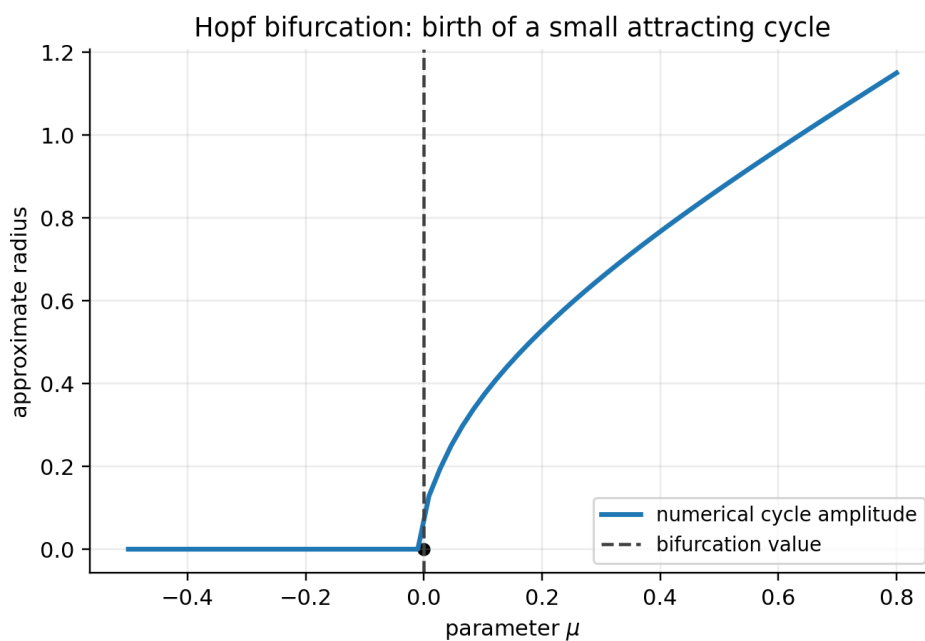


图 9: Hopf 分岔图像示意。正 μ 侧出现吸引周期轨道；图中半径为数值估计，不是精确解析公式。

容易讲错的地方. 这张分岔图只能作为定性和数值示意。不要说图中的振幅公式就是精确公式。严格结论是: $\mu > 0$ 时存在唯一吸引周期解, 并且 $\gamma_\mu \rightarrow 0$ 当 $\mu \rightarrow 0^+$ 。

3.6 本节口播稿

口播提示. 第二个模型来自电路。对于普通被动电阻, 能量一直耗散, 所以电路最后安静下来。但 van der Pol 方程不一样。我们取 $W = (x^2 + y^2)/2$, 计算得到 $\dot{W} = x^2(1 - x^2)$ 。这说明小振幅会被放大, 大振幅会被压制。于是系统最后不是停在原点, 而是自动进入一个稳定周期轨道。接着引入参数 μ , 当 $\mu < 0$ 时, 原点稳定, 电路是“死”的; 当 $\mu > 0$ 时, 原点失稳, 电路“活”起来, 出现稳定振荡。这个从稳定平衡到稳定周期运动的出生过程, 就是 Hopf 分岔。

4 Kepler 第一定律: 从牛顿方程到圆锥曲线

4.1 牛顿第二定律与保守系统

设粒子在 $\mathbb{R}^n$ 中运动, 位置为 $X(t)$, 速度为 $V(t) = X'(t)$ 。牛顿第二定律写为

$$mX'' = F(X). \quad (12)$$

若力场来自势能 U , 即

$$F(X) = -\text{grad } U(X),$$

则称其为保守系统。定义总能量

$$E = \frac{1}{2}m|V|^2 + U(X).$$

定理 4.1 (能量守恒). 在保守系统中, 总能量 E 沿任意解曲线保持常数。

证明. 沿解计算

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m|V|^2 + U(X) \right) = mV \cdot V' + \text{grad } U(X) \cdot X'.$$

由 $mV' = -\text{grad } U(X)$ 和 $X' = V$, 右端为

$$V \cdot (-\text{grad } U(X)) + \text{grad } U(X) \cdot V = 0.$$

故总能量守恒。 □

4.2 中心力场与角动量

中心力场指力总是沿粒子与原点连线方向。三维中角动量定义为

$$L = m(X \times V).$$

教材证明, 在中心力场中 L 沿解保持常数。其几何意义是: 运动始终位于某个固定平面中。因此可把问题化为平面极坐标问题。

在平面极坐标中, 设

$$X = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

若质量归一化为 $m = 1$, 角动量为

$$\ell = r^2 \theta'. \quad (13)$$

命题 4.1 (等面积定律). 令 $A(t)$ 表示位置向量从初始时刻到 t 时刻扫过的面积, 则

$$A'(t) = \frac{1}{2}r(t)^2\theta'(t) = \frac{1}{2}\ell.$$

因此, 中心力场中的粒子在相等时间内扫过相等面积。

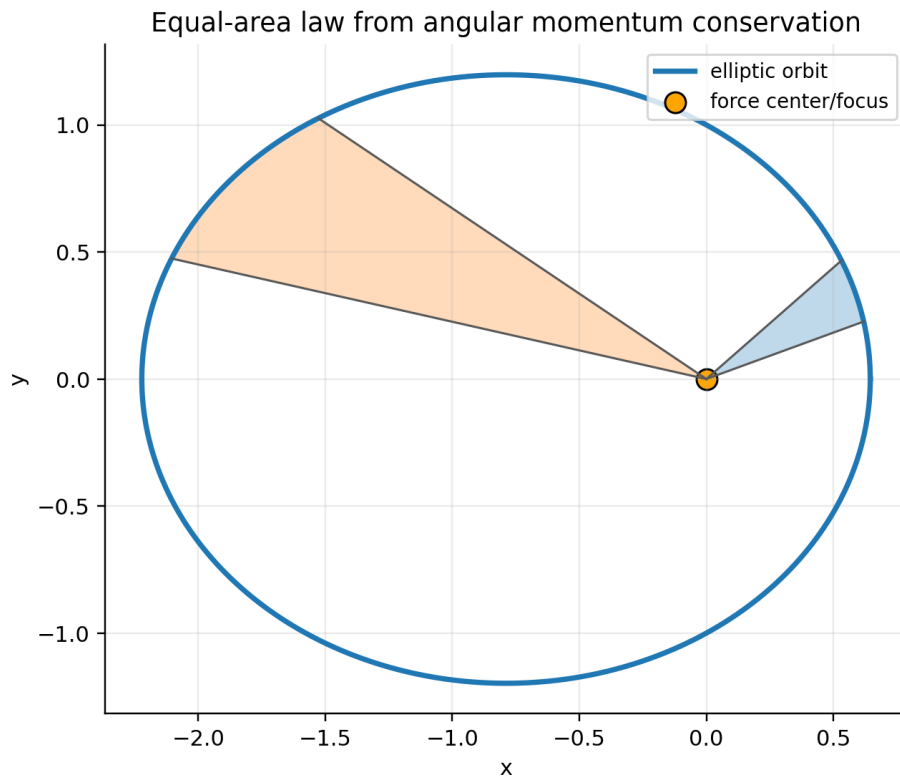


图 10: 角动量守恒给出等面积定律。图中两个扇形区域对应相等时间内扫过的面积。

口播提示. 这一页可以讲得稍微慢一点。角动量守恒不是一个干巴巴的公式, 它直接告诉我们: 行星和太阳连线在相等时间内扫过相等面积。这就是 Kepler 第二定律。接下来, 我们再用能量守恒推出 Kepler 第一定律。

4.3 牛顿中心力系统

万有引力方程在归一化后可写为

$$X'' = -\frac{X}{|X|^3}. \quad (14)$$

相应势能为

$$U(X) = -\frac{1}{|X|} = -\frac{1}{r}.$$

因此总能量为

$$E = \frac{1}{2}((r')^2 + (r\theta')^2) - \frac{1}{r}. \quad (15)$$

角动量为

$$\ell = r^2\theta'.$$

若 $\ell = 0$, 运动是径向碰撞或弹出。下面讨论 $\ell \neq 0$ 的轨道。

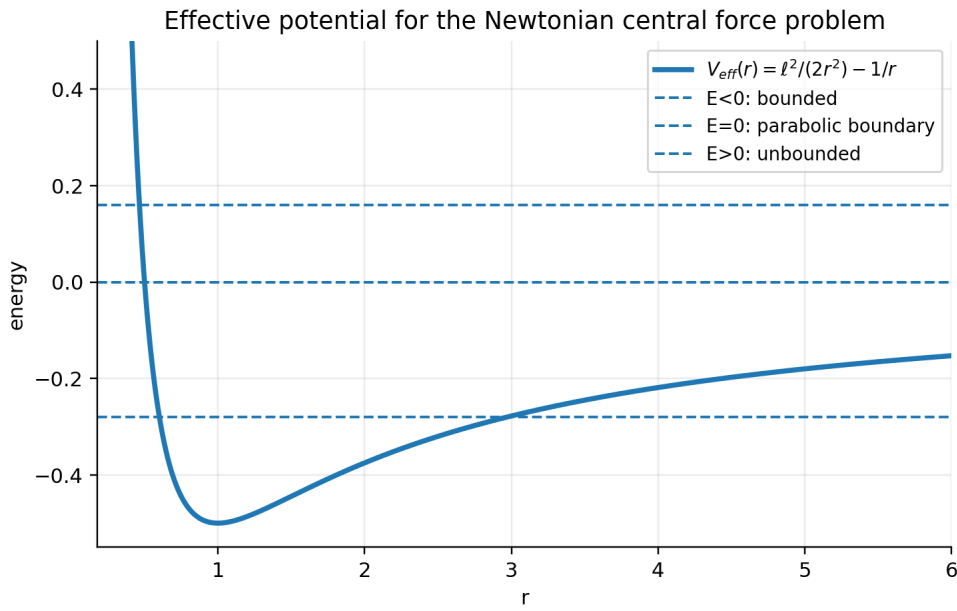


图 11: 牛顿中心力问题的有效势。负能量对应束缚运动，零能量是抛物逃逸的临界，正能量对应非束缚运动。

4.4 核心替换: $W = 1/r$

由于 $\ell = r^2\theta' \neq 0$ ，角度 θ 沿轨道单调变化。因此可把 r 看成 θ 的函数。令

$$W(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}.$$

由教材推导，动能可写成

$$K = \frac{\ell^2}{2} \left[\left(\frac{dW}{d\theta} \right)^2 + W^2 \right]. \quad (16)$$

又因为 $U = -W$ ，所以 $K = E - U = E + W$ 。代入 (16) 得

$$\left(\frac{dW}{d\theta} \right)^2 + W^2 = \frac{2}{\ell^2} (E + W). \quad (17)$$

对 θ 微分，得到

$$\frac{d^2W}{d\theta^2} + W = \frac{1}{\ell^2}. \quad (18)$$

数学要点. 这是 Kepler 推导的灵魂：原本看起来复杂的引力轨道，在 $W = 1/r$ 和角变量 θ 下，变成了一个带常数项的线性二阶方程。

Logical chain of the Kepler derivation

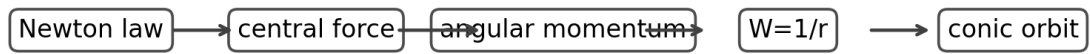


图 12: Kepler 推导链：牛顿方程经过守恒量和变量替换，最终给出圆锥曲线。

4.5 圆锥曲线方程

方程 (18) 的通解为

$$W(\theta) = \frac{1}{\ell^2} + A \cos \theta + B \sin \theta.$$

通过旋转坐标轴，可写成

$$W(\theta) = \frac{1}{\ell^2} + C \cos \theta.$$

结合能量关系，可得

$$C = \frac{1}{\ell^2} \sqrt{1 + 2E\ell^2}.$$

于是

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\ell^2} \left(1 + \sqrt{1 + 2E\ell^2} \cos \theta \right). \quad (19)$$

这正是圆锥曲线的极坐标方程

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\kappa} (1 + e \cos \theta),$$

其中离心率为

$$e = \sqrt{1 + 2E\ell^2}. \quad (20)$$

定理 4.2 (Kepler 第一定律). 对牛顿中心力系统 (14)，若轨道具有非零角动量 $\ell \neq 0$ ，则其构型空间轨道是以力心为焦点的圆锥曲线。若 $E < 0$ ，轨道为椭圆；若 $E = 0$ ，轨道为抛物线；若 $E > 0$ ，轨道为双曲线。

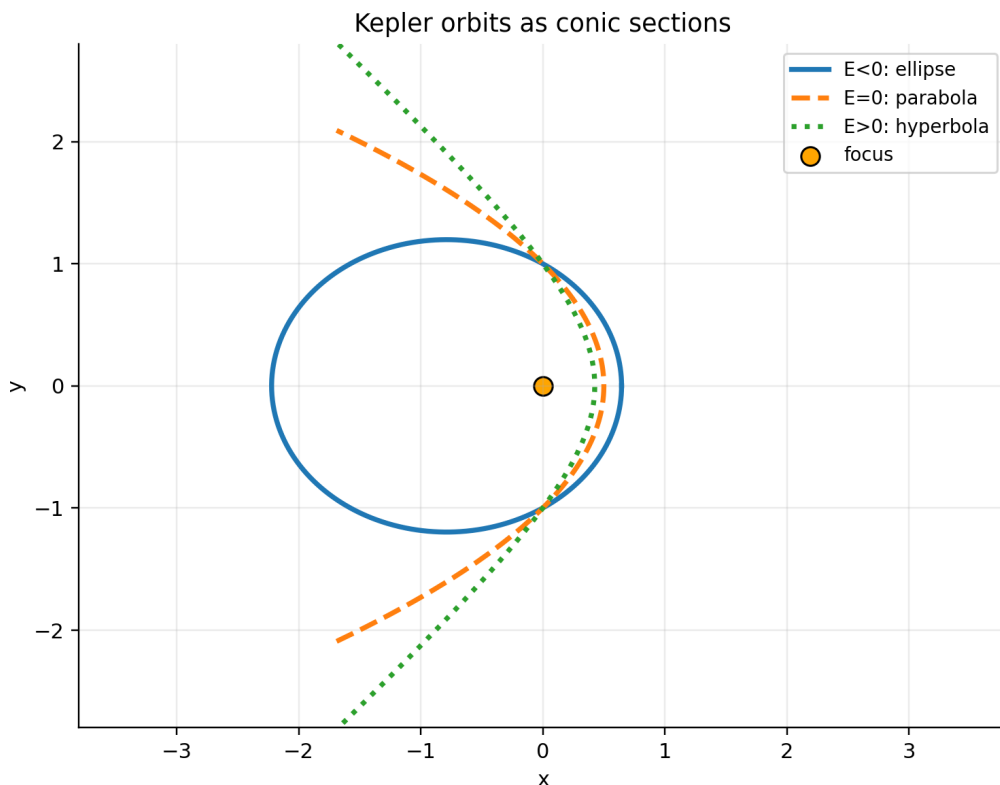


图 13: Kepler 轨道的圆锥曲线分类。能量符号决定离心率大小，从而决定椭圆、抛物线或双曲线。

容易讲错的地方. 汇报时不要说“所有负能量都自动是椭圆且没有条件”。这里默认讨论非碰撞、非零角动量轨道。 $\ell = 0$ 时是径向碰撞或弹出解，不属于椭圆轨道的情形。

4.6 本节口播稿

口播提示. Kepler 这部分的故事很经典：从牛顿第二定律出发，如果力来自势能，就有能量守恒；如果力是中心力，就有角动量守恒。角动量守恒先给出等面积定律。然后在万有引力 $X'' = -X/|X|^3$ 中，令 $W = 1/r$ ，把轨道问题改写成 $W'' + W = 1/\ell^2$ 。这个方程的解是常数加余弦，因此 $1/r$ 是 $1 + e \cos \theta$ 的形式。于是轨道就是圆锥曲线：负能量是椭圆，零能量是抛物线，正能量是双曲线。这里最打动人的地方是：一个微分方程，配合两个守恒量，就推出了行星轨道的形状。

5 Lorenz 吸引子：确定性系统中的混沌

5.1 为什么要进入三维

前面许多例子都是二维系统。二维系统有 Poincaré–Bendixson 定理的限制。

严格说. Poincaré–Bendixson 定理的一个常用表述是：若平面系统某条轨道的 ω -极限集非空、紧、且不含平衡点，则该极限集是一条周期轨道。它并不是说二维系统的所有极限行为都只有平衡点或周期轨道，但它确实排除了 Lorenz 吸引子那样的典型奇怪吸引子。

因此，若要看到真正的混沌吸引子，就必须进入三维及更高维系统。Lorenz 系统是最著名的三维混沌微分方程之一。

5.2 Lorenz 系统

Lorenz 系统为

$$x' = \sigma(y - x), \quad y' = rx - y - xz, \quad z' = xy - bz, \quad (21)$$

其中 $\sigma > 0$ 、 $r > 0$ 、 $b > 0$ 。教材采用的经典参数是

$$\sigma = 10, \quad b = \frac{8}{3}, \quad r = 28.$$

该系统来自大气对流模型的简化。变量 x, y, z 可粗略理解为对流强度、水平温差和垂直温差的低维近似。

Lorenz attractor, sigma=10, b=8/3, r=28

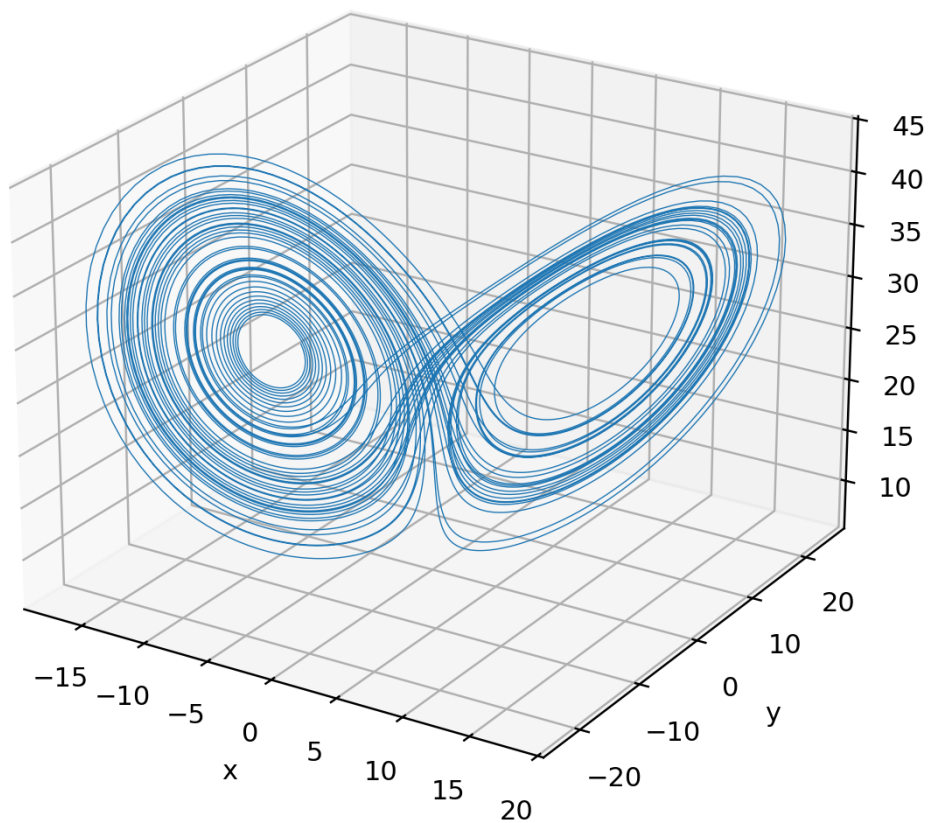


图 14: 经典参数下的 Lorenz 吸引子。轨道长期被困在一个复杂的蝴蝶形集合附近。

口播提示. Lorenz 系统最震撼的地方在于，它没有随机项，右边全是确定公式，但长期行为却看起来很难预测。这正是“确定性不等于可预测性”的一个经典例子。

5.3 平衡点与对称性

平衡点满足

$$\sigma(y - x) = 0, \quad rx - y - xz = 0, \quad xy - bz = 0.$$

原点 $(0, 0, 0)$ 总是平衡点。当 $r > 1$ 时，还有两个非零平衡点

$$Q_{\pm} = \left(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1 \right). \quad (22)$$

当 $r = 1$ 时，两个非零平衡点从原点分出，形成类似叉形分岔的图像。

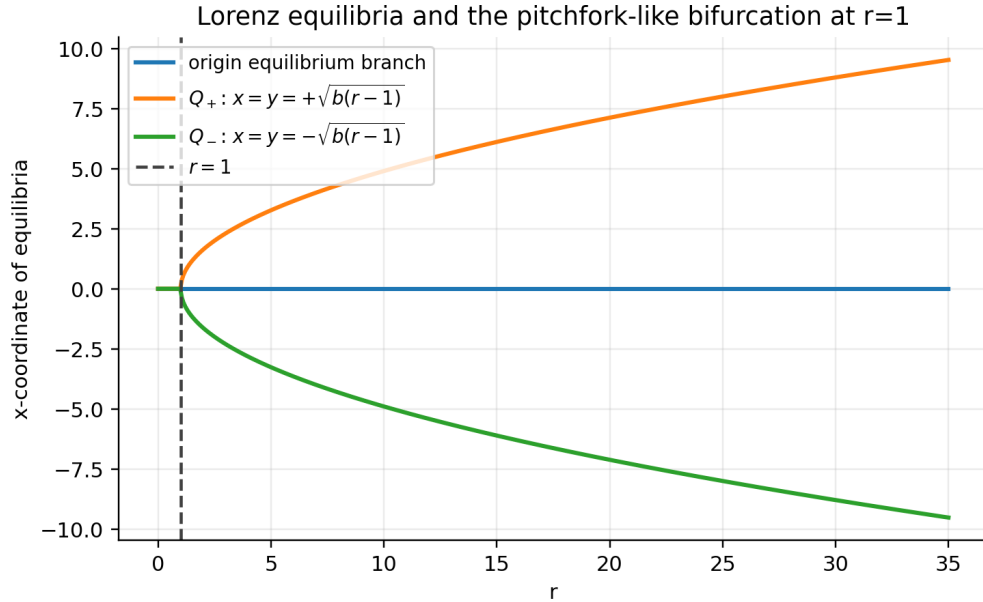


图 15: Lorenz 系统平衡点随参数 r 的变化。 $r = 1$ 后出现两个非零平衡点。

Lorenz 系统还有一个对称性。令

$$S(x, y, z) = (-x, -y, z).$$

若 $(x(t), y(t), z(t))$ 是解，则 $(-x(t), -y(t), z(t))$ 也是解。这解释了吸引子左右两个叶片的对称形状。

5.4 敏感依赖：差一点，长期差很多

取两个非常接近的初值，例如

$$P_1 = (0, 2, 0), \quad P_2 = (0, 2.01, 0).$$

短时间内两条轨道几乎重合，但一段时间后可能绕向吸引子的不同叶片，坐标函数明显分离。

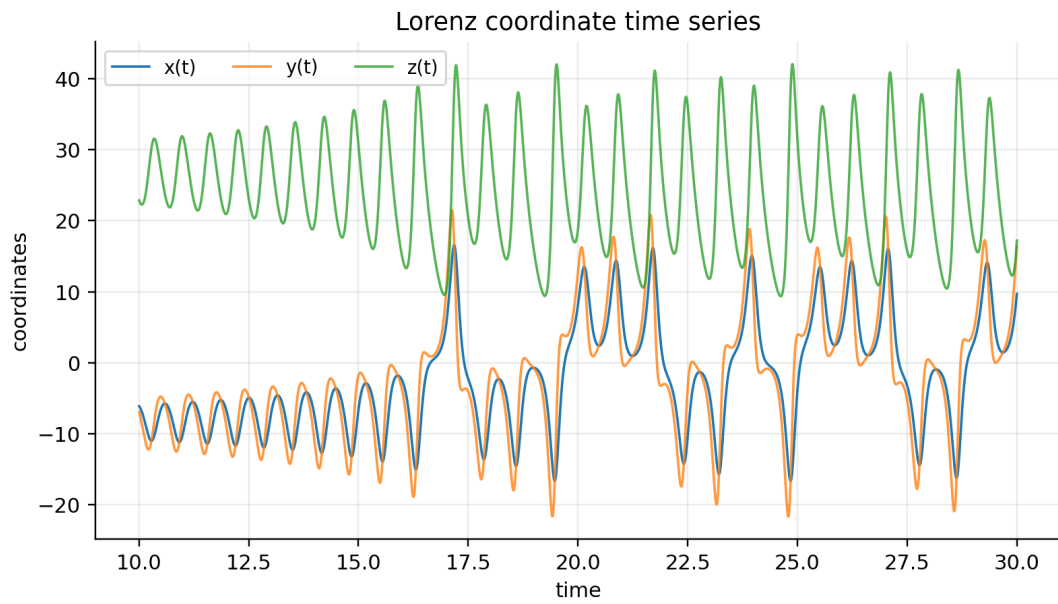


图 16: Lorenz 系统三个坐标随时间的变化。曲线没有趋向平衡，也不是简单周期。

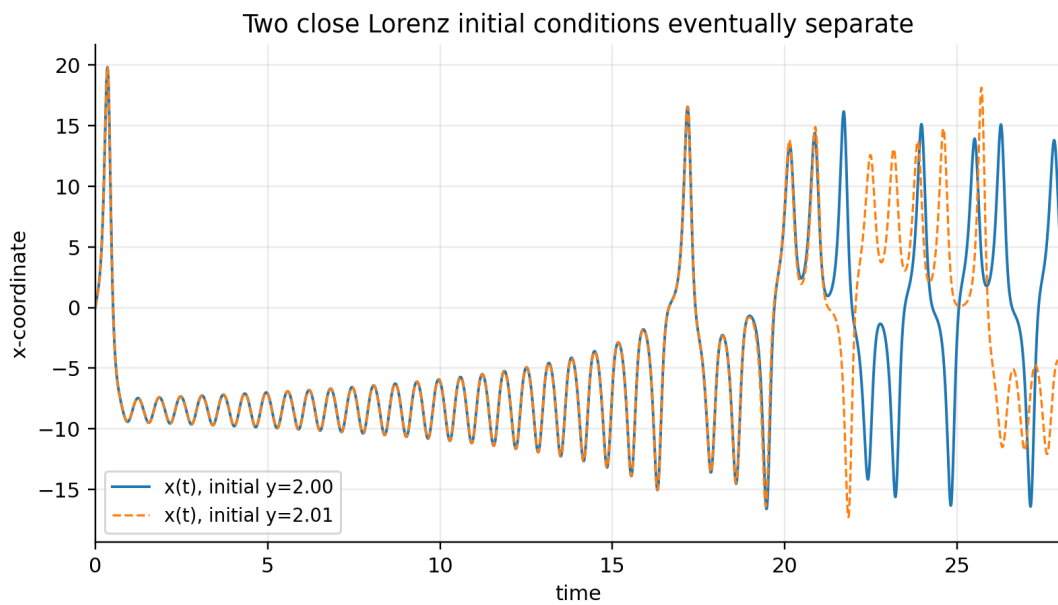


图 17: 两个初值极近的 Lorenz 解，短时间相近，之后明显分离。

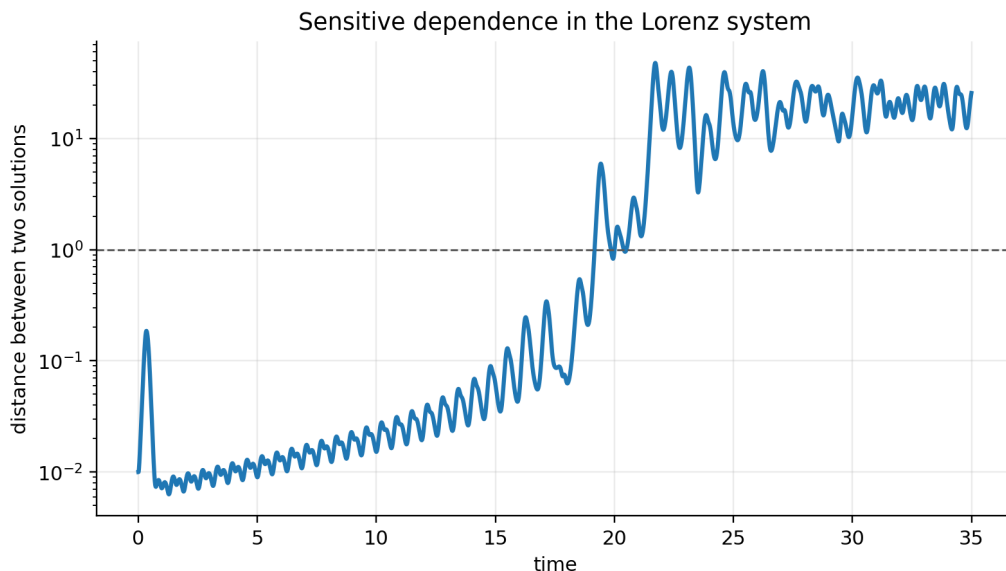


图 18: 两条 Lorenz 轨道之间的距离随时间增长。纵轴采用对数尺度。

定义 5.1 (对初值敏感依赖). 非正式地说, 若任取一个初始点附近任意小的邻域, 都能找到另一个初始点, 使两条轨道在未来某个时刻分离到可观测距离, 则称系统具有对初值敏感依赖。

口播提示. 这一页适合作为汇报的高潮。我们不是说方程是随机的, 而是说方程会放大初始误差。现实中初始测量永远不可能无限精确, 所以长期预测会非常困难。这就是 Lorenz 系统背后的“蝴蝶效应”思想。

5.5 从三维流到 Poincare 映射

直接分析三维连续流很困难。教材采用的关键策略是: 取一个横截面 Σ , 让轨道不断穿过这个截面。每一次回到截面时, 记录当前位置。这样得到 Poincare 映射

$$\Phi : \Sigma \rightarrow \Sigma.$$

连续时间系统的长期问题转化为离散映射的迭代问题。

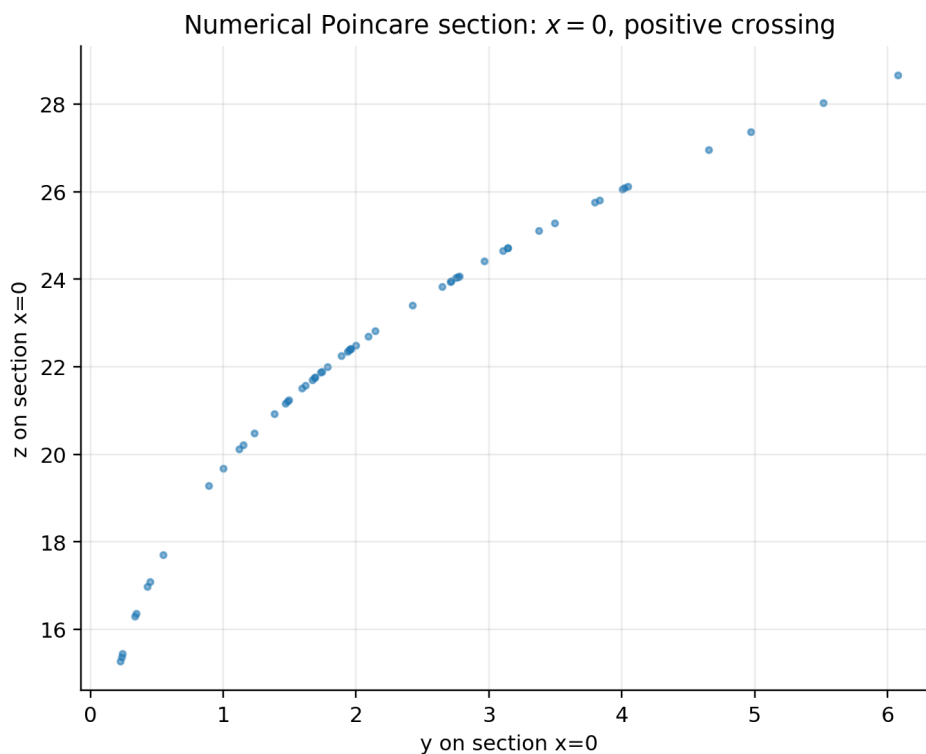


图 19: Lorenz 系统的数值 Poincare 截面示意。图中取 $x = 0$ 且 $x' > 0$ 的穿越点。

在 Lorenz 几何模型中，映射具有两个关键机制：收缩、展开、折叠。一个方向被压缩，使轨道被吸引到薄集上；另一个方向被展开，使微小差异被放大；折叠机制使轨道不断回到有界区域内。这三个机制合在一起，产生奇怪吸引子。

数学要点. Lorenz 的几何机制可以用一句话概括：收缩让轨道被困住，展开让初值误差变大，折叠让轨道反复返回。困住、放大、折叠，就是混沌吸引子的直观来源。

5.6 混沌的三个性质

教材最后对 Lorenz 的几何模型给出如下结论。

定理 5.1 (Lorenz 模型的动力学性质). Lorenz 模型的 *Poincare* 映射限制在吸引子 A 上具有以下性质：

- (1) 对初始条件敏感依赖；
- (2) 周期点在 A 中稠密；
- (3) 在 A 上具有传递性。

满足这些性质的映射称为 *chaotic*。

这三条性质分别对应三种直观含义。

- (1) 敏感依赖：长期行为对初始误差极其敏感。
- (2) 周期点稠密：看似混乱的集合中到处藏有周期轨道。

(3) 传递性：存在轨道能从一个小区域跑到另一个小区域附近，说明吸引子整体被充分混合。

严格说。汇报时应说“教材通过 Lorenz 的几何模型解释和证明混沌性质”，不要说“我们已经严格证明了原始 Lorenz 方程的全部混沌性质”。这二者在数学严格性上不是同一层次。

5.7 本节口播稿

口播提示。前面我们主要看二维系统。二维系统受到 Poincaré–Bendixson 定理限制，很难出现真正复杂的奇怪吸引子。Lorenz 系统是三维系统，形式看起来并不长： $x' = \sigma(y-x)$ 、 $y' = rx-y-xz$ 、 $z' = xy-bz$ 。但在经典参数下，它的轨道既不收敛到平衡点，也不是普通周期轨道，而是被吸引到一个蝴蝶形的复杂集合上。两个初值只差一点点，短时间几乎一样，长期却会明显分离。这说明确定性方程也可能长期不可预测。教材进一步用 Poincaré 映射和几何模型说明：Lorenz 吸引子的复杂性来自收缩、展开和折叠，并表现为敏感依赖、周期点稠密和传递性。

6 整场汇报的串联稿

下面是一版完整口播稿。正式汇报时可以根据时间删减。

开场

今天我汇报的是 Hirsch–Smale–Devaney 这本书第 11 到第 14 章中的几个代表性模型。这几章的共同主题是：微分方程不仅是求解公式的工具，更是理解长期行为的工具。所谓长期行为，可以是趋向平衡，可以是趋向周期轨道，也可以是沿守恒轨道运动，甚至可以在三维系统中形成混沌吸引子。

我选取四个模型：第一个是 SIR 传染病模型，它说明相平面和阈值如何分析疫情传播；第二个是 van der Pol 方程与 Hopf 分岔，它说明非线性系统如何产生稳定振荡；第三个是 Kepler 第一定律，它说明牛顿方程如何推出行星轨道是圆锥曲线；最后是 Lorenz 吸引子，它说明确定性微分方程也会产生对初值极其敏感的混沌行为。

SIR 部分

首先看 SIR 模型。我们把总人口分成三类：易感者 S 、感染者 I 、康复者 R 。感染来自易感者和感染者的接触，所以感染项写成 βSI 。感染者按比例康复，所以康复项写成 νI 。模型为

$$S' = -\beta SI, \quad I' = \beta SI - \nu I, \quad R' = \nu I.$$

三个方程相加得到总人口守恒，因此只需分析 (S, I) 的二维系统。

关键在于

$$I' = I(\beta S - \nu).$$

只要 $I > 0$ ，感染人数是上升还是下降，只取决于 S 是否大于 ν/β 。当 $S > \nu/\beta$ 时，感染人数增加；当 $S < \nu/\beta$ 时，感染人数减少。所以 $S = \nu/\beta$ 是阈值线，也是感染峰值出现的位置。

相图中轨道一直向左，因为 $S' = -\beta SI < 0$ 。轨道在阈值线右侧向上，表示感染人数上升；穿过阈值线后向下，表示感染人数下降。进一步计算还可以得到第一积分

$$I + S - \frac{\nu}{\beta} \log S = \text{constant}.$$

这说明我们不用显式求出 $S(t)$ 、 $I(t)$ ，也能知道相轨道的形状。

如果考虑康复者会失去免疫，就得到 SIRS 模型。此时疾病可能形成一个局部渐近稳定的地方病平衡。这说明一个简单阈值 ν/β 可以控制疫情是消退，还是在群体中长期存在。

van der Pol / Hopf 部分

第二个模型来自电路理论。教材把某类非线性电路化为 Lienard 系统

$$x' = y - f(x), \quad y' = -x.$$

当 $f(x) = x^3 - x$ 时，就是 van der Pol 方程

$$x' = y - x^3 + x, \quad y' = -x.$$

我们用 $W = (x^2 + y^2)/2$ 看它的能量变化。沿轨道有

$$\dot{W} = x^2(1 - x^2).$$

当 $|x| < 1$ 时， $\dot{W} > 0$ ，小振幅被放大；当 $|x| > 1$ 时， $\dot{W} < 0$ ，大振幅被削弱。于是系统既不会停在原点，也不会跑到无穷远，而是趋向一条稳定周期轨道。教材证明，这条非平凡周期轨道唯一，并且吸引所有非零解。

然后加入参数 μ ：

$$x' = y - x^3 + \mu x, \quad y' = -x.$$

线性化矩阵是

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

当 $\mu < 0$ 时，原点是稳定螺旋汇；当 $\mu > 0$ 时，原点变成不稳定螺旋源，并产生稳定周期轨道。这就是 Hopf 分岔。口语化地说， $\mu < 0$ 时电路是“死”的，最后停在零状态； $\mu > 0$ 时电路“活”起来，开始稳定振荡。

Kepler 部分

第三个模型是经典力学。牛顿第二定律写作

$$mX'' = F(X).$$

如果力来自势能 U ，即 $F = -\text{grad } U$ ，则总能量

$$E = \frac{1}{2}m|V|^2 + U(X)$$

守恒。若力是中心力，则角动量

$$L = m(X \times V)$$

守恒。角动量守恒说明运动保持在固定平面内，并且在极坐标中有 $\ell = r^2\theta'$ 。因此面积速度 $A' = \frac{1}{2}r^2\theta'$ 为常数，这就是等面积定律。

对万有引力，归一化方程是

$$X'' = -\frac{X}{|X|^3}.$$

势能为 $-1/r$ ，总能量为

$$E = \frac{1}{2}((r')^2 + (r\theta')^2) - \frac{1}{r}.$$

接下来做关键替换 $W = 1/r$ 。因为 $\ell = r^2\theta' \neq 0$ ，可以把 r 看成 θ 的函数。教材推导得到

$$W'' + W = \frac{1}{\ell^2}.$$

这个方程的解是

$$W(\theta) = \frac{1}{\ell^2} + C \cos \theta.$$

于是

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\ell^2} \left(1 + \sqrt{1 + 2E\ell^2} \cos \theta \right).$$

这正是圆锥曲线的极坐标方程。离心率为 $e = \sqrt{1 + 2E\ell^2}$ 。所以负能量对应椭圆，零能量对应抛物线，正能量对应双曲线。Kepler 第一定律就这样从牛顿微分方程中推出来了。

Lorenz 部分

最后看 Lorenz 系统。二维系统受到 Poincaré–Bendixson 定理限制，很难产生 Lorenz 型奇怪吸引子。因此教材进入三维系统。Lorenz 系统为

$$x' = \sigma(y - x), \quad y' = rx - y - xz, \quad z' = xy - bz.$$

经典参数是 $\sigma = 10$ 、 $b = 8/3$ 、 $r = 28$ 。

这个系统来自大气对流模型的简化。它的轨道既不收敛到一个平衡点，也不是普通周期轨道，而是被吸引到一个复杂的蝴蝶形集合上。这个集合就是 Lorenz 吸引子。

Lorenz 系统最著名的性质是对初值敏感依赖。两个初值 $(0, 2, 0)$ 和 $(0, 2.01, 0)$ 只差一点点，短时间内轨道几乎重合，但后来会明显分离。这说明系统是确定性的，但长期预测对初始误差极其敏感。

教材进一步用几何模型解释这种复杂性。取一个横截面，把三维连续流转化为 Poincaré 映射。这个映射有三个机制：一个方向收缩，一个方向展开，再折叠回来。收缩让轨道被困在吸引子附近，展开放大初始误差，折叠让轨道不断回到有界区域。最终，模型的吸引子上出现敏感依赖、周期点稠密和传递性。教材把满足这些性质的映射称为 chaotic。

结尾

总结一下，四个模型展示了动力系统的四种典型思想。SIR 模型展示阈值和相平面；van der Pol 方程展示极限环和自激振荡；Kepler 问题展示守恒量如何决定轨道形状；Lorenz 系统展示三维非线性系统中的混沌吸引子。它们共同说明：微分方程不只是求解技术，更是一种研究长期行为、稳定性和复杂性的语言。

7 图像与 MATLAB 文件说明

配套 MATLAB 文件为 `selected_ch11_14_figures_revised.m`。运行后会在当前工作目录生成文件夹 `revised_report_figures`，其中包含以下图像。

文件名	内容
<code>sir_time_series_v2.png</code>	SIR 模型中 $S(t), I(t), R(t)$ 的时间曲线。
<code>sir_phase_v2.png</code>	SIR 相图、阈值线与轨道水平集。
<code>sir_threshold_cases_v2.png</code>	不同初始易感者比例下的感染曲线。
<code>sirs_phase_v2.png</code>	SIRS 模型在正不变三角形中的相图。
<code>vdp_nullclines_v2.png</code>	van der Pol 方程零线和方向场。
<code>vdp_limit_cycle_v2.png</code>	van der Pol 稳定极限环。
<code>vdp_energy_balance_v2.png</code>	van der Pol 能量增减区间。
<code>hopf_phase_portraits_v2.png</code>	不同参数 μ 下 Hopf 分岔相图。
<code>hopf_bifurcation_diagram_v2.png</code>	Hopf 分岔图像示意。
<code>kepler_equal_area_v2.png</code>	等面积定律示意。
<code>kepler_effective_potential_v2.png</code>	Newton 中心力问题的有效势。
<code>kepler_conics_v2.png</code>	Kepler 轨道的椭圆、抛物线、双曲线分类。
<code>kepler_logic_chain_v2.png</code>	Kepler 推导逻辑链。
<code>lorenz_attractor_v2.png</code>	Lorenz 吸引子的三维图。
<code>lorenz_time_series_v2.png</code>	Lorenz 三个坐标的时间序列。
<code>lorenz_sensitivity_traces_v2.png</code>	两个相近初值的 $x(t)$ 轨道分离。
<code>lorenz_sensitivity_distance_v2.png</code>	两条 Lorenz 轨道的距离增长。
<code>lorenz_poincare_section_v2.png</code>	Lorenz 系统数值 Poincare 截面。
<code>lorenz_equilibria_bifurcation_v2.png</code>	Lorenz 平衡点随 r 的分岔示意。

参考文献

Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Third Edition, Academic Press, 2013. 本讲义主要依据 Chapter 11–14 的相关内容整理，并根据课堂汇报需要进行了重组、核验和图像化。