

中国科学院大学

试题专用纸

课程编号: B0111009H

课程名称: 微分方程(期中)

任课教师: 范晨捷

注意事项:

1. 考试时间为 105 分钟, 考试方式 闭 卷;
2. 全部答案写在答题纸上;
3. 考试结束后, 请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

本试卷共六道题, 满分为100分。

第一题(15分)

设 $y = y(x, \mu)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + y, \\ y(0) = \mu \end{cases}$$

的解, 计算 $\partial_x y(1, 0)$ 和 $\partial_\mu y(1, 0)$ 。

第二题(15分)

求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = Ay + a(x), \\ y(0) = b, \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

第三题(15分)

- (1) 考虑常微分方程 $y'' - y = 0$, 若此方程的一个解 y 满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$, 我们是否能得出解恒为零, 即 $y(x) \equiv 0$? 证明你的结论。
- (2) 考虑常微分方程 $y'' - (1 + \frac{1}{1+x^2})y = 0$, 若此方程的一个解 y 满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$, 我们是否能得出解恒为零, 即 $y(x) \equiv 0$? 证明你的结论。
- (3) 考虑常微分方程 $y'' - y = \frac{1}{1+x^2}$, 是否存在此方程的一个解 y 满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$? 证明你的结论。

第四题(15分)

证明：微分方程

$$y' = x^2 + y^2$$

的每个解的存在区间均是有界的。

第五题(20分)

叙述并证明常微分方程解对初值的连续依赖性(证明中包含关键步骤即可)。

第六题(20分)

考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x} \sin x - (1 + x^2)y, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

请问是否存在 $\delta > 0$ ，使得当 $|y_0| < \delta$ 时，其相应的解可以定义在整个正实轴（即找 C^1 函数 $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足该初值问题）？证明你的结论。