

微分方程作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

2026 年 6 月 17 日

目录

第一章 第 2 周微分方程作业	3
第二章 第 3 周微分方程作业	8
第三章 第 4 周微分方程作业	15
第四章 第 5 周微分方程作业	21
第五章 第 6 周微分方程作业	30
第六章 第 7 周微分方程作业	38
第七章 第 8 周微分方程作业	43
第八章 第 9 周微分方程作业	49
第九章 第 11 周微分方程作业	55
第十章 第 12 周微分方程作业	67
第十一章 第 13 周微分方程作业	75
第十二章 第 14 周微分方程作业	82
第十三章 第 15 周微分方程作业	95
第十四章 期末考试	107
14.1 常系数 ODE (组), 二阶、齐次 (二阶的一定要会)	107
14.2 波动方程	107
14.3 热方程	107
14.4 位势方程	108
14.5 Green 公式	109

14.6 齐次化原理	109
14.7 初边值问题	109

第一章 第 2 周微分方程作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

课本 15 页 6,8,10。

题目 1.1. 判断下列方程是否为恰当方程，并对恰当方程求解

6. $(ye^x + 2e^x + y^2)dx + (e^x + 2xy)dy = 0$.

8. $(ax^2 + by^2)dx + cxydy = 0$ (a, b 和 c 为常数) .

10. $xf(x^2 + y^2)dx + yf(x^2 + y^2)dy = 0$, 其中 $f(\cdot)$ 是连续可微的.

解答. 6.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x + 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x + 2y$$

所以是恰当方程。经过观察发现，

$$\text{原式} = d(ye^x + 2e^x + xy^2) = 0$$

所以通积分为 $\Phi(x, y) = ye^x + 2e^x + xy^2 = C$ ，所以解为

$$e^x(y + 2) + xy^2 = C.$$

8.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2by, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = cy$$

当 $c = 2b$ 时，他是恰当的，否则不恰当。经过观察发现，

$$\text{原式} = d\left(\frac{1}{3}ax^3 + bxy^2\right) = 0$$

所以方程的解为

$$\frac{1}{3}ax^3 + bxy^2 = C.$$

10.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xyf', \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xyf'$$

所以是恰当方程。他的通积分为

$$\int_{x_0}^x x f(x^2 + y^2) dx + \int_{y_0}^y y f(x_0^2 + y^2) dy = C$$

左边可以化简：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} F(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} F(x_0^2 + y^2) + \frac{1}{2} F(x_0^2 + y^2) - \frac{1}{2} F(x_0^2 + y_0^2) \\ &= \frac{1}{2} F(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} F(x_0^2 + y_0^2) \end{aligned}$$

其中 F 是 f 的其中一个原函数。所以方程的通解为

$$F(x^2 + y^2) = C.$$

第 20 页 2(4), 5

题目 1.2. 2(4). 求解微分方程的初值问题： $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln|x|}{1+y^2}$, $y(1) = 0$.

解答. 这是一个变量分离方程。由于 $1 + y^2 > 0$, 所以原式等价于

$$(1 + y^2) dy - \ln|x| dx = 0$$

通积分为

$$\Phi(x, y) = y + \frac{1}{3}y^3 - (x \ln|x| - x) = C$$

代入 $y(1) = 0$, 有 $C = 1$, 故方程的解为

$$y + \frac{1}{3}y^3 - x \ln|x| + x - 1 = 0.$$

题目 1.3. 5. 设微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(y),$$

其中 $f(y)$ 在 $y = a$ 的某邻域 (例如, 区间 $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$) 内连续, 而且 $f(y) = 0$ 当且仅当 $y = a$, 则在直线 $y = a$ 上的每一点, 方程的解是局部唯一的, 当且仅当瑕积分

$$\left| \int_a^{a \pm \varepsilon} \frac{dy}{f(y)} \right| = +\infty \quad (\text{发散}).$$

解答. “ $\Rightarrow$ ”: 因为 $y = a$ 显然是一个解, 假设他的解是局部唯一的, 所以他只有这一个解, 因此瑕积分显然发散。

“ $\Leftarrow$ ”: 假设他的解不是局部唯一的, 也就是存在非平凡解从 $y(x_0) = a$ 出发, 在 $x_1 > x_0$ 处 $y \neq a$ 。由连续性, 不妨设 $f(y)$ 在 (x_0, x_1) 上大于 0, 则 $y(x)$ 严格递增。分

离变量得

$$\int_a^{y(x)} \frac{du}{f(u)} = x - x_0$$

左边为 ∞ , 右边是有限数, 矛盾! 故不存在这样的 x_1 。也就是解在 x_0 附近恒为常数。

解答. (讲的答案)

第 25 页 7

题目 1.4. 7. 令集合 $H^0 = \{f(x) \mid f \text{ 是以 } 2\pi \text{ 为周期的连续函数}\}$, 易知 H^0 关于实数域构成一个线性空间。对于任意 $f \in H^0$, 定义它的模

$$\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|.$$

证明: H^0 是一个完备的空间 (即巴拿赫 (Banach, 1892—1945) 空间). 利用 (2.40) 式可以在空间 H^0 中定义一个变换 φ , 它把 f 变到 y . 试证: φ 是一个从 H^0 到 H^0 的线性算子, 而且它是有界的; 亦即要证:

(1) 对任何常数 C_1 和 C_2 , 以及任何 $f_1, f_2 \in H^0$, 有

$$\varphi(C_1 f_1 + C_2 f_2) = C_1 \varphi(f_1) + C_2 \varphi(f_2);$$

(2) 对任何 $f \in H^0$, 有

$$\|\varphi(f)\| \leq k \|f\|,$$

其中 $k > 0$ 是常数.

解答. 先证明 H^0 是完备的空间。

设 $\{f_n\}$ 是一列柯西列, 收敛到 f , 且每个 f_n 以 2π 为周期。于是由题, $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m > N$ 时, $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$, 即

$$\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

于是对每个 x , $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, 所以 $\{f_n(x)\}$ 是柯西列, 收敛到 $f(x)$.

又因为 N 是不依赖于 x 的, 所以是一致收敛, 所以 f 是连续的, 所以

$$f(x + 2\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x + 2\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

所以 $f(x) \in H^0$, 所以是完备的。

(1)

$$(\varphi f)(x) = C \int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)} f(s) ds. \quad \text{其中 } C = \frac{1}{e^{2a\pi} - 1}.$$

$$\begin{aligned}
\varphi(C_1 f_1 + C_2 f_2) &= C \int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)} (C_1 f_1 + C_2 f_2)(s) ds \\
&= CC_1 \int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)} f_1(s) ds + CC_2 \int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)} f_2(s) ds \\
&= C_1 \varphi(f_1) + C_2 \varphi(f_2)
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\|\varphi(f)\| &= \max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| C \int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)} f(s) ds \right| \\
&\leq \max_{0 \leq x \leq 2\pi} C \int_x^{x+2\pi} |e^{-a(x-s)}| |f(s)| ds \\
&\leq \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)| \cdot C \int_0^{2\pi} e^{as} ds \\
&= k \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|
\end{aligned}$$

其中 $k = C \int_0^{2\pi} e^{as} ds$ 是常数。

第 30-31 页 1(1), 2(1)

题目 1.5. 求解下列微分方程:

$$(1) y' = \frac{2y-x}{2x-y}.$$

$$(2) y' = \cos(x-y).$$

解答. (1) 做变量代换 $y = ux$, 于是 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 原方程可以化为

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{2u-1}{2-u} \iff \frac{2-u}{u^2-1} du = \frac{dx}{x}$$

两边积分, 有

$$\frac{1}{2} \ln |u-1| - \frac{3}{2} \ln |u+1| - \ln |x| = C$$

整理得

$$\ln \left| \frac{u-1}{x^2(u+1)^3} \right| = C'$$

代回 $u = \frac{y}{x}$, 有

$$\ln \left| \frac{y-x}{(y+x)^3} \right| = C''$$

于是方程的通解为

$$\frac{y-x}{(y+x)^3} = C$$

此外, 当 $y = x$ 和 $y = -x$ 时, 方程也成立。

(2) 令 $x - y = u$, 此时 $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{du}{dx}$, 于是原式化为

$$\frac{du}{dx} = 1 - \cos u = 2 \sin^2 \left(\frac{u}{2} \right) \iff \frac{du}{2 \sin^2 (u/2)} = dx \quad (u \neq 0)$$

两边积分, 左边积分为

$$\int \frac{1}{2 \sin^2 (u/2)} du = \int \frac{1}{\sin^2 t} dt = \cot \frac{u}{2}.$$

所以原方程的解为

$$\cot \frac{u}{2} = x + C \iff \cot \frac{x-y}{2} - x = C'$$

此外, 还有特解 $x - y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

第 36 页 3

题目 1.6. 3. 证明: 齐次方程 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 有积分因子 $\mu = \frac{1}{xP + yQ}$.

解答. 乘上积分因子 μ 之后, 方程变成

$$\frac{P}{xP + yQ} dx + \frac{Q}{xP + yQ} dy = 0$$

因为是其次, 设齐 m 次, 设 $y = ux$, 于是

$$P(x, y) = x^m P(1, u), \quad Q(x, y) = x^m Q(1, u)$$

原式化为

$$\frac{x^m P}{x^{m+1}P + ux^{m+1}Q} dx + \frac{x^m Q}{x^{m+1}P + ux^{m+1}Q} (u dx + x du) = 0$$

整理得

$$\frac{1}{x} dx + \frac{Q(1, u)}{P(1, u) + uQ(1, u)} du = 0$$

这个方程是变量分离方程, 是恰当的。于是确实有积分因子 $\mu = \frac{1}{xP + yQ}$ 。

第二章 第 3 周微分方程作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

备注 2.1.

Arzela-Ascoli 定理的证明是找的书，对角线法如果有人跟我说我说不定能会做，但要我自己想到这个题需要用对角线法我觉得我应该做不出来。

然后题目 2.4 验证解的唯一性，我是直接每一块求出来他的解，但我看书上是利用对于 y 的单调性，我不是很理解。

第 42 页 1(2), 2(3)

题目 2.1. 求下列曲线族的正交轨线族：(2) $xy = C$.

解答. 求导可得

$$x dy + y dx = 0 \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

所以正交轨线的微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \implies x dx = y dy$$

解微分方程，就可以得到正交轨线族为

$$x^2 - y^2 = C'.$$

题目 2.2. 求与下列曲线族相交成 $\frac{\pi}{4}$ 角的曲线族：(3) $y = x \ln(Cx)$.

解答. 求导可得

$$dy = \ln(Cx) dx + x \cdot \frac{1}{Cx} \cdot C dx \implies \frac{dy}{dx} = \ln(Cx) + 1$$

联立 $y = x \ln(Cx)$, 消去 C , 可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 1.$$

所以相交成 $\frac{\pi}{4}$ 角的曲线族的微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} + 1 + 1}{1 - (\frac{y}{x} + 1)} = -\frac{y + 2x}{y}.$$

令 $y = ux$, 于是 $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$, 所以原微分方程化为

$$x \frac{du}{dx} + u = -\frac{u + 2}{u} \implies -\frac{dx}{x} = \frac{u du}{u^2 + u + 2}.$$

左边积分有 $\int -\frac{1}{x} dx = -\ln|x| + C_1$. 右边积分有

$$\begin{aligned} \int \frac{u}{u^2 + u + 2} du &= \int \frac{u + \frac{1}{2}}{(u + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(u + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} du \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right| - \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2u + 1}{\sqrt{7}} + C_2 \end{aligned}$$

所以微分方程的解为

$$-\ln|x| = \frac{1}{2} \ln(u^2 + u + 2) - \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2u + 1}{\sqrt{7}} + C'$$

代入 $u = \frac{y}{x}$, 有

$$\ln(y^2 + xy + 2x^2) - \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2y + x}{\sqrt{7}x} = C''.$$

第 48 页证明定理 3.2

题目 2.3. 设 $f(x, y)$ 在区域 G 内对 y 满足奥斯古德条件, 则微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 在 G 内经过每一点的解都是唯一的。

其中 Osgood 条件是: 函数 $f(x, y)$ 在区域 G 内连续, 而且满足不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq F(|y_1 - y_2|),$$

其中 $F(r) > 0$ 是 $r > 0$ 的连续函数, 而且瑕积分 (以 0 为瑕点)

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} = +\infty (r_1 > 0 \text{ 为常数})$$

解答. 假设存在两个解 $y_1(x), y_2(x)$, 代入不等式, 有

$$\left| \frac{dy_1}{dx} - \frac{dy_2}{dx} \right| \leq F(|y_1 - y_2|) \implies \left| \frac{d(y_1 - y_2)}{F(|y_1 - y_2|)} \right| = dx$$

令 $r = |y_1 - y_2|$, r_1 满足 $y(x_0) = r_1$, x_0 是区域 G 内的一个有限的点。那么两边积分,

有

$$\int_0^{y(x_0)} \frac{dr}{F(r)} = \int_0^{x_0} dx \implies \int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} = x_0$$

与题目中的 ∞ 矛盾。因此只会存在唯一的解。

第 49 页验证例 1, 并证明解的唯一性

题目 2.4. 设初值问题

$$(E_0): \frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad y(0) = 0,$$

其中函数

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x = 0, -\infty < y < +\infty, \\ 2x, & 0 < x \leq 1, -\infty < y < 0, \\ 2x - \frac{4y}{x}, & 0 < x \leq 1, 0 \leq y < x^2, \\ -2x, & 0 < x \leq 1, x^2 \leq y < +\infty. \end{cases}$$

验证: 函数 $F(x, y)$ 在条形区域

$$S: 0 \leq x \leq 1, \quad -\infty < y < \infty$$

内是连续的, 可是对 y 不满足利普希茨条件。

解答. 先验证连续。首先每一部分是连续的。其次

$$\lim_{y \rightarrow 0} 2x - \frac{4y}{x} = 2x, \quad \lim_{y \rightarrow x^2} 2x - \frac{4y}{x} = -2x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} F(x, y_0) = 0$$

所以函数是连续的。将 $F(x, y)$ 对 y 求导, 有

$$F_y(x, y) = \begin{cases} -\frac{4}{x}, & 0 < x \leq 1, 0 \leq y < x^2 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

可以发现导数在 0 附近是无界的, 进而不满足 Lipschitz 条件。

然后证明解的唯一性, 把每个区域上都求解, 发现只有一个解就应该可以验证唯一性。

$$F(x, y) = 0: \frac{dy}{dx} = 0 \implies y = 0.$$

$$F(x, y) = 2x: \frac{dy}{dx} = 2x \implies y = x^2.$$

$F(x, y) = 2x - \frac{4y}{x}: \frac{dy}{dx} = 2x - \frac{4y}{x}$, 同时乘上积分因子 x^4 , $\frac{d}{dx}(x^4 y) = 2x^5$, 积分并代入初值可得 $y = \frac{1}{3}x^2$.

$$F(x, y) = -2x: \frac{dy}{dx} = -2x \implies y = -x^2.$$

每个区域均只有唯一解。

第49页 1, 2

题目 2.5. 利用右端函数的性质讨论下列微分方程满足初值条件 $y(0) = 0$ 的解的唯一性问题:

$$(1) \frac{dy}{dx} = |y|^\alpha, \text{ 常数 } \alpha > 0;$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ y \ln |y|, & y \neq 0. \end{cases}$$

解答. (1) $g(y) = f(x, y) = |y|^\alpha$ 连续, 其次验证是否满足 Lipschitz 条件。

(a) 当 $\alpha > 1$ 时, $g'(y) = \alpha y^{\alpha-1}$, 在闭区间上导数有界, 所以满足 Lipschitz 条件, 即解唯一。

(b) 当 $0 < \alpha < 1$ 时, $g'(y) = \alpha y^{\alpha-1}$ 。在 0 附近导数无界, 即 $\frac{y^\alpha - 0}{y - 0} = y^{\alpha-1} \rightarrow \infty$, 不满足 Lipschitz 条件, 解不唯一。

(c) 当 $\alpha = 1$ 时, $||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$, 满足。

故当 $\alpha \geq 1$ 时, 解唯一; 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 解不唯一。

$$(2) \text{ 因为 } \lim_{y \rightarrow 0} y \ln |y| = 0, \text{ 所以函数连续。令 } h(y) = \text{右侧函数。} h'(y) = \begin{cases} \infty & y = 0 \\ \ln |y| + 1 & y \neq 0 \end{cases}.$$

所以不满足 Lipschitz 条件。

直接求解 $\frac{dy}{y \ln |y|} = dx$, 两边积分, 左边积分有

$$\int \frac{1}{y \ln |y|} dy = \int \frac{1}{\ln |y|} d \ln |y| = \ln (|\ln |y||) + C$$

于是, 方程的解为

$$y = e^{e^{x+C}}.$$

代入初值条件 $y(0) = 0$, 没有符合条件的 C , 所以方程只有一个特解 $y = 0$ 。所以右边的函数虽然不满足 Lipschitz 条件, 但也是只有唯一解。

题目 2.6. 试求初值问题:

$$\frac{dy}{dx} = x + y + 1, \quad y(0) = 0$$

的皮卡序列, 并由此取极限求解。

解答. $y_0 = y(0) = 0$,

$$y_1 = y_0 + \int_0^x f(s, y_0(s)) ds = \int_0^x (s + 0 + 1) ds = \frac{1}{2}x^2 + x.$$

$$y_2 = y_0 + \int_0^x f(s, y_1(s)) ds = \int_0^x \left(2s + \frac{1}{2}s^2 + 1\right) ds = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

$$y_3 = y_0 + \int_0^x f(s, y_1(s)) ds = \int_0^x \left(2s + s^2 + \frac{1}{6}s^3 + 1\right) ds = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

下面用数学归纳法, 设 $y_k = x + 2\left(\frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k\right) + \frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}$, 那么

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_0 + \int_0^x f(s, y_k(s)) ds = \int_0^x \left[1 + s + s + 2 \sum_{n=2}^k \frac{1}{n!} s^n + \frac{1}{(k+1)!} s^{k+1}\right] ds \\ &= x + x^2 + 2 \sum_{n=2}^k \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} + \frac{1}{(k+2)!} x^{k+2} \\ &= x + 2 \left(\frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}\right) + \frac{1}{(k+2)!} x^{k+2} \end{aligned}$$

所以由数学归纳法可知, 他的皮卡序列是

$$y_k = x + 2 \left(\frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k\right) + \frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}.$$

令 $k \rightarrow \infty$,

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} = e^x - 1 + e^x - 1 - x = 2e^x - x - 2.$$

利用皮卡迭代/压缩映射, 证明隐函数定理

题目 2.7. 证明隐函数定理:

设 $F(x, y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 中某开集上的 C^1 函数, 且满足

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

则存在 x_0 的邻域 U 和 y_0 的邻域 V , 以及唯一的 C^1 函数 $f: U \rightarrow V$, 使得

$$f(x_0) = y_0, \quad F(x, f(x)) \equiv 0, \quad \forall x \in U.$$

并且隐函数的导数为

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

解答. 我要寻找唯一的 f , 使得 $F(x, f(x)) = 0$. 设 $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$,

定义映射 $T: [y_0 - b, y_0 + b] \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b]$, 满足

$$T(f(x)) = f(x) - kF(x, f(x)) \text{ (或 } T(y) = y - kF(x, y) \text{)}$$

其中 $k = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$, 这个的选择主要是取决于 T 的压缩性。然后这样也就是转化为寻找 f , 使得 $Tf = f$.

第一步证明 T 的压缩性。对 y 求导, 有

$$\frac{dT}{dy} = 1 - \left[\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) \right]^2 \leq \Delta < 1.$$

所以任意的 $y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b]$, 由微分中值定理

$$|T(y_1) - T(y_2)| = T'(\xi) |y_1 - y_2| \leq \Delta |y_1 - y_2|$$

由此, T 是一个压缩映射。

第二步证明 T 的值域仍然是 $[y_0 - b, y_0 + b]$.

由于 F 是连续的, 且 $F(x_0, y_0) = 0$, 所以存在 x_0 的 δ 邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 使得 $F(x, y_0) \leq \frac{(1-\Delta)b}{k}$

对于任意的 $y \in [y_0 - b, y_0 + b]$,

$$\begin{aligned} |T(y) - y_0| &\leq |T(y) - T(y_0)| + |T(y_0) - y_0| \\ &\leq \Delta |y - y_0| + kF(x, y_0) \\ &\leq \Delta b + (1 - \Delta)b \\ &= b \end{aligned}$$

所以, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, T 会映到自身。

第三步, 由压缩映射的性质可知, 存在且唯一存在 $y^* = f(x)$, 满足 $Ty^* = y^*$, 即 $F(x, y^*) = 0$. 此时, $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), V = (y_0 - b, y_0 + b)$ 。

第四步证明 y^* 是连续的。设 $x, x' \in U$,

$$|f(x) - f(x')| = |y^* + kF(x, y^*) - y^* - kF(x', y^*)| = k |F(x, y^*) - F(x', y^*)|$$

由 $F(x, y)$ 的连续性可知, 当 $x' \rightarrow x$ 时, 右边是 0, 所以左边是 0, 所以 $f(x)$ 是连续的。

第五步证明 $f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$ 且 y^* 是 C^1 的。

对 $F(x, f(x)) = 0$ 两边对 x 求导, 可以得到

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, f(x)) + \frac{\partial}{\partial y} F(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \implies f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

由于 F 是 C^1 的且 $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, 所以 $f'(x)$ 就是两个连续函数的比值也是连续的, 所以 $f(x) \in C^1$.

备注 2.2. 用压缩映射, 需要先构造, 构造首先是确定里面有 y 和 $F(x, y)$, 至于二者之间的比例需要由压缩性来寻找。

证明 Arzela-Ascoli 定理

题目 2.8. 证明 Arzela-Ascoli 定理:

设函数序列 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ 在有限闭区间 I 上是一致有界和等度连续的, 则可以选取它的一个子序列

$$f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \dots, f_{n_k}(x), \dots,$$

使该子序列在区间 I 上是一致收敛的。

等度连续: 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - y| < \delta$ 时, 对所有的 n , 有 $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ 成立。

解答. 首先, 设 $w_1, w_2, \dots \in I$, 由于 I 是紧的, 取定 r , 使得 $I \subset \bigcup_k B(w_k, r)$ 。那么我就可以选取有限个开球覆盖 I , 不妨设选择了 $w_1, \dots, w_n$ 。

固定 x_1 , 可知数列 $f_1(x_1), f_2(x_1), \dots, f_n(x_1), \dots$ 收敛, 那么由魏尔斯特拉斯定理, 就存在一个收敛子列, 记该子列为 $\{f_{1k}\}$ 。

固定 x_2 , 可知数列 $f_{11}(x_2), f_{12}(x_2), \dots, f_{1n}(x_2), \dots$ 收敛, 于是他也存在一个收敛子列, 记该子列为 $\{f_{2k}\}$ 。

同理, 固定 $x_3, x_4, \dots$, 就可以得到一系列的收敛子列:

$$\begin{aligned} &f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n}, \dots (x_1 \text{ 收敛}) \\ &f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2n}, \dots (x_1, x_2 \text{ 收敛}) \\ &f_{31}, f_{32}, \dots, f_{3n}, \dots (x_1, x_2, x_3 \text{ 收敛}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

取 $\{f_{kk}, k = 1, 2, \dots\}$ 作为 $\{f_{n_k}\}$, 这个序列是一致收敛的。因为对任意的 $\varepsilon > 0$, $x \in I$, 并取一个 w , 使得 $x \in B(w, r)$, 存在 N , 当 $n_k, n_s > N$ 时,

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x) - f_{n_s}(x)| &= |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(w) + f_{n_k}(w) - f_{n_s}(w) + f_{n_s}(w) - f_{n_s}(x)| \\ &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(w)| + |f_{n_k}(w) - f_{n_s}(w)| + |f_{n_s}(w) - f_{n_s}(x)| \end{aligned}$$

由等度连续性, 第一项和第三项是 ε , 由点收敛, 第二项也是 ε , 所以合起来就是 3ε 。于是, $\{f_{n_k}\}$ 一致收敛。

第三章 第 4 周微分方程作业

备注 3.1. 题目 3.3,3.4 这样的题我都是仿照着题目的 3.1 写的步骤，就是每一部分挨着分析，证明小于某一个函数不会爆破因此可以延伸到无穷，正确证明过程不会写。

然后拉直是抄的 AI.

pg 60 例 2

题目 3.1. 在平面上任取一点 $P_0(x_0, y_0)$ ，试证初值问题

$$(E): \frac{dy}{dx} = (x - y)e^{xy^2}, \quad y(x_0) = y_0$$

的右行解（即从 P_0 点出发向右延伸的解）都在区间 $[x_0, +\infty)$ 上存在。

解答. 由于 $(x - y)e^{xy^2}$ 是光滑的，所以从 (x_0, y_0) 出发解存在唯一。考察 $L: y = x$ 这条直线，在这条直线上 $y' = 0$ ，直线上方 $y' < 0$ ，下方 $y' > 0$ 。所以：

若 x_0 在直线左边，则函数单调递减，必然与 L 相交。

再研究 $x_0 \geq y_0$ ，当函数靠近 $y = x$ 时，设 $x - y = \delta$ ，那么

$$\frac{dy}{dx} = \delta e^{(y+\delta)y^2} \leq \delta e^{2y^3}$$

于是在任意有限区间 $[x_0, M]$ ，都可以选取 δ ，使得 $\frac{dy}{dx} < 1$ ，这样也就不会穿过 $y = x$ ，于是就不会爆破。

pg63 2 (1) (3) 4, 5 (假设 f 光滑)

题目 3.2. 2. 讨论下列微分方程解的存在区间：

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + y^2};$

(3) $\frac{dy}{dx} = y \sin(xy);$

解答. (1) $\frac{1}{x^2+y^2}$ 在 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上光滑, 且大于 0, 所以初值不为 $(0, 0)$ 时, 设初值 (x_0, y_0) , $x_0 > 0$, 看 $x \rightarrow \pm\infty$ 时的行为,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+y^2} < 1 \implies y < x$$

因此可以延伸到 $+\infty$. 向左延伸时, 先快速变小, 当 $x < -1$ 时, 下降的速度减缓, x 很小时解一定在 $y = x$ 的上方, 所以也是可以延伸到 $-\infty$ 的。

因此当初值不为 $(0, 0)$ 时, 解的存在区间是 $(-\infty, +\infty)$.

(3) 由于 $y \sin(xy)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上光滑, 所以对任意初值 (x_0, y_0) 解存在唯一。由于

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = |y \sin(xy)| \leq |y|$$

所以可得 $|y(x)| \leq |y_0|e^{|x-x_0|}$, 于是 y 会在任意有限区间内保持有界, 不会在有限时间内爆破, 因此解的最大存在区间是 $(-\infty, +\infty)$.

题目 3.3. *4. 设初值问题

$$(E): \frac{dy}{dx} = (y^2 - 2y - 3)e^{(x+y)^2}, \quad y(x_0) = y_0$$

的解的最大存在区间为 (a, b) , 其中 (x_0, y_0) 是平面上的任一点. 则 $a = -\infty$ 和 $b = +\infty$ 中至少有一个成立.

解答. 由于函数 $f(x, y) = (y - 3)(y + 1)e^{(x+y)^2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 且

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2y - 2)e^{(x+y)^2} + (y^2 - 2y - 3)(2x + 2y)e^{(x+y)^2}$$

局部有界、连续, 所以 f 关于 y 局部 Lipschitz 连续, 因此对初值 (x_0, y_0) 有唯一的局部解。

考虑 $y = -1$ 和 $y = 3$ 这两条直线。由解的唯一性, 任何其他解不能穿过这两条直线, 只能渐近趋近。

- 若 $y_0 = -1$ 或 $y_0 = 3$, 那么解就是这两条直线, 存在区间为 $(-\infty, +\infty)$.
- 若 $y_0 \in (-1, 3)$, 则解 y 满足 $y' < 0$, 故 y 单调递减, 对一切 x , $y \in (-1, 3)$, 即解有界。此时存在区间为 $(-\infty, +\infty)$.
- 若 $y_0 < -1$, 则 $y' > 0$, 故 y 单调递增, 考虑右行解, 当 $x > x_0$ 时, $y \in (y_0, -1)$, 所以可以向右无限延伸, 此时 $b = +\infty$.
- 若 $y_0 > 3$, 则 $y' > 0$, 故 y 单调递增, 考虑左行解, 当 $x < x_0$ 时, $y \in (3, y_0)$, 所以可以向左无限延伸, 此时 $a = -\infty$.

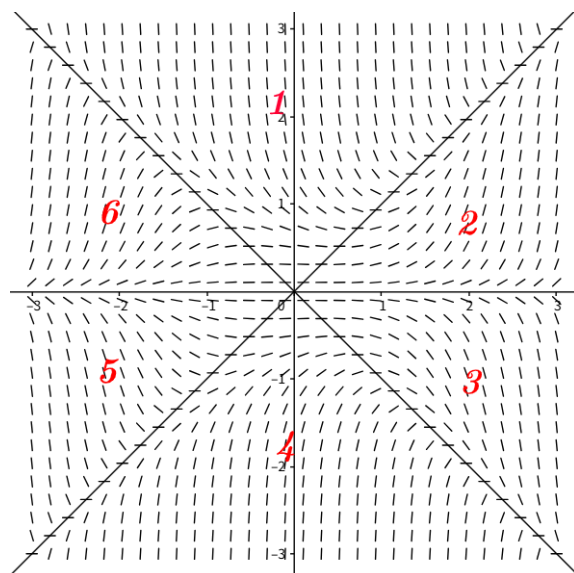
综上, $a = -\infty$ 和 $b = +\infty$ 中至少有一个成立.

题目 3.4. *5. 设初值问题

$$(E): \frac{dy}{dx} = (x^2 - y^2)f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

其中函数 $f(x, y)$ 在全平面连续、光滑且满足当 $y \neq 0$ 时, $yf(x, y) > 0$, 则对于任意的 (x_0, y_0) , 当 $x_0 < 0$ 和 $|y_0|$ 适当小时, 初值问题 (E) 的解可延伸到 $(-\infty, +\infty)$.

解答. 首先方程右侧函数 $F(x, y) = (x^2 - y^2)f(x, y)$ 连续, 且 $\frac{\partial F}{\partial y}$ 连续, 故解唯一。由于 $y > 0$ 时 $f(x, y) > 0$, $y < 0$ 时 $f(x, y) < 0$, 所以由连续性, 可得 $f(x, 0) = 0$. 所以 $y = 0$ 也是原方程的一个解。考虑三条直线 $y = x$ 和 $y = -x$ 和 x 轴, 将平面分成了六个区域。由于 $x_0 < 0$, $|y_0|$ 适当小。不妨只研究 $y > 0$ 的区域。 $y < 0$ 的区域做代换 $u = -y$ 即可



- 在区域 1 中, $x^2 - y^2 < 0$, 又因为 $yf(x, y) > 0$, 所以 $f(x, y) > 0$, 所以 $y' = (x^2 - y^2)f(x, y) < 0$, 也就是说, 在区域 1 内部, 解是严格递减的。
- 在区域 2 中, $x^2 - y^2 > 0$, 又因为 $yf(x, y) > 0$, 所以 $f(x, y) > 0$, 所以 $y' = (x^2 - y^2)f(x, y) > 0$, 也就是说, 在区域 2 内部, 解是严格递增的。
- 在区域 6 中, $x^2 - y^2 > 0$, 又因为 $yf(x, y) > 0$, 所以 $f(x, y) > 0$, 所以 $y' = (x^2 - y^2)f(x, y) > 0$, 也就是说, 在区域 6 内部, 解是严格递增的。
- 在两个边界处, $y' = 0$, 从下方靠近时, $y' > 0$, 从上方靠近时, $y' < 0$ 。

所以说, $x_0 < 0$, $y_0 < \varepsilon$ 时 (ε 是一个和 $f(x)$ 有关的量),

向右延伸时, 由于单调递增, 所以总会和 $y = -x$ 有一个交点, 从区域 6 进入区域 1, 然后单调递减。此后, 解可能再次与直线相交, 形成振荡。但无论振荡与否, 解始终被限制在某个有界范围内, 因为当 y 很大时, y' 为很大的负数, 迫使 y 快速减小。反之当 y 很小时, y' 为正, 又会使 y 增大。直至再次穿过 $y = x$ 进入区域 2。然后 y 单调递增, 同样地, 要么他被限制在 $y = x$ 的下方, 要么围绕 $y = x$ 振荡。所以右行存在区间为 $[x_0, +\infty)$ 。

向左延拓时, y 随 x 的减小而减小。因为 $y = 0$ 是一个解, 所以不能穿过它。因此在 $x < x_0$ 时, $0 < y < y_0$, 也是有界的, 所以可以延伸到 $-\infty$ 。

具体来看 y_0 要多小。当 y 很大时, $\frac{dy}{dx} = (x^2 - y^2)f(x, y) \approx -y^2 f(x, y)$, 当 $y > 0$ 时, $\frac{dy}{dx} < 0$, 会飞快的衰减。当 $y < 0$, $\frac{dy}{dx} > 0$, 会飞快的上升。所以 y 的大小不是引起爆破的因素, 那就只有可能是 $f(x, y)$ 的大小引起爆破。由于我们研究的是 $y > 0$ 的情况, 所以 $f(x, y) > 0$ 。于是爆破只可能发生在 $x^2 - y^2 > 0$ 的情形, 同样, 那既然 $x^2 - y^2 > 0$ 了, 就肯定在 $y = x$ 的下方, 没有爆破。所以 y_0 只要小于 $|x_0|$ 应该就可以了。

pg 74 例 3

题目 3.5. 求解微分方程

$$y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1.$$

解答. 原式等价于 $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-y^2}$, 令 $y = \cos t$, 于是

$$\frac{dy}{dx} = -\sin t \cdot \frac{dt}{dx}$$

代入原式, 有

$$-\sin t \cdot \frac{dt}{dx} = \pm \sin t \implies \frac{dt}{dx} = \pm 1$$

得到通解为 $y = \cos(C - x)$ 。当 $\sin t = 0$ 时, 也就是说 $y = \pm 1$ 也是微分方程的两个特解。

pg77 定理 4.1

题目 3.6. 设函数 $F(x, y, p)$ 对 $(x, y, p) \in G$ 是连续的, 而且对 y 和 p 有连续的偏微商 F'_y 和 F'_p . 若函数 $y = \varphi(x)$ ($x \in J$) 是微分方程 $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ 的一个奇解, 并且

$$(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in G \quad (x \in J),$$

则奇解 $y = \varphi(x)$ 满足一个称之为 p -判别式的联立方程组

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0 \end{cases} \quad \left(p = \frac{dy}{dx} \right). \quad (4.23)$$

(设从方程组中消去 p 得到方程

$$\Delta(x, y) = 0,$$

则称由此方程所决定的曲线为方程的 p -判别曲线. 因此, 微分方程 $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ 的奇解是一条 p -判别曲线.)

解答. 奇解的定义: 设一阶微分方程 $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ 有特解 $\Gamma: y = \varphi(x)$, 如果对每一点 $Q \in \Gamma$, 在 Q 点的任何邻域内方程有一个不同于 Γ 的解在 Q 点与 Γ 相切, 则称 Γ 是微分方程的奇解。

由于 $y = \varphi(x)$ 是一个解, 所以必然满足 $F(x, y, p) = 0$, 所以只需要证明 $\frac{\partial}{\partial p} F(x, \varphi(x), p) = 0$.

假设不等于 0, 那么就存在 $x_0 \in J$, 使得 $F'_p(x_0, \varphi(x_0), p_0) \neq 0$, 由于 $F(x_0, \varphi(x_0), p_0) = 0$, 所以可以有隐函数定理得, $(x_0, y_0) \in G$ 附近, 方程 $F(x, y, p) = 0$ 唯一确定了 $p = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$, 且 f 连续, 对 y 有连续偏导

$$f'_y = -\frac{F'_y(x, y, f(x, y))}{F'_p(x, y, f(x, y))}.$$

于是, 由皮卡定理, 该初值问题存在唯一解。但是 $\varphi(x)$ 是奇解, 不应该在这个区间内有唯一解, 因此矛盾, 假设不成立, 所以

$$\frac{\partial}{\partial p} F(x, \varphi(x), p) = 0, \quad \forall x \in J$$

因此奇解 $y = \varphi(x)$ 满足方程组。

题目 3.7. 定义: 方向场的拉直 (rectification) 是一个微分同胚, 它将该方向场映射为平行方向场。如果存在这样的拉直映射, 则称该方向场是可拉直的。

定理 1: 每个光滑方向场在其每一点的邻域内都是可拉直的。若该方向场是 r 次连续可微的 (属于 C^r 类, 其中 $1 \leq r \leq \infty$), 则对应的拉直微分同胚也可以取为 C^r 类。

证明定理 1 中的 C^1 情形 (即今天上课说的)

解答. 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 C^1 向量场, 且 $X(p) \neq 0$, 则可以做线性变换使得 $X(p) = (1, 0, \dots, 0)$, 所以不妨直接设 $X(p) = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

考虑 $S = \{x \in U : x_1 = 0\}$, 因为 $X(p) = e_1$, 所以存在一个小邻域 $V \subset U$ 和 $\varepsilon > 0$, 使得对所有 $y \in S \cap V$, 常微分方程初值问题

$$\frac{d}{dt}\gamma_y(t) = X(\gamma_y(t)), \quad \gamma_y(0) = y$$

的解 $\gamma_y(t)$ 对 $|t| < \varepsilon$ 存在且唯一。

定义映射

$$\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (S \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi(t, y) = \gamma_y(t).$$

这里 t 是时间, y 是 S 上的初始点。因为 X 是 C^1 , 常微分方程的解对初值具有 C^1 依赖性。即作为 (t, y) 的函数, $\gamma_y(t)$ 是 C^1 的, 所以 ψ 是 C^1 的。计算 ψ 在 $(0, p)$ 处的雅可比矩阵:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(0, p) = X(p) = e_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(0, p) = \frac{\partial}{\partial y_i}(0, y_2, \dots, y_n) = e_i$$

$$J\psi(0, p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \psi}{\partial y_n} \end{pmatrix} = I_n$$

由于 ψ 是 C^1 的, $J\psi(0, p)$ 可逆, 存在 $(0, p)$ 的一个开邻域 $W \subset (-\varepsilon, \varepsilon) \times (S \cap V)$, 使得 $\psi|_W$ 是 C^1 微分同胚到他的像。记

$$\phi = (\psi|_W)^{-1} : \psi(W) \rightarrow W$$

则 ϕ 是 C^1 映射, 就是我们想要的坐标变换。

第四章 第 5 周微分方程作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

备注 4.1.

由于做的时候刚学，所以每一个我都是先求约当标准型，然后算 $e^{P\Lambda P^{-1}} = Pe^{\Lambda}P^{-1}$ ，所以麻烦得很。

140 页，1(3)(4), 2(1)(2)(3), 3(1), 4, 5

题目 4.1. 1. 求出常系数齐次线性微分方程组 $\frac{dy}{dx} = Ay$ 的通解, 其中的矩阵 A 分别为:

$$(3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}; (4) \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix};$$

解答. 两边同乘 e^{-xA} , 有

$$e^{-xA} \frac{dy}{dx} = e^{-xA} Ay \implies \frac{d}{dx} (e^{-xA} y) = 0$$

所以解得 $e^{-xA} y = C$. 即 $y = e^{xA} \cdot C$.

(3) 由于

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix} = P\Lambda P^{-1}$$

所以

$$e^{xA} = Pe^{x\Lambda}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4x} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-x} & 0 \\ \frac{1}{3}(e^{-x} - e^{-4x}) & \frac{1}{9}((3x-1)e^{-x} + e^{-4x}) & e^{-4x} \end{pmatrix}$$

于是通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-x} & 0 \\ \frac{1}{3}(e^{-x} - e^{-4x}) & \frac{3x-1}{9}e^{-x} + \frac{1}{9}e^{-4x} & e^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \\ = C'_1 \begin{pmatrix} 3e^{-x} \\ 0 \\ e^{-x} - e^{-4x} \end{pmatrix} + C'_2 \begin{pmatrix} 9xe^{-x} \\ 9e^{-x} \\ (3x-1)e^{-x} + e^{-4x} \end{pmatrix} + C'_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-4x} \end{pmatrix}$$

(4) 由于

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & & \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = P\Lambda P^{-1}$$

所以

$$e^{xA} = Pe^{x\Lambda}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^x & xe^x & \\ & e^x & \\ & & e^x \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e^x & \frac{2x}{3}e^x & -\frac{2x}{3}e^x \\ 0 & (1 - \frac{x}{3})e^x & \frac{x}{3}e^x \\ 0 & -\frac{x}{3}e^x & (1 + \frac{x}{3})e^x \end{pmatrix}$$

于是通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & \frac{2x}{3}e^x & -\frac{2x}{3}e^x \\ 0 & (1 - \frac{x}{3})e^x & \frac{x}{3}e^x \\ 0 & -\frac{x}{3}e^x & (1 + \frac{x}{3})e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \\ = C'_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \end{pmatrix} + C'_2 e^x \begin{pmatrix} 2x \\ 3-x \\ -x \end{pmatrix} + C'_3 e^x \begin{pmatrix} -2x \\ x \\ 3+x \end{pmatrix}$$

题目 4.2. 2. 求出常系数非齐次线性微分方程组 $\frac{dy}{dx} = Ay + f(x)$ 的通解, 其中:

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -n^2 \\ -n^2 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = \begin{pmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix}$;

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^x \end{pmatrix}$;

解答. (1) $y = e^{xA}c + \int_{x_0}^x e^{(x-s)A}f(s)ds$, 其中

$$e^{xA}c = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} xe^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$\int_0^x \begin{pmatrix} e^{2(x-s)} & (x-s)e^{2(x-s)} \\ 0 & e^{2(x-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \int_0^x \begin{pmatrix} e^{2(x-s)} \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{e^{2x}-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$y = c_1' \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} xe^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -n^2 \\ -n^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^2 & \\ & -n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P\Lambda P^{-1}$$

$$e^{xA}c = Pe^{x\Lambda}P^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{n^2x} & \\ & e^{-n^2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{n^2x} + e^{-n^2x} & -e^{n^2x} + e^{-n^2x} \\ -e^{n^2x} + e^{-n^2x} & e^{n^2x} + e^{-n^2x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x e^{(x-s)A}f(s)ds &= \frac{1}{2} \int_0^x \begin{pmatrix} \cosh(n^2(x-s)) & -\sinh(n^2(x-s)) \\ -\sinh(n^2(x-s)) & \cosh(n^2(x-s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos ns \\ \sin ns \end{pmatrix} ds \\ &= \frac{1}{n(n^2+1)} \begin{pmatrix} (n+1)\sin nx \\ (n-1)\cos nx \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} y &= \begin{pmatrix} \cosh(n^2x) & -\sinh(n^2x) \\ -\sinh(n^2x) & \cosh(n^2x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n(n^2+1)}\sin nx \\ \frac{n-1}{n(n^2+1)}\cos nx \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n(n^2+1)}\sin nx + C_1 \cosh(n^2x) - C_2 \sinh(n^2x) \\ \frac{n-1}{n(n^2+1)}\cos nx - C_1 \sinh(n^2x) + C_2 \cosh(n^2x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P\Lambda P^{-1}$$

$$e^{xA} = Pe^{x\Lambda}P^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} x+1 & -x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$$

$$\int_0^x e^{(x-s)A}f(s)ds = \int_0^x e^x \begin{pmatrix} x-s+1 & -x+s \\ x-s & 1-x+s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} ds = e^x \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2x-x^2 \end{pmatrix}$$

所以

$$y = e^x \begin{pmatrix} x+1 & -x \\ x & 1-x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + e^x \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2x-x^2 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} C_1(x+1) - C_2x - x^2 \\ C_1x + C_2(1-x) + 2x - x^2 \end{pmatrix}$$

解答. (1) 的高级做法是: A 本身就是约当标准型为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 特征值 2 的特征向量

$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 广义特征向量为 $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以 $e^{2t}\eta_1, e^{2t}(\eta_2 + t\eta_1)$ 组成齐次方程的通解。

然后求特解, 尝试一下常数特解, 发现可以成立。 $\frac{dy}{dx} = Ay + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 于是 $A\eta = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

所以 $\eta = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

综上, 方程的通解为 $y = C_1 e^{2t}\eta_1 + C_2 e^{2t}(\eta_2 + t\eta_1) + \eta$ 。

(2) 的高级做法是: 约当标准型为 $\begin{pmatrix} n^2 & \\ & -n^2 \end{pmatrix}$, 特征值为 n^2 的特征向量 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 特征值为 $-n^2$ 的特征向量为 $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以齐次方程的通解是 $y = C_1 e^{n^2 x}\eta_1 + C_2 e^{-n^2 x}\eta_2$ 。

然后求特解, 猜测 $\begin{pmatrix} A_1 \cos nx + B_1 \sin nx \\ A_2 \cos nx + B_2 \sin nx \end{pmatrix}$ 是一个特解。代入计算可得

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} A_1 \cos nx + B_1 \sin nx \\ A_2 \cos nx + B_2 \sin nx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n^2 \\ -n^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \cos nx + B_1 \sin nx \\ A_2 \cos nx + B_2 \sin nx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -nA_1 \sin nx + nB_1 \cos nx \\ -nA_2 \sin nx + nB_2 \cos nx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - n^2 A_2) \cos nx - n^2 B_2 \sin nx \\ -n^2 A_1 \cos nx + (1 - n^2 B_1) \sin nx \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -nA_1 = -n^2 B_2 \\ nB_1 = 1 - n^2 A_2 \\ -nA_2 = 1 - n^2 B_1 \\ nB_2 = -n^2 A_1 \end{cases}$$

解得

$$A_1 = B_2 = 0, A_2 = \frac{n-1}{n(n^2+1)}, B_1 = \frac{n+1}{n(n^2+1)}$$

所以就找到了特解。所以原方程的通解为

$$y = C_1 e^{n^2 x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-n^2 x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n(n^2+1)} \sin nx \\ \frac{n-1}{n(n^2+1)} \cos nx \end{pmatrix}$$

(3) 的高级做法是: 前半部分一样, 直接看特解怎么求。

设 $e^x \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

题目 4.3. 3. 求出微分方程组 $\frac{dy}{dx} = Ay + f(x)$ 满足初值条件 $y(0) = \eta$ 的解, 其中:

$$(1) A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

解答. $y = e^{xA}\eta + \int_{x_0}^x e^{(x-s)A}f(s)ds$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = P\Lambda P^{-1}$$

$$e^{xA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-4x} & xe^{-4x} \\ 0 & e^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = e^{-4x} \begin{pmatrix} 1-x & -x \\ x & x+1 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^x e^{(x-s)A}f(s)ds = \int_0^x e^{-4(x-s)} \begin{pmatrix} 1-x+s & -x+s \\ x-s & x-s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s \\ e^{2s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{4}{25}e^x - \frac{1}{36}e^{2x} + e^{-4x} \left(\frac{11}{30}x - \frac{119}{900} \right) \\ \frac{1}{25}e^x + \frac{7}{36}e^{2x} - e^{-4x} \left(\frac{11}{30}x + \frac{211}{900} \right) \end{pmatrix}$$

$$y = e^{-4x} \begin{pmatrix} 1-x & -x \\ x & x+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{25}e^x - \frac{1}{36}e^{2x} + e^{-4x} \left(\frac{11}{30}x - \frac{119}{900} \right) \\ \frac{1}{25}e^x + \frac{7}{36}e^{2x} - e^{-4x} \left(\frac{11}{30}x + \frac{211}{900} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{25}e^x - \frac{1}{36}e^{2x} + e^{-4x} \left(-\frac{19}{30}x + \frac{78}{900} \right) \\ \frac{1}{25}e^x + \frac{7}{36}e^{2x} - e^{-4x} \left(-\frac{19}{30}x + \frac{21}{900} \right) \end{pmatrix}$$

解答. 高级做法: 约当标准型为 $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, 特征向量是 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 广义特征向量

$\eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, 所以齐次方程的通解为

$$y = C_1\eta_1e^{-4x} + C_2(\eta_2 + x\eta_1)e^{-4x}$$

然后可知最小多项式是 $(\lambda + 4)^2$, 设 $\lambda^n = m(\lambda)P_n(\lambda) + a_n(\lambda + 4) + b_n$, 令 $\lambda = -4$, 得到 $b_n = (-4)^n$, 求导之后令 $\lambda = -4$, 得到 $a_n = n(-4)^{n-1}$. 于是

$$e^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} ((-4x)^n I + nx(-4x)^{n-1}(A + 4I)) = e^{-4x} \begin{pmatrix} 1-x & -x \\ x & x+1 \end{pmatrix}$$

题目 4.4. 4. 求解微分方程组

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

其中 a 和 b 为实常数, 而且 $b \neq 0$.

解答. 设 $I = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $J^2 = -I$, $IJ = JI$. 设题中矩阵为 A , 于是 $A = aI + bJ$, 所以 $e^{xA} = e^{x(aI+bJ)} = e^{xaI+xbJ}$, 因为 $e^{xJ} = I \cos x + J \sin x$, 所以

$$e^{xaI+xbJ} = \begin{pmatrix} e^{ax} & \\ & e^{ax} \end{pmatrix} (I \cos xb + J \sin xb) = \begin{pmatrix} e^x \cos xb & -e^x \sin xb \\ -e^x \sin xb & e^x \cos xb \end{pmatrix}$$

所以

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} e^x \cos xb & -e^x \sin xb \\ -e^x \sin xb & e^x \cos xb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 e^x \begin{pmatrix} \cos xb \\ -\sin xb \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} -\sin xb \\ \cos xb \end{pmatrix}$$

题目 4.5. 5. 证明: 常系数齐次线性微分方程组 $\frac{dy}{dx} = A\mathbf{y}$ 的任何解当 $x \rightarrow +\infty$ 时都趋于零, 当且仅当它的系数矩阵 A 的所有特征根都具有负的实部。

解答. 设 $A = P\Lambda P^{-1}$, 所以方程的解为

$$\mathbf{y} = e^{xA} \cdot \mathbf{C} = P e^{x\Lambda} P^{-1} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} P J_{n_1} P^{-1} C_1 \\ e^{\lambda_2 x} P J_{n_2} P^{-1} C_2 \\ \vdots \\ e^{\lambda_m x} P J_{n_m} P^{-1} C_m \end{pmatrix}, J_{n_i} = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & x & \cdots & \frac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

设 $\lambda_i = a + bi$, 那么解的每一个分量就是

$$y_{ij} = C_i^j e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) R(x)$$

其中 C_i^j 是一个系数, $R(x)$ 是关于 x 的一个多项式。所以, 任何解当 $x \rightarrow \infty$ 时都趋向于 0 等价于 $a < 0$ 也就是特征根有负的实部。

证明有限维线性空间上的范数是等价的 (请自己将这个叙述用数学语言写准确)

题目 4.6. 设 X 是有限维线性空间, 则 X 上的任意两个范数 $\|\cdot\|_a$ 和 $\|\cdot\|_b$ 是等价的, 即存在正常数 $c_1, c_2 > 0$, 使得对任意 $x \in X$, 有

$$c_1 \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c_2 \|x\|_a.$$

解答. 考虑范数 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x^i|$, 其中 $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$. $\|\cdot\|$ 是任意一个 X 上的范数, 先证明 $C_1 \|x\| \leq \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|$.

因为

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x^i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x^i e_i\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \sum_{i=1}^n |x^i| = \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \|x\|_1$$

所以取 $C_1 = 1/\max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|$, 就得到 $C_1 \|x\| \leq \|x\|_1$.

右半边使用归纳法. 假设 $n-1$ 维向量空间满足 $\|x\|_1 \leq C_2 \|x\|$, 那么 n 维时, 因为

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x^i e_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=1, i \neq j}^n x^i e_i \right\| - \|x^j e_j\|$$

当 j 取遍 1 到 n 时, 两边求和, 有

$$\begin{aligned} n \|x\| &\geq \sum_{j=1}^n \left\| \sum_{i=1, i \neq j}^n x^i e_i \right\| - \sum_{j=1}^n \|x^j e_j\| \geq [(n-1)(\min C_2) - 1] \sum_{i=1}^n \|x^i e_i\| \\ &\geq [(n-1)(\min C_2) - 1] \left(\min_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \right) \|x\|_1 \end{aligned}$$

取每一个 C_2 都很大, 使得 $[(n-1)(\min C_2) - 1](\min_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|) > 0$, 这样, 取 $n = C_1 [(n-1)(\min C_2) - 1](\min_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|)$, 就有 $\|x\|_1 \leq C_1 \|x\|$.

最后, 根据等价的传递性, X 上的任意两个范数 $\|\cdot\|_a$ 和 $\|\cdot\|_b$ 都与 $\|\cdot\|_1$ 等价, 所以二者等价.

陈述并证明解对参数的二阶光滑依赖性 (我们课上详细研究了一阶依赖性)

题目 4.7. 考虑含参数 $\mu \in \mathbb{R}^m$ 的常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

其中: $(x, y, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是定义在开集 G 上的向量场. 假设函数 $f \in C^2(G)$, 证明: 在上述假设下, 解 $y = \varphi(x, \mu)$ 关于参数 μ 具有二阶连续可微性, 即 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \in C$.

解答. 由于 $f \in C^1$, 由一阶光滑性定理, $\varphi(x, \mu)$ 关于 μ 连续可微, 那么

$$\frac{d}{dx} \varphi(x, \mu) = f(x, \varphi(x, \mu), \mu)$$

两边对 μ 求导,

$$\frac{d}{d\mu} \frac{d}{dx} \varphi(x, \mu) = f_y \frac{d\varphi}{d\mu} + f_\mu, \quad \frac{d\varphi}{d\mu}(x_0) = 0$$

记 $\eta = \frac{d}{d\mu} \varphi(x, \mu)$, 那么 η 就会满足一个初值问题:

$$\frac{d\eta}{dx} = f_y \eta + f_\mu, \quad \eta(x_0, \mu) = 0$$

因为 f 是二阶可微的, 所以 f_y 和 f_μ 都是 C^1 函数, 因此右侧仍然是一个连续函数,

再次应用一阶光滑性定理, 解 $\eta(x, \mu)$ 关于 μ 连续可微, 所以

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mu}(x, \mu) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}(x, \mu)$$

存在且连续。因此 $\varphi(x, \mu)$ 对 μ 有二阶连续偏导数。

令 $\zeta = \frac{\partial \eta}{\partial \mu}(x, \mu)$, 同时也可以验证

$$\frac{d\zeta}{dx} = f_y \zeta + f_{yy}(\eta, \eta) + 2f_{y\mu}\eta + f_{\mu\mu}, \quad \zeta(x_0) = 0.$$

解答. 还有一种是不用一阶的定理, 直接算。因为菜, 所以多练。

因为 $\varphi(x, \mu)$ 关于 μ 连续可微, 记 $\eta(x, \mu) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(x, \mu) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 则 η 满足一阶变分方程

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = f_y(x, \varphi, \mu)\eta + f_\mu(x, \varphi, \mu), \quad \eta(x_0, \mu) = 0$$

我们要证明 $\eta(x, \mu)$ 关于 μ 连续可微, 即 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}$ 存在且连续。

固定一个 μ , 考虑在某一个方向上的增量 he_i , 定义差商

$$Z^h(x, \mu) = \frac{\eta(x, \mu + he_i) - \eta(x, \mu)}{h}$$

目标是证明当 $h \rightarrow 0$ 时, Z^h 一致收敛到某个连续函数 $\zeta_i(x, \mu)$, 且该函数就是 $\frac{\partial \eta}{\partial \mu_i}$ 。

代入 η 满足的一阶变分方程,

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta(x, \mu) = f_y(x, \varphi(x, \mu), \mu)\eta(x, \mu) + f_\mu(x, \varphi(x, \mu), \mu)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta(x, \mu + he_i) = f_y(x, \varphi(x, \mu + he_i), \mu + he_i)\eta(x, \mu + he_i) + f_\mu(x, \varphi(x, \mu + he_i), \mu + he_i)$$

代入 Z^h 中, 有

$$\frac{\partial Z^h}{\partial x} = \frac{1}{h} [f_y(x, \varphi^h, \mu^h)\eta^h - f_y(x, \varphi, \mu)\eta] + \frac{1}{h} [f_\mu(x, \varphi^h, \mu^h) - f_\mu(x, \varphi, \mu)]$$

其中 $\varphi^h = \varphi(x, \mu + he_i)$, $\mu^h = \mu + he_i$, $\eta^h = \eta(x, \mu + he_i)$ 。

先处理第一项,

$$f_y(x, \varphi^h, \mu^h)\eta^h - f_y(x, \varphi, \mu)\eta = f_y(x, \varphi, \mu)(\eta^h - \eta) + [f_y(x, \varphi^h, \mu^h) - f_y(x, \varphi, \mu)]\eta^h$$

$$\frac{1}{h} [f_y\eta^h - f_y\eta] = f_y(x, \varphi, \mu)Z^h + \frac{1}{h} [f_y(x, \varphi^h, \mu^h) - f_y(x, \varphi, \mu)]\eta^h$$

然后对这两个差值进行泰勒展开。

$$f_y(x, \varphi^h, \mu^h) - f_y(x, \varphi, \mu) = f_{yy}(x, \varphi, \mu)(\varphi^h - \varphi) + f_{y\mu_i}(x, \varphi, \mu)h + o(|\varphi^h - \varphi|^2 + |h|^2)$$

$$f_\mu(x, \varphi^h, \mu^h) - f_\mu(x, \varphi, \mu) = f_{\mu y}(x, \varphi, \mu)(\varphi^h - \varphi) + f_{\mu\mu_i}(x, \varphi, \mu)h + o(|\varphi^h - \varphi|^2 + |h|^2)$$

由于

$$\varphi^h - \varphi = \eta(x, \mu)h + \varepsilon_1(x, h)h, \quad \eta^h = \eta(x, \mu) + \varepsilon_2(x, h)$$

且 $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0$ 一致, $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$ 一致。

全都代入 $\frac{\partial Z^h}{\partial x}$, 就有

$$\frac{\partial Z^h}{\partial x} = f_y(x, \varphi, \mu) Z^h + \left[f_{yy}(x, \varphi, \mu) (\eta + \varepsilon_1) + f_{y\mu_i} + \frac{0}{h} \right] (\eta + \varepsilon_2) + f_{\mu y}(x, \varphi, \mu) (\eta + \varepsilon_1) + f_{\mu\mu_i} + \frac{0}{h}.$$

定义 $\zeta_i(x, \mu)$ 为如下线性初值问题的解:

$$\frac{d\zeta_i}{dx} = f_y(x, \varphi, \mu) \zeta_i + f_{yy}(x, \varphi, \mu) (\eta, \eta_i) + 2f_{y\mu_i}(x, \varphi, \mu) \eta + f_{\mu\mu_i}(x, \varphi, \mu), \quad \zeta_i(x_0, \mu) = 0.$$

令误差 $E^h(x, \mu) = Z^h - \zeta_i$, 得

$$\frac{\partial}{\partial x} E^h(x, \mu) = f_y(x, \varphi, \mu) E^h + \delta^h(x, \mu), \quad E^h(x_0, \mu) = 0$$

其中

$$\delta^h(x, \mu) = f_{yy}(x, \varphi, \mu) [(\eta + \varepsilon_1)(\eta + \varepsilon_2) - \eta\eta_i] - f_{y\mu_i}\varepsilon_2 + f_{\mu y}\varepsilon_1 + \frac{0}{h}$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, $\delta^h(x, \mu) \rightarrow 0$ 。由 Gronwall 不等式可以得到

$$|E^h(x)| \leq \int_{x_0}^x |\delta^h(s)| e^{\int_s^x \|f_y\| d\tau} ds \leq C \int_{x_0}^x |\delta^h(s)| ds \rightarrow 0$$

所以 $E^h \rightarrow 0$ 一致, 即

$$Z^h(x, \mu) \rightarrow \zeta_i(x, \mu) \text{ 当 } h \rightarrow 0, \text{ 一致于 } x \in I, \mu \in B$$

这样 ζ_i 就连续了, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} Z^h = \frac{\partial \eta}{\partial \mu_i}$ 存在且等于 ζ_i 。因此 η 关于 μ_i 连续可微, 偏导数连续。

从而就得到了 $\eta \in C_\mu^1$, 也就是原解 $\varphi(x, \mu)$ 关于 μ 二阶连续可微。

第五章 第 6 周微分方程作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

pg 124 1(1),3,4,5

题目 5.1. 1. 求出齐次线性微分方程组 $\frac{dy}{dt} = A(t)y$ 的通解, 其中 $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$, $t \neq 0$;

解答.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} y_1 \\ \frac{1}{t} y_2 \end{pmatrix}$$

所以单独解这两个微分方程, 可得通解为 $y_1 = C_1 t$, $y_2 = C_2 t$.

题目 5.2. 3. 试证向量函数组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

在任意区间 (a, b) 上线性无关。(显然, 它们的朗斯基行列式 $W(x) \equiv 0$ 。对照定理 6.2 可知, 上述三个线性无关的向量函数不可能同时满足任何一个三阶的齐次线性微分方程组。)

解答. 假设 $1, x, x^2$ 在区间 (a, b) 上线性相关, 即存在不全为 0 的 c_1, c_2, c_3 , 使得 $c_1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0$, 由于左边是一个二次多项式, 至多存在两个零点, 除非恒为 0, 所以得到矛盾。因此这个向量组在任意区间 (a, b) 线性无关。

题目 5.3. 4. 试证基解矩阵完全决定齐次线性微分方程组, 即如果方程组

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y \quad \text{与} \quad \frac{dy}{dx} = B(x)y$$

有一个相同的基解矩阵, 则 $A(x) \equiv B(x)$ 。

解答. 假设矩阵 Φ 是这两个方程的基解矩阵, 那么这两个方程的基本解组就可以写成 $(y_1, \dots, y_n)$, 每个 y_i 就是 Φ 的第 i 列。于是

$$\frac{dy_i}{dx} = A(x)y_i = B(x)y_i \implies A(x)\Phi = B(x)\Phi$$

两边同乘 Φ^{-1} , 有 $A(x) = B(x)$ 。

题目 5.4. 5. 设 $\Phi(x)$ 是线性齐次微分方程组 $\frac{dy}{dx} = A(x)y$ 的一个基解矩阵, 并且 n 维向量函数 $f(x, y)$ 在区域 $E = \{(x, y) | a < x < b, |y| < +\infty\}$ 上连续, 则求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

等价于求解 (向量形式的) 积分方程

$$y(x) = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^x \Phi(x)\Phi^{-1}(s)f(s, y(s))ds,$$

其中 $x_0 \in (a, b)$ 。

解答. 因为 $\Phi(x)$ 是一个基解矩阵, 所以 $\frac{d\Phi(x)}{dx} = A(x)\Phi(x)$, 并且 $\Phi(x)$ 可逆。然后求 Φ^{-1} 的导数, 对 $\Phi(x)\Phi^{-1}(x) = I$ 两边求导,

$$\frac{d\Phi(x)}{dx}\Phi^{-1}(x) + \Phi(x)\frac{d\Phi^{-1}(x)}{dx} = 0 \implies \frac{d\Phi^{-1}(x)}{dx} = -\Phi^{-1}(x)A(x)$$

所以, 在方程 $\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x, y)$ 两边同时左乘上 $\Phi^{-1}(x)$, 有

$$\Phi^{-1}(x)\frac{dy}{dx} = \Phi^{-1}(x)A(x)y + \Phi^{-1}(x)f(x, y)$$

令 $z = \Phi^{-1}(x)y$, 于是

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\Phi^{-1}(x)}{dx}y + \Phi^{-1}(x)\frac{dy}{dx} = -\Phi^{-1}(x)A(x)y + \Phi^{-1}(x)\frac{dy}{dx}$$

所以原方程等价于 $\frac{dz}{dx} = \Phi^{-1}(x)f(x, \Phi(x)z)$, 两边积分, 有

$$z = z_0 + \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)f(s, y)ds$$

代入 $z = \Phi^{-1}(x)y$ 并化简后可得

$$y(x) = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^x \Phi(x)\Phi^{-1}(s)f(s, y(s))ds$$

题目 5.5. 设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ 是齐次线性微分方程在区间 (a, b) 上的一个基本解组, 则非齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

的通解为

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \dots + C_n\varphi_n(x) + \varphi^*(x),$$

其中 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 是任意常数, 而

$$\varphi^*(x) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \cdot \int_{x_0}^x \frac{W_k(s)}{W(s)} f(s) ds.$$

是方程 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_n(x)y = f(x)$ 的一个特解。这里 $W(x)$ 是 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ 的朗斯基行列式, 而 $W_k(x)$ 是 $W(x)$ 中第 n 行第 k 列元素的代数余子式 (亦即, 以 $(0, 0, \dots, 0, 1)$ 的转置替换 $W(x)$ 中的第 k 列后所得的行列式)。

解答. 将高阶的微分方程转化为一阶微分方程组

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & \cdots & -a_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(s) \end{pmatrix}$$

应用定理 6.3 得到他的通解。然后就只需要说明向量函数 $\int_{x_0}^x \Phi(x)\Phi^{-1}(s)f(s, y(s))ds$ 的第一个分量是 $\varphi^*(x)$ 。

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \Phi(x)\Phi^{-1}(s)f(s, y(s))ds &= \int_{x_0}^x \frac{\Phi(x)}{W(x)} \begin{pmatrix} * & * & W_1(x) \\ * & * & W_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & W_n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(s) \end{pmatrix} ds \\ &= \int_{x_0}^x \frac{f(s)}{W(x)} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ & * & * & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1(x) \\ W_2(x) \\ \vdots \\ W_n(x) \end{pmatrix} ds \\ &= \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \cdot \int_{x_0}^x \frac{W_k(s)}{W(s)} f(s) ds \end{aligned}$$

题目 5.6. 3. 考虑微分方程 $y'' + q(x)y = 0$ 。

(1) 设 $y = \varphi(x)$ 与 $y = \psi(x)$ 是它的任意两个解, 试证 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的朗斯基行列式恒等于一个常数。

(2) 已知方程有一个特解为 $y = e^x$, 试求这方程的通解, 并确定 $q(x)$ 。

解答. (1) 记 $W(x) = \begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix} = \varphi\psi' - \psi\varphi'$ 。求导得

$$W'(x) = \varphi\psi'' - \psi\varphi'' = \varphi(-q(x)\varphi) - \psi(-q(x)\psi) = 0$$

所以 $W(x)$ 是一个常数。

(2) 代入 $y = e^x$, $e^x + q(x)e^x = 0 \implies q(x) = -1$ 。所以方程变为 $y'' - y = 0$, 特征方程为 $\lambda^2 - \lambda = 0 \implies \lambda = 1$ 或 -1 , 所以通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$ 。

备注 5.1. 别忘了朗斯基行列式的求导是

$$\frac{dW}{dx} = \text{tr}(A)W, \quad \frac{dy}{dx} = Ay$$

第 (2) 问, 设另一个特解为 $\varphi(x)$, 于是

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & e^x \\ \varphi'(x) & e^x \end{vmatrix} = e^x(\varphi(x) - \varphi'(x)) = C$$

从而可以得到 $\varphi(x) = \frac{C}{2}e^{-x}$ 。这样的话通解就是 $C_1e^x + C_2e^{-x}$ 。

题目 5.7. 4. 考虑微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是区间 $I = (a, b)$ 上的连续函数。

(1) 设 $y = \varphi(x)$ 是方程在区间 I 上的一个非零解 (即 $\varphi(x)$ 在区间 I 上不恒等于零), 试证 $\varphi(x)$ 在区间 I 上只有简单零点 (即: 如果存在 $x_0 \in I$, 使得 $\varphi(x_0) = 0$, 那么必有 $\varphi'(x_0) \neq 0$)。并由此进一步证明, $\varphi(x)$ 在任意有限区间上至多有有限个零点, 从而每一个零点都是孤立的。

(2) 在例 1 中, 对一般的情形证明相应的结论。

解答. (1) 使用反证法, 假设存在 $x_0 \in I$, $\varphi(x_0) = 0$ 且 $\varphi'(x_0) = 0$, 那么由解的存在唯一性定理, 那么方程只有唯一的解 $y = 0$, 矛盾。因此 $\varphi(x)$ 在区间 I 上只有简单零点。

假如在区间 I 上有无限个零点, 那么会存在一个收敛子列记为 $\{x_n\}$, $x_n \rightarrow x$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时. 有中值定理, 存在 $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$,

$$\varphi'(\xi_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}} = 0$$

所以两边取极限, 就会存在 x , 使得 $\varphi'(x) = 0, \varphi(x) = 0$, 与简单零点矛盾. 所以至多只有有限个零点.

(2) - 2- 2例 1: 设 $y = \varphi(x)$ 是二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的一个非零解, 其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是区间 (a, b) 上的连续函数, 则方程的通解为

$$y = \varphi(x) \left[C_1 + C_2 \int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi^2(s)} e^{-\int_{x_0}^s p(t) dt} ds \right],$$

其中 C_1 和 C_2 为任意常数.

设 $\varphi(x)$ 存在零点, 不妨设只有一个, 多个也是一样, 记零点为 $\xi \in (x_0, \infty)$, $E(s) = e^{-\int_{x_0}^s p(t) dt}$, 由于 $\varphi(\xi) = 0, \varphi'(\xi) \neq 0$, 所以在 $s \in (\xi - \delta, \xi)$ 中, $\varphi(s) = \varphi'(s)(s - \xi) + o(s - \xi)$, $E(s) = E(\xi) + o(1)$. 于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \xi} \varphi(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi^2(s)} E(s) ds &= \lim_{x \rightarrow \xi} \varphi(x) \left(\int_{x_0}^{\xi - \delta} + \int_{\xi - \delta}^x \right) \frac{E(s) ds}{\varphi^2(s)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \varphi(x) \int_{\xi - \delta}^x \frac{E(s) ds}{\varphi^2(s)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \xi} \varphi(x) \int_{\xi - \delta}^x \frac{E(\xi) + o(1)}{[\varphi'(\xi)(s - \xi) + o(s - \xi)]^2} ds \\ &= \lim_{x \rightarrow \xi} \varphi(x) \int_{\xi - \delta}^x \frac{E(\xi)}{[\varphi'(\xi)(s - \xi)]^2} \cdot \frac{1 + o(1)}{(1 + o(1))^2} ds \\ &= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\varphi'(\xi)(x - \xi) E(\xi) + o(x - \xi)}{\varphi'(\xi)^2} \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{x - \xi} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \xi} \left[\frac{(x - \xi) E(\xi)}{\varphi'(\xi) \delta} - \frac{E(\xi)}{\varphi'(\xi)} + o(1) \right] \\ &= -\frac{E(\xi)}{\varphi'(\xi)} \end{aligned}$$

是一个有限的值!

题目 5.8. 5. 设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的一个基本解组, 试证:

- (1) 方程的系数函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 能由这个基本解组唯一地确定.
- (2) $u(x)$ 和 $v(x)$ 没有共同的零点.

解答. (1) 将 $u(x), v(x)$ 代入方程, 可得

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = 0 \\ v'' + pv' + qv = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} p = \frac{u''v - v''u}{uv' - vu'} \\ q = \frac{v''u' - v'u''}{uv' - vu'} \end{cases}$$

由于 u, v 是基本解组, 所以朗斯基行列式 $\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = uv' - vu' \neq 0$, 这说明了上面方程组有唯一解. 所以 p, q 可以由基本解组唯一确定.

(2) 假设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 有一个共同的零点 x_0 , 即 $u(x_0) = v(x_0) = 0$. 则朗斯基行列式

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} u(x_0) & v(x_0) \\ u'(x_0) & v'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ u'(x_0) & v'(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

但 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是方程的一个基本解组, 故它们线性无关, 从而朗斯基行列式恒不为零, 矛盾. 因此 $u(x)$ 和 $v(x)$ 没有共同的零点.

题目 5.9. 7. 设欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n x y' + a_n y = 0,$$

其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 都是常数, $x > 0$. 试利用适当的变换把它化成常系数齐次线性微分方程.

解答. 令 $x = e^t$, 那么

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \cdot \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(e^{-t} \cdot \frac{dy}{dt} \right) = \frac{de^{-t}}{dt} \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \right) = e^{-2t} \left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \right) \end{aligned}$$

这样代入进去就正好能和前面的 x 消掉, 变成常系数齐次线性微分方程.

题目 5.10. 10. 求解下列常系数线性微分方程:

- (1) $y'' + y' - 2y = 2x, y(0) = 0, y'(0) = 1;$
- (2) $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x};$
- (3) $y'' + 2y' = 3 + 4 \sin 2x;$

解答. (1) 先求齐次方程的通解, 特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \implies \lambda = -2$ 或 1 , 所以通解是

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$$

然后求特解, 设 $y = ax + b$, 代入得

$$a - 2ax - 2b = 2x \implies (2 + 2a)x = a - 2b$$

所以 $a = -1, b = -\frac{1}{2}$, 特解为 $y = -x - \frac{1}{2}$.

所以原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - x - \frac{1}{2}$$

代入边界条件, 有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = 0 \\ -2C_1 + C_2 - 1 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

最后得到解为

$$y = -\frac{1}{2}e^{-2x} + e^x - x - \frac{1}{2}.$$

(2) 先求齐次方程的通解, 特征方程为 $2\lambda^2 - 4\lambda - 6 = 0 \implies \lambda = -1$ 或 3 , 所以通解是

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

然后求特解, 设特解为 $Q(x)e^{2x}$, $Q(x)$ 是多项式, 将原方程简记为 $P\left(\frac{d}{dx}\right)y = 3e^{2x}$, 其中 $P(\lambda) = 2\lambda^2 - 4\lambda - 6$, 代入可得

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dx}\right)y &= 2\frac{d^2(Q(x)e^{2x})}{dx^2} - 4\frac{d(Q(x)e^{2x})}{dx} - 6Q(x)e^{2x} \\ &= 2Q''(x)e^{2x} + 8Q'(x)e^{2x} + 8Q(x)e^{2x} - 4Q'(x)e^{2x} - 8Q(x)e^{2x} - 6Q(x)e^{2x} \\ &= [2Q''(x) + 4Q'(x) - 6Q(x)]e^{2x} = 3e^{2x} \end{aligned}$$

所以我可以确定 $Q(x)$ 是常数, 故特解是 $-\frac{1}{2}e^{2x}$. 所以常微分方程的解是

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}.$$

(3) 先求齐次方程的通解, 特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda = 0 \implies \lambda = 0$ 或 -2 , 所以通解是

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2$$

然后求特解, 设特解为 $A \sin 2x + B \cos 2x + Cx$, 代入得

$$-4A \sin 2x - 4B \cos 2x + 2(2A \cos 2x - 2B \sin 2x + C) = 3 + 4 \sin 2x$$

即

$$(-4A - 4B) \sin 2x + (4A - 4B) \cos 2x + 2C = 3 + 4 \sin 2x \implies A = -\frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{3}{2}$$

所以特解为 $y = -\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{2}x$, 所以, 方程的通解为

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{2}x.$$

第六章 第 7 周微分方程作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

p152 10 (4) (5) (11) (12)

题目 6.1. (4) $y''' + 3y' - 4y = 0$;

(5) $y''' - 2y'' - 3y' + 10y = 0$;

(11) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$;

(12) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$;

解答. (4) 特征方程为 $\lambda^3 + 3\lambda - 4 = 0$, 三个根为 $\lambda = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$. 所以通解为

$$y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{2} x \right) + C_3 \sin \left(\frac{\sqrt{15}}{2} x \right) \right).$$

(5) 特征方程为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda + 10 = 0$, 三个根为 $\lambda = -2, 2 \pm i$, 所以通解为

$$y = C_1 e^{-2x} + e^{2x} (C_2 \cos x + C_3 \sin x).$$

(11) 先求齐次方程的通解。特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, 两个根为 $\lambda = 1 \pm i$, 所以通解为

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

再找特解。设特解为 $y_s = (A(x) \cos x + B(x) \sin x) e^x$, 于是

$$\begin{aligned} y'_s &= e^x \left[(A + A' + B) \cos x + (B + B' - A) \sin x \right] \\ y''_s &= e^x \left[(A'' + 2A' + 2B' + 2B) \cos x + (B'' - 2A' + 2B' - 2A) \sin x \right] \end{aligned}$$

代入得

$$(A'' + 2B') \cos x + (B'' - 2A') \sin x = 4 \cos x$$

可得 $y_s = 2xe^x \sin x$, 所以原非齐次方程的通解为

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2xe^x \sin x.$$

(12) 先求齐次方程的通解。特征方程为 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, 两个根为 $\lambda = 2, 3$, 所以通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

再找特解。设特解为 $y_s = P(x) e^{-x}$, 于是

$$y'_s = (P'(x) - P(x)) e^{-x}$$

$$y''_s = (P''(x) - 2P'(x) + P(x)) e^{-x}$$

代入得

$$(P'' - 7P' + 12P) e^{-x} = (12x - 7) e^{-x}$$

于是特解为 $y = x e^{-x}$, 所以原非齐次方程的通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x e^{-x}.$$

p243 例 2

题目 6.2. 例 2 求解微分方程组

$$\begin{cases} \alpha \frac{du}{dt} = (\beta - \gamma)vw, & (1) \\ \beta \frac{dv}{dt} = (\gamma - \alpha)wu, & (2) \\ \gamma \frac{dw}{dt} = (\alpha - \beta)uv, & (3) \end{cases}$$

其中 $\alpha > \beta > \gamma > 0$ 是给定的常数。

解答. (1) $\cdot u + (2) \cdot v + (3) \cdot w$ 可得

$$\alpha u \frac{du}{dt} + \beta v \frac{dv}{dt} + \gamma w \frac{dw}{dt} = 0$$

所以 $V_1(u, v, w) = \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = C_1$ 是一个首次积分.

(1) $\cdot \alpha u + (2) \cdot \beta v + (3) \cdot \gamma w$ 可得

$$\alpha^2 u \frac{du}{dt} + \beta^2 v \frac{dv}{dt} + \gamma^2 w \frac{dw}{dt} = 0$$

所以 $V_2(u, v, w) = \alpha^2 u^2 + \beta^2 v^2 + \gamma^2 w^2 = C_2$ 是一个首次积分.

从而可以得到

$$v^2 = \frac{C_1 \gamma - C_2 - (\alpha \gamma - \alpha^2) u^2}{\beta \gamma - \beta^2} = K_1 + K_2 u^2, \quad w^2 = \frac{C_1 \beta - C_2 - (\alpha \beta - \alpha^2) u^2}{\beta \gamma - \gamma^2} = L_1 + L_2 u^2$$

代入第一个微分方程, 有

$$\alpha \frac{du}{dt} = (\beta - \gamma) \sqrt{K_1 + K_2 u^2} \sqrt{L_1 + L_2 u^2}$$

这样就可以解出

$$\int \frac{\alpha du}{(\beta - \gamma)\sqrt{K_1 + K_2 u^2}\sqrt{L_1 + L_2 u^2}} = t + M$$

然后 v, w 就可以求出来了。

p250 1

题目 6.3. 1. 设已知微分方程组 (10.17) 的 k ($1 \leq k \leq n$) 个互相独立的首次积分

$$V_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

(这里所谓 k 个互相独立的首次积分, 其含意是: 矩阵 $\left(\frac{\partial V_i}{\partial y_j}\right)_{k \times n}$ 的秩等于 k , 或不妨设雅可比行列式

$$\frac{D(V_1, V_2, \dots, V_k)}{D(y_1, y_2, \dots, y_k)}$$

不等于 0), 则利用这 k 个互相独立的首次积分可以把微分方程组 (10.17) 降低 k 阶。

解答. 考虑映射

$$\Phi(x, y_1, \dots, y_n) = (x, V_1, \dots, V_k, y_{k+1}, \dots, y_n)$$

他的雅可比矩阵为

$$J\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial V_1}{\partial y_k} & \frac{\partial V_1}{\partial y_{k+1}} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial V_k}{\partial x} & \frac{\partial V_k}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial V_k}{\partial y_k} & \frac{\partial V_k}{\partial y_{k+1}} & \dots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

由于 $\text{rank} \left(\frac{\partial V_i}{\partial y_j}\right)_{k \times n} = k$, 不妨设他的前 k 列满秩。交换一下变量的位置可以得到 $\det J\Phi \neq 0$, 所以 Φ 是局部微分同胚, 于是原方程组在新坐标下就变成了

$$\frac{dV_i}{dx} = 0 \quad (i = 1, \dots, k), \quad \frac{dy_i}{dx} = F_i(x, C_1, \dots, C_k, y_{k+1}, \dots, y_n)$$

这就是降了 k 阶。

陈述并证明秩定理

题目 6.4. 设 $U \subset \mathbb{R}^m$ 是开集, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射。若在 U 内每一点, f 的雅可比矩阵的秩都等于同一个常数 r ($0 \leq r \leq \min(m, n)$), 则对任意一点 $p \in U$, 存在:

- p 的邻域 $V \subset U$,

- $\mathbb{R}^m$ 中的开集 $\tilde{V}$ 上的 C^1 微分同胚 $\varphi: V \rightarrow \tilde{V}$ (变量替换, 满足 $\varphi(p) = 0$),
- $\mathbb{R}^n$ 中的开集 W 上的 C^1 微分同胚 $\psi: f(V) \rightarrow W$ (值域替换, 满足 $\psi(f(p)) = 0$),

使得复合映射 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \tilde{V} \rightarrow W$ 具有如下简单形式:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

解答. 取定点 $a \in U$, 在 a 附近 $\text{rank } Jf = r$.

第一步: 构造 φ .

因为秩为 r , 不妨设 Jf 左上角 $r \times r$ 的子矩阵秩为 r , 定义映射

$$\varphi(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x), x_{r+1}, \dots, x_m) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

在 a 处他的雅可比矩阵是

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{r+1}} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} & \frac{\partial f_r}{\partial x_{r+1}} & \cdots \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

因为 $\det J\varphi(a) \neq 0$, 所以在 a 附近是一个微分同胚, 这样

$$f \circ \varphi^{-1}(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_r, g_{r+1}(y), \dots, g_n(y)).$$

其中 $g_i(y) := f_i \circ \varphi^{-1}(y)$.

第二步: 构造 ψ .

令 $F = f \circ \varphi^{-1}$. F 的雅可比矩阵仍为 r ,

$$JF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial g_{r+1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial y_r} & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial y_{r+1}} & \cdots & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \frac{\partial g_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_r} & \frac{\partial g_n}{\partial y_{r+1}} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

所以每一个 $\frac{\partial g_l}{\partial y_s}$ ($l > r, s > r$) 都等于 0, $g_k(y)$ 实际上不依赖于 $y_{r+1}, \dots, y_m$, 只是 $y_1, \dots, y_r$

的函数，因此令 $h_k(y_1, \dots, y_r) = g_k(y)$ ，我们有

$$F(y) = (y_1, \dots, y_r, h_{r+1}(y_1, \dots, y_r), \dots, h_n(y_1, \dots, y_r))$$

令 $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, x_{r+1} - h_{r+1}(x_1, \dots, x_r), \dots, x_n - h_n(x_1, \dots, x_r))$$

$$\det(J\psi) = \det \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ & I_{n-r} \end{pmatrix} = 1$$

所以 ψ 在局部也是一个微分同胚。并且

$$\begin{aligned} \psi \circ F(y) &= (y_1, \dots, y_r, h_{r+1}(y_1, \dots, y_r) - h_{r+1}(x_1, \dots, x_r), \dots) \\ &= (y_1, \dots, y_r, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

于是我们就找到了这样的 ψ 和 φ 。

第七章 第 8 周微分方程作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 7.1. 推导三维波方程的解的公式

解答. 固定空间点 M , 定义 u 的球面平均:

$$U(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(M)} u(P, t) dS_P$$

在球坐标下,

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}u$$

对球面取平均时, 角向 Laplace 项的积分为 0, 所以有

$$U_{tt} = a^2 \left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r \right)$$

令 $V(r, t) = rU(r, t)$, 可以发现

$$V_{rr} = \frac{\partial}{\partial r} (U + rU_r) = 2U_r + rU_{rr} = \frac{1}{a^2}V_{tt}$$

于是 V 满足一维波方程, 且初值为

$$V(r, 0) = r\Phi(r), \quad V_t(r, 0) = r\Psi(r),$$

其中

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(M)} \varphi(P) dS_P, \quad \Psi(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(M)} \psi(P) dS_P$$

将 $F(r) := V(r, 0), G(r) := V_t(r, 0)$ 关于 r 做奇延拓, 定义

$$F(r) = \begin{cases} F(r), & r \geq 0 \\ -F(-r), & r < 0 \end{cases}, \quad G(r) = \begin{cases} G(r), & r \geq 0 \\ -G(-r), & r < 0 \end{cases}$$

这样, 新的 F, G 就都是奇函数了。

对奇延拓后的问题使用达朗贝尔公式,

$$V(r, t) = \frac{1}{2} [F(r+at) + F(r-at)] + \frac{1}{2a} \int_{r-at}^{r+at} G(s) ds$$

因为 $V = rU$, 所以 $V_r(r, t) = U(r, t) + rU_r(r, t)$, 因为 $U(0, t) = u(M, t)$, 所以 $V_r(0, t) = u(M, t)$ 。

所以, 对 r 求导, 有

$$V_r(r, t) = \frac{1}{2} [F'(r+at) + F'(r-at)] + \frac{1}{2a} [G(r+at) - G(r-at)]$$

令 $r = 0$, 有

$$\begin{aligned} V_r(0, t) &= \frac{1}{2} [F'(at) + F'(-at)] + \frac{1}{2a} [G(at) - G(-at)] \\ &= F'(at) + \frac{1}{a} G(at) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{a} F(at) \right] + \frac{1}{a} G(at) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}(M)} \varphi dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}(M)} \psi dS \end{aligned}$$

题目 7.2. 计算球坐标下的拉普拉斯

解答. 直角坐标系下:

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

设三维球坐标为

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

其中 $r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$. $f(x, y, z) = g(r, \theta, \varphi)$.

因为 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 所以

$$r_x = \frac{x}{r} = \sin \theta \cos \varphi, \quad r_y = \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \varphi, \quad r_z = \frac{z}{r} = \cos \theta$$

然后因为 $\cos \theta = \frac{z}{r}$, 所以

$$\theta_x = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r}, \quad \theta_y = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r}, \quad \theta_z = -\frac{\sin \theta}{r}.$$

再由 $\tan \varphi = \frac{y}{x}$, 可得

$$\varphi_x = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta}, \quad \varphi_y = \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta}, \quad \varphi_z = 0$$

所以根据链式法则,

$$f_x = g_r r_x + g_\theta \theta_x + g_\varphi \varphi_x = g_r \sin \theta \cos \varphi + g_\theta \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} - g_\varphi \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta}$$

同理可得,

$$f_y = g_r \sin \theta \sin \varphi + g_\theta \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} + g_\varphi \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta}$$

$$f_z = g_z \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r} g_\theta$$

对任意变量 $x_i \in \{x, y, z\}$, 都有

$$f_{x_i} = g_r r_{x_i} + g_\theta \theta_{x_i} + g_\varphi \varphi_{x_i}.$$

于是

$$\Delta f = \sum_i f_{x_i x_i}$$

展开后, 是

$$\begin{aligned} & g_{rr} \sum r_{x_i}^2 + g_{\theta\theta} \sum \theta_{x_i}^2 + g_{\varphi\varphi} \sum \varphi_{x_i}^2 \\ & + 2g_{r\varphi} \sum r_{x_i} \varphi_{x_i} + 2g_{r\theta} \sum r_{x_i} \theta_{x_i} + 2g_{\theta\varphi} \sum \theta_{x_i} \varphi_{x_i} \\ & + g_r \sum r_{x_i x_i} + g_\theta \sum \theta_{x_i x_i} + g_\varphi \sum \varphi_{x_i x_i} \end{aligned}$$

由前面的结果可以看出,

$$\sum r_{x_i}^2 = 1, \quad \sum \theta_{x_i}^2 = \frac{1}{r^2}, \quad \sum \varphi_{x_i}^2 = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

$$\sum r_{x_i} \varphi_{x_i} = \sum r_{x_i} \theta_{x_i} = \sum \theta_{x_i} \varphi_{x_i} = 0$$

$$\sum r_{x_i x_i} = \Delta \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) = \frac{2}{r}, \quad \sum \theta_{x_i x_i} = \frac{\cot \theta}{r^2}, \quad \sum \varphi_{x_i x_i} = 0$$

最终, 合并所有项, 就可以得到

$$\Delta f = g_{rr} + \frac{2}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta} + \frac{\cot \theta}{r^2} g_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} g_{\varphi\varphi}$$

题目 7.3. 利用三维波方程的解的公式, 给出二维波方程解的公式

解答. 三维的泊松公式为

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}(M)} \varphi dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}(M)} \psi dS$$

把二维初值延拓成三维初值:

$$\tilde{\varphi}(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(\xi, \eta), \quad \tilde{\psi}(\xi, \eta, \zeta) = \psi(\xi, \eta),$$

他们不依赖 ζ 也就是说二维解不依赖 z , 所以二维解可以取为

$$v(x, y, t) = u(x, y, 0, t)$$

将三维球面投影到二维圆盘上, 面积微元 $dS = d\sigma \cdot \cos \gamma$, γ 为这两个面积微元法线方向间的夹角, 且

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}{at}$$

然后把上下两片合起来, 令 $\rho = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$, 因此

$$\iint_{S_{at}(M)} \tilde{\varphi} dS = \iint_{\rho < at} \frac{2at\varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}} d\sigma$$

$$\iint_{S_{at}(M)} \tilde{\psi} dS = \iint_{\rho < at} \frac{2at\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}} d\sigma$$

代入三维公式, 就可以得到

$$v(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi a} \iint_{\rho < at} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}} d\sigma \right) + \frac{1}{2\pi a} \iint_{\rho < at} \frac{2at\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}} d\sigma$$

题目 7.4. 陈述并证明二维波方程的有限传播速度 (可以只考虑光滑初值)

解答. 陈述: 设 $u = u(x, y, t)$ 是二维波方程的解, 则 $u(P, t)$ 只依赖初值 φ, ψ 在圆盘

$$B(P, at) = \{Q \in \mathbb{R}^2 : |Q - P| < at\}$$

中的取值。

证明: 由上一题的公式可以看出, 两个积分只在 $\rho < at$ 中求, 所以成立。

题目 7.5. 陈述并证明二维波方程不满足强惠更斯原理

解答. 举一个反例。设 $\varphi = 0, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\psi > 0, \text{supp} \psi \subset B(0, R)$, 当 $t > R/a$ 时, 假如他满足强惠更斯原理, 那么 $u(0, 0, t)$ 应该与 $\psi(0, 0, 0)$ 无关系, 但实际上有公式可知,

$$u(0, 0, t) = \iint_{\text{supp} \psi} \frac{2at\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}} d\sigma$$

也就是说, 即使 $t > R/a$, 在 origin 处, 仍然能感受到初始速度 ψ 的影响。

题目 7.6. 课本 51 页, (5.11) 式下方说 3 维波方程的解以 t^{-1} 的阶趋向于 0, 阅读 5.11 式, 将其陈述为一个定理并证明。

(可以假设初值紧支撑光滑, 5.11 的关键是估计和 M 的选取无关)

解答. 定理陈述: 设 $a > 0$, 考虑三维波方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases}$$

其中 $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ 。则其解 $u(x, t)$ 满足: 存在常数 $L > 0$, 使得对任意 $M \in \mathbb{R}^3$ 和任意 $t \geq 1$, 都有

$$|u(M, t)| \leq \frac{L}{t}.$$

证明: 泊松公式为

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}(M)} \varphi dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}(M)} \psi dS$$

其中 $S_{at}(M)$ 表示以 $M(x, y, z)$ 为球心, at 为半径的球面。为了讨论的方便, 我们进行改写。由于

$$\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}(M)} \varphi dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1(x)} t\varphi(x_1 + at\alpha_1, x_2 + at\alpha_2, x_3 + at\alpha_3) d\omega$$

对 t 求导一次, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}(M)} \varphi dS \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi} \iint_{S_1(x)} \varphi(x + at\alpha) d\omega \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\iint_{S_1(x)} \varphi(x + at\alpha) d\omega + \iint_{S_1(x)} at \sum_{i=1}^3 \varphi_{x_i}(x + at\alpha) \cdot a_i d\omega \right] \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \iint_{S_{at}(M)} \left[\varphi(M') + \nabla \varphi(M') \cdot \overrightarrow{MM'} \right] dS_{M'} \end{aligned}$$

其中 M' 为积分球面上的变动点, 而 $dS_{M'}$ 为面积微元, 于是, 泊松公式就可以改写成

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \iint_{S_{at}(M)} \left[t\psi(M') + \varphi(M') + \nabla \varphi(M') \cdot \overrightarrow{MM'} \right] dS_{M'}$$

因为 φ, ψ 都是紧支撑的, 所以存在 $\rho > 0$, 使得 φ, ψ 以及 $\nabla \varphi$ 都在球 $B_\rho(0)$ 外为 0, 于是上面的积分实际上只需要在 $S_{at}(M) \cap B_\rho(0)$ 上进行。

设 $|\varphi|, |\psi|, |\nabla \varphi|$ 都小于某个与 M 无关的正常数 C , 于是, 被积函数就可以写成

$$\left| t\psi(M') + \varphi(M') + \nabla \varphi(M') \cdot \overrightarrow{MM'} \right| \leq Ct + C + Cat = At + C$$

此外, $S_{at}(M) \cap B_\rho(0)$ 的面积, 不超过 $B_\rho(0)$ 的面积, 也就是 $4\pi\rho^2$, 于是,

$$|u(M, t)| \leq \frac{1}{4\pi a^2 t^2} (At + C) \cdot 4\pi\rho^2 = \frac{\rho^2}{a^2} \left(\frac{A}{t} + \frac{C}{t^2} \right)$$

当 $t \geq 1$ 时, $t^{-2} \leq t^{-1}$, 所以

$$|u(M, t)| \leq \frac{\rho^2}{a^2} (A + C) \frac{1}{t}$$

令 $L = \frac{\rho^2}{a^2} (A + C)$, 他不依赖于空间中 M 点的选取, 这就说明了三维波方程的解以 t^{-1} 的阶趋向于 0。

第八章 第 9 周微分方程作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

1. 证明 p17 定理 2.2 ；

题目 8.1. 若 $W(x, t; \tau)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \\ t = \tau : W = 0, \frac{\partial W}{\partial t} = f(x, \tau) \end{cases}$$

的解（其中 τ 为参数），则

$$u(x, t) = \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau$$

是初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \\ t = \tau : u = 0, \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

的解。

解答. 直接带入验证。

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau = W(x, t; t) + \int_0^t W_t(x, t; \tau) d\tau.$$

其中由初值条件， $W(x, t; t) = 0$ ，再对 t 求导

$$\begin{aligned} u_{tt} &= W_t(x, t; t) + \int_0^t W_{tt}(x, t; \tau) d\tau \\ &= f(x, t) + \int_0^t W_{tt}(x, t; \tau) d\tau \end{aligned}$$

另外，

$$u_{xx} = \int_0^t W_{xx}(x, t; \tau) d\tau$$

于是

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) + \int_0^t (W_{tt} - a^2 W_{xx})(x, t; \tau) d\tau = f(x, t)$$

最后验证初值

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = \int_0^0 (\cdot) d\tau = 0$$

所以

$$u(x, t) = \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau$$

是初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \\ t = \tau : u = 0, \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

的解。

2. P20, 3,10 (承认唯一性, 可考虑利用 (2.38));

题目 8.2. 利用传播波法, 求解波动方程的 Goursat 问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (-at < x < at, t > 0), \\ u|_{x-at=0} = \varphi(x) & (t > 0) \\ u|_{x+at=0} = \psi(x) & (t > 0), \varphi(0) = \psi(0) \end{cases}$$

解答. 令 $\xi = x - at, \zeta = x + at$, 于是

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\zeta \zeta_x = u_\xi + u_\zeta$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\zeta} \zeta_x + u_{\zeta\xi} \xi_x + u_{\zeta\zeta} \zeta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\zeta} + u_{\zeta\zeta}$$

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\zeta \zeta_t = -au_\xi + au_\zeta$$

$$u_{tt} = -au_{\xi\xi} \xi_t - au_{\xi\zeta} \zeta_t + au_{\zeta\xi} \xi_t + au_{\zeta\zeta} \zeta_t = a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\zeta} + a^2 u_{\zeta\zeta}$$

从而

$$\begin{aligned} u_{tt} = a^2 u_{xx} &\implies a^2 (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\zeta} + u_{\zeta\zeta}) = a^2 (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\zeta} + u_{\zeta\zeta}) \\ &\implies u_{\xi\zeta} = 0 \end{aligned}$$

将这个方程关于 ξ 积分一次, 关于 ζ 积分一次, 就可以得到通解为

$$u(\xi, \zeta) = F(\xi) + G(\zeta)$$

代回原来的变量, 通解就是

$$u(x, t) = F(x - at) + G(x + at)$$

代入初始条件, 得到

$$F(0) + G(2x) = \varphi(x), \quad F(-2x) + G(0) = \psi(-x)$$

所以

$$G(x + at) = \varphi\left(\frac{x + at}{2}\right) - F(0), \quad F(x - at) = \psi\left(\frac{x - at}{2}\right) - G(0)$$

由于 $\varphi(0) = \psi(0)$, 所以

$$u(0, 0) = F(0) + G(0) = \varphi(0) = \psi(0)$$

所以

$$u(x, t) = \varphi\left(\frac{x + at}{2}\right) + \psi\left(\frac{x - at}{2}\right) - \varphi(0).$$

题目 8.3. 证明: 在柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) & (t > 0, -\infty < x < \infty), \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

中, 若 $f(x, t)$ 是 x 的奇函数, 则 $u(0, t) \equiv 0$; 若 $f(x, t)$ 是 x 的偶函数, 则 $u_x(0, t) \equiv 0$.

解答. 这个柯西问题的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau$$

若 $f(x, t)$ 是 x 的奇函数,

$$u(0, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau$$

考虑 $-u(0, t)$, 有

$$\begin{aligned} -u(0, t) &= \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} -f(y, \tau) dy d\tau \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(-y, \tau) dy d\tau \\ &= -\frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-a(t-\tau)}^{-a(t-\tau)} f(z, \tau) dz d\tau \end{aligned}$$

因为 $f(\cdot, t)$ 是奇函数, 所以

$$-\int_{-a(t-\tau)}^{-a(t-\tau)} f(z, \tau) dz = \int_{a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(y, \tau) dy$$

所以 $u(0, t) = -u(0, t) \implies u(0, t) \equiv 0$.

若 $f(x, t)$ 是 x 的偶函数,

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^t [f(x+a(t-\tau), \tau) - f(x-a(t-\tau), \tau)] d\tau \\ u_x(0, t) &= \frac{1}{2a} \int_0^t [f(a(t-\tau), \tau) - f(-a(t-\tau), \tau)] d\tau \equiv 0 \end{aligned}$$

题目 8.4. 3. 陈述波方程解的唯一性和有限传播速度, 并利用能量方法证明 (需包含课上能量不等式推导)

解答. 波方程解的唯一性的陈述: 考虑初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), & (x, y) \in \Omega, t > 0 \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \\ u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \\ u|_{\Gamma} = 0, \end{cases}$$

其中 $\Gamma = \partial\Omega$, 若该问题存在足够光滑的解, 则解是唯一的。

证明: 考虑齐次方程

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad u|_{\Gamma} = 0$$

定义能量

$$E(t) = \int_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy$$

对 t 求导, 并应用分部积分,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy = \int_{\Omega} [2u_t u_{tt} - 2a^2 u_t (u_{xx} + u_{yy})] dx dy = 0$$

所以 $E(t) = E(0)$, 就是能量守恒。

令 u_1, u_2 是上述问题两个不同的解, 令 $w = u_1 - u_2$, 则对 w 定义能量 $E_w(t)$, 由能量守恒 $E_w(t) = E_w(0) = 0$, 由于被积函数非负, 积分为 0, 所以

$$w_t = w_x = w_y = 0$$

从而由 $w(x, y, 0) = 0$ 可以得到 $w \equiv 0$, 于是 $u_1 = u_2$, 证明了唯一性。

有限传播速度的陈述: 对于全平面上的柯西问题

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$$

固定点 (x_0, y_0) 和半径 $R > 0$, 考虑特征锥

$$K = \left\{ (x, y, t) : 0 \leq t \leq \frac{R}{a}, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (R - at)^2 \right\}$$

其底面为

$$\Omega_0 = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\}$$

时刻 t 的截面为

$$\Omega_t = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (R - at)^2\}.$$

若在底面 Ω_0 上初值为零, 即

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0$$

则 $u \equiv 0$ 于整个特征锥 K 内。

证明: 令 $e = \frac{1}{2} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)]$, 构造

$$P = (-a^2 u_t u_x, -a^2 u_t u_y, e)$$

计算它的散度:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} P &= \frac{\partial}{\partial x} (-a^2 u_t u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (-a^2 u_t u_y) + \frac{\partial e}{\partial t} \\ &= -a^2 (u_{tx} u_x + u_{xx}) - a^2 (u_{ty} u_y + u_{tyy}) + u_t u_{tt} + a^2 u_x u_{xt} + a^2 u_y u_{yt} \\ &= u_t [u_{tt} - a^2 (u_{xx} + u_{yy})] = 0 \end{aligned}$$

考虑圆台, 下底面是

$$\Omega_0 : t = 0, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$$

上底面是

$$\Omega_{t_1} : t = t_1, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (R - at_1)^2$$

侧面记为 Σ . 所以由高斯公式,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D \operatorname{div} P dx dy dt = \int_{\partial D} P \cdot \nu dS \\ &= \int_{\Omega_{t_1}} P \cdot \nu dx dy + \int_{\Omega_0} P \cdot \nu dx dy + \int_{\Sigma} P \cdot \nu dS \\ &= \int_{\Omega_{t_1}} e dx dy - \int_{\Omega_0} e dx dy + \int_{\Sigma} P \cdot \nu dS \end{aligned}$$

而侧面的法向量 $\nu = (x - x_0, y - y_0, a(t_0 - t))$,

$$\begin{aligned} P \cdot \nu &= a(t_0 - t) \frac{1}{2} [u_t^2 + a^2 |\nabla u|^2] - (x - x_0) a^2 u_t u_x - (y - y_0) a^2 u_t u_y \\ &= a(t_0 - t) \left[\frac{1}{2} u_t^2 - a u_t (u_x + u_y) + \frac{1}{2} a^2 (u_x^2 + u_y^2) \right] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

于是

$$\int_{\Omega_{t_1}} e dx dy < \int_{\Omega_0} e dx dy$$

假设初始数据在底面 Ω_0 上为零:

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_0$$

此时底面能量为 0, 由能量不等式, 每个截面的能量都是零, 所以在每个截面上,

$$u_t = 0, \quad u_x = u_y = 0$$

于是 u 在整个特征锥内为常数, 又因为在底面上 $u(x, y, 0) = 0$, 所以这个常数只能是 0, 这就是有限传播速度。

第九章 第 11 周微分方程作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 9.1. 1. 基于傅立叶变换和逆变换公式，从傅立叶观点出发重新推到三维波方程的泊松公式。

解答. 三维波方程的 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0 \\ u(0, x) = \varphi(x) \\ u_t(0, x) = \psi(x) \end{cases}$$

傅里叶变换公式：

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi$$

并且有

$$\widehat{\Delta f}(\xi) = -|\xi|^2 \hat{f}(\xi).$$

对 $u(t, x)$ 做傅里叶变换，可以将波方程 $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$ 变成

$$\hat{u}_{tt} + a^2 |\xi|^2 \hat{u} = 0$$

初值变成 $\hat{u}(0, \xi) = \hat{\varphi}(\xi)$, $\hat{u}_t(0, \xi) = \hat{\psi}(\xi)$. 因此将初值代入通解，可以得到

$$\hat{u}(\xi, t) = \cos(at|\xi|) \hat{\varphi}(\xi) + \frac{\sin(at|\xi|)}{a|\xi|} \hat{\psi}(\xi).$$

再进行傅里叶逆变换，

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{u}(\xi, t) e^{i\xi \cdot x} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \cos(at|\xi|) \hat{\varphi}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(at|\xi|)}{a|\xi|} \hat{\psi}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi \end{aligned}$$

下面研究 $\frac{\sin(at|\xi|)}{a|\xi|}$ 的傅里叶逆变换。令 $r = |\xi|, \xi \cdot x = r|x|\cos\theta$

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^{3/2} \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(at|\xi|)}{a|\xi|} \right] &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(atr)}{ar} \int_{S^2} e^{ir|x|\cos\theta} d\Omega dr \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(atr)}{ar} \int_0^\pi 2\pi e^{ir|x|\cos\theta} r^2 \sin\theta d\theta dr \\
 &= 4\pi \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(atr)}{ar} \cdot \frac{\sin(r|x|)}{r|x|} r^2 dr \\
 &= \frac{4\pi}{a|x|} \int_{\mathbb{R}_+} \sin(atr) \sin(r|x|) dr \\
 &= \frac{2\pi}{a|x|} \int_{\mathbb{R}_+} [\cos((at - |x|)r) - \cos((at + |x|)r)] dr \\
 &= \frac{4\pi}{a|x|} \frac{\pi}{2} [\delta(at - |x|) - \delta(at + |x|)]
 \end{aligned}$$

因为 $at + |x| > 0$, 所以 $\delta(at + |x|) = 0$, 所以

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(at|\xi|)}{a|\xi|} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi a|x|}} \frac{\pi}{2} \delta(at - |x|)$$

利用 δ 函数的性质, 在分布的支撑集 $|x| = at$ 上可进一步化简,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi a|x|}} \frac{\pi}{2} \delta(at - |x|) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 t} \delta(|x| - at) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 t} \delta_{S_{at}}(x).$$

于是代入原式:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(at|\xi|)}{a|\xi|} \hat{\psi}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi &= \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin(at|\xi|)}{a|\xi|} \hat{\psi}(\xi) \right] \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 t} \delta_{S_{at}}(x) \right) * \psi(x) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} \psi(z - x) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 t} \delta_{S_{at}}(z) dz \\
 &= \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} \psi(y) dS_y.
 \end{aligned}$$

然后第一项,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \cos(at|\xi|) \hat{\varphi}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi &= \mathcal{F}^{-1} [\cos(at|\xi|) \hat{\varphi}(\xi)] \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 t} \delta_{S_{at}}(x) \right) * \varphi(x) \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} \varphi(y) dS_y \right]
 \end{aligned}$$

综上, 就得到了三维波方程的泊松公式

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} \varphi(y) dS_y \right] + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} \psi(y) dS_y.$$

2.p20 8

题目 9.2. 求解波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t \sin x & (t > 0, -\infty < x < \infty) \\ u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin x & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

解答. 将这个初值问题分成两部分:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t \sin x \\ u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (1), \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin x \end{cases} \quad (2)$$

问题 (2) 的解由达朗贝尔公式得到:

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \sin \alpha d\alpha = \frac{1}{2} [\cos(x-t) - \cos(x+t)].$$

问题 (1) 的解由齐次化原理得到:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \tau \sin y dy d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \tau [\cos(x-(t-\tau)) - \cos(x+(t-\tau))] d\tau \\ &= \frac{1}{2} [t \sin x - \cos(x-t) + \cos x] - \frac{1}{2} [-t \sin x - \cos(x+t) + \cos x] \\ &= t \sin x - \frac{1}{2} \cos(x-t) + \frac{1}{2} \cos(x+t) \end{aligned}$$

两者相加就得到原方程的解:

$$u(t, x) = t \sin x$$

3.p29 证明引理 3.2

题目 9.3. 引理 3.2: 设 $f(x)$ 是区间 $[0, l]$ 上的连续函数, 他的 m 阶导数连续, $m+1$ 阶导数分段连续, 并且

$$f^{(n)}(0) = f^{(n)}(l) = 0 \quad \left(n = 0, 2, \dots, 2 \left[\frac{m}{2} \right] \right)$$

如果将 $f(x)$ 在区间 $[0, l]$ 上展开为傅里叶级数

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

则由系数 a_k 所构成的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} k^m |a_k|$ 是收敛的。

解答. 由系数公式

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \left(\frac{k\pi}{l} x \right) dx \\ &= -\frac{2}{l} \int_0^l f(x) \frac{l}{k\pi} d \cos \left(\frac{k\pi}{l} x \right) \\ &= \frac{2}{l} \frac{l}{k\pi} \int_0^l f'(x) \cos \left(\frac{k\pi}{l} x \right) dx \\ &= -\frac{2}{l} \left(\frac{l}{k\pi} \right)^2 \int_0^l f''(x) \sin \left(\frac{k\pi}{l} x \right) dx \end{aligned}$$

当 m 为偶数时, 设 $m = 2q$, 令

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l f^{(m)}(x) \sin \left(\frac{k\pi}{l} x \right) dx$$

于是 $a_k = (-1)^q \left(\frac{l}{k\pi} \right)^m A_k$, 因此

$$k^m |a_k| = \left(\frac{l}{\pi} \right)^m |A_k|$$

对 A_k 进行分部积分,

$$A_k = -\frac{2}{l} \frac{l}{k\pi} f^{(m)}(x) \cos \left(\frac{k\pi}{l} x \right) \Big|_0^l + \frac{2}{l} \frac{l}{k\pi} \int_0^l f^{(m+1)}(x) \cos \left(\frac{k\pi}{l} x \right) dx := \frac{l}{k\pi} B_k$$

由于 $f^{(m+1)}$ 分段连续, 所以 $f^{(m+1)} \in L^2(0, l)$, 由贝塞尔不等式,

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 < \infty$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{l}{\pi} \right)^{m+1} \left| \frac{1}{k} B_k \right| \leq \left(\frac{l}{\pi} \right)^{m+1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 \right)^{1/2} < \infty$$

当 m 为奇数时, 设 $m = 2p + 1$, 令

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l f^{(m)}(x) \cos \left(\frac{k\pi}{l} x \right) dx$$

所以

$$C_k = (-1)^q a_k \left(\frac{k\pi}{l} \right)^m \implies k^m |a_k| = \left(\frac{l}{\pi} \right)^m |C_k|$$

对 C_k 进行分部积分, 得到

$$C_k = -\frac{2}{l} \frac{l}{k\pi} \int_0^l f^{(m+1)}(x) \sin \left(\frac{k\pi}{l} x \right) dx := -\frac{l}{k\pi} D_k$$

其他部分与偶数的时候一样。

综上, 无论 m 是偶数还是奇数, 都有

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m |a_k| < \infty.$$

4.p31 1,2(利用 p27 页情形 4 的技巧和 Duhamel 原理 p26 3.26-3.28, 自行思考为什么这就是我们上课讲的 Duhamel 原理)

题目 9.4. 用分离变量法求下列问题的解:

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{t=0} = \sin \frac{3\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x(l-x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0; \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \frac{h}{l}x, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{cases}$$

解答. (1) 设 $u(t, x) = T(t)X(x)$, 得到

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

转化为两个常微分方程

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + a^2 \lambda T = 0$$

求解 X 的方程, 得到通解为

$$X = Ae^{-\sqrt{-\lambda}x} + Be^{\sqrt{-\lambda}x}$$

因为 $X(0) = X(l) = 0$, 所以

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{-\sqrt{-\lambda}l} + Be^{\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases} \implies \lambda = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2$$

就是说只有当 $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2$ 时, 方程才有非零解。对应的特征函数是

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

对时间部分来说

$$T_n'' + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n = 0$$

所以

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{an\pi t}{l} + B_n \sin \frac{an\pi t}{l}.$$

因此一般解为

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{an\pi t}{l} + B_n \sin \frac{an\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

代入 $u|_{t=0} = \sin \frac{3\pi x}{l}$, 有

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \sin \frac{3\pi x}{l} \implies A_3 = 1, A_n = 0 (n \neq 3)$$

代入 $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x(l-x)$, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{an\pi}{l} A_n \sin \frac{an\pi t}{l} + \frac{an\pi}{l} B_n \cos \frac{an\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} = x(l-x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l x(l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{4l^2((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3} \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

所以解得

$$B_n = -\frac{4l^2((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3} \cdot \frac{l}{an\pi} = \frac{4l^3(1 - (-1)^n)}{a\pi^4 n^4}$$

所以解为

$$u(x, t) = \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi at}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4l^3(1 - (-1)^n)}{a\pi^4 n^4} \sin \frac{an\pi t}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

(2) 设 $u(t, x) = T(t)X(x)$, 得到

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

转化为两个常微分方程

$$X'' + \lambda X = 0, T'' + a^2 \lambda T = 0$$

求解 X 的方程, 得到通解为

$$X = Ae^{-\sqrt{-\lambda}x} + Be^{\sqrt{-\lambda}x}$$

代入边值条件 $X(0) = 0, \frac{\partial X}{\partial x}(l) = 0$, 有

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -\sqrt{-\lambda}Ae^{-\sqrt{-\lambda}l} + \sqrt{-\lambda}Be^{\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases} \implies e^{-\sqrt{-\lambda}l} + e^{\sqrt{-\lambda}l} = 0$$

当 $\lambda \leq 0$ 时, 这个式子都不会成立。

当 $\lambda > 0$ 时, 设 $\sqrt{-\lambda} = \mu i$, 于是 $e^{-\mu i l} + e^{\mu i l} = 0$

$$\begin{cases} \cos(-\mu l) + \cos(\mu l) = 0 \\ \sin(-\mu l) + \sin(\mu l) = 0 \end{cases} \implies \mu = \frac{\pi + 2n\pi}{2l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

因此,

$$\mu_n = \frac{(2n+1)}{2l}\pi, \quad X_n(x) = \sin(\mu_n x)$$

对应的时间部分为

$$T_n(t) = A_n \cos(a\mu_n t) + B_n \sin(a\mu_n t)$$

所以解为

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(a\mu_n t) + B_n \sin(a\mu_n t)] \sin(\mu_n x).$$

代入 $u(x, 0) = \frac{h}{l}x$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(\mu_n x) &= \frac{h}{l}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \frac{h}{l}x \sin(\mu_n x) dx \right] \sin(\mu_n x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2h}{l^2} \left[\left(-\frac{1}{\mu_n}x \cos(\mu_n x) \right) \Big|_0^l + \frac{1}{\mu_n} \int_0^l \cos(\mu_n x) dx \right] \sin(\mu_n x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2h}{l^2} \frac{1}{\mu_n^2} (-1)^n \sin(\mu_n x) \end{aligned}$$

于是系数对应可得

$$A_n = \frac{2(-1)^n h}{l^2 \mu_n^2} = \frac{8h(-1)^n}{(2n+1)^2 \pi^2}.$$

代入 $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a\mu_n B_n \sin(\mu_n x) = 0 \implies B_n = 0$$

所以最终解为

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8h(-1)^n}{(2n+1)^2 \pi^2} \cos\left(a \frac{(2n+1)}{2l} \pi t\right) \sin\left(\frac{(2n+1)}{2l} \pi x\right).$$

题目 9.5. 求解

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = A \sin^2 \omega t, \\ u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{cases}$$

解答. 令 $w(x, t) = \frac{x}{l} A \sin^2 \omega t$, 则 $u = v + w$, v 满足如下的方程组

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = -\frac{2A\omega^2 x}{l} \cos 2\omega t := F(t, x), \\ v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \\ v(x, 0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{cases}$$

由于 $v(0, t) = v(l, t) = 0$, 所以可以展开成正弦级数

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

所以

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l} \right)^2 T_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l}$$

把右端也正弦展开:

$$\begin{aligned} -\frac{2A\omega^2 x}{l} \cos 2\omega t &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l F \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A\omega^2 (-1)^n \cos(2\omega t)}{\pi n} \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

对应相等可得

$$T_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l} \right)^2 T_n(t) = \frac{4A\omega^2 (-1)^n \cos(2\omega t)}{\pi n}$$

且 $T_n(0) = T_n'(0) = 0$.

记 $\beta_n = \frac{an\pi}{l}$, $G_n = \frac{4A\omega^2 (-1)^n}{\pi n}$, 通解为

$$T_n(t) = C_1 \cos(\beta_n t) + C_2 \sin(\beta_n t)$$

再找一个特解, 设特解为 $K \cos(2\omega t)$,

$$-4\omega^2 K \cos(2\omega t) + \beta_n^2 K \cos(2\omega t) = G_n \cos 2\omega t$$

于是

$$K = \frac{G_n}{-4\omega^2 + \beta_n^2} \implies \text{特解为 } \frac{G_n}{\beta_n^2 - 4\omega^2} \cos(2\omega t)$$

代入初值:

$$\begin{cases} C_1 + K = 0 \\ \beta_n C_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = -K \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

因此, 最终得到

$$\begin{aligned} T_n(t) &= -K \cos(\beta_n x) + K \cos(2\omega t) \\ &= \frac{G_n}{\beta_n^2 - 4\omega^2} [\cos(2\omega t) - \cos(\beta_n t)] \end{aligned}$$

所以最终解为

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{4A\omega^2(-1)^n}{\pi n}}{\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 - 4\omega^2} \left[\cos(2\omega t) - \cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right) \right] \sin \frac{n\pi x}{l}$$

另外, 当 $\beta_n = 2\omega$ 时, 就不能设特解为 $K \cos(2\omega t)$, 此时设特解为 $K_1 t \cos(2\omega t) + K_2 t \sin(2\omega t)$.

$$-(4\omega^2 K_2 t + 4\omega K_1 - \beta_n^2 K_2 t) \sin(2\omega t) - (4\omega^2 K_1 t - 4\omega K_2 - \beta_n^2 K_1 t) \cos(2\omega t) = G_n \cos 2\omega t$$

对应相等有

$$\begin{cases} 4\omega^2 K_2 t + 4\omega K_1 - \beta_n^2 K_2 t = 0 \\ 4\omega^2 K_1 t - 4\omega K_2 - \beta_n^2 K_1 t = -G_n \end{cases} \implies \begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 = \frac{G_n}{4\omega} \end{cases}$$

此时的特解就是 $\frac{G_n}{4\omega} t \sin(2\omega t)$. 代入初值:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ \beta_n C_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

所以此时的解为

$$T_n = \frac{A\omega(-1)^n}{\pi n} t \sin(2\omega t)$$

综上所述,

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{Ax}{l} \sin^2 \omega t + \frac{A\omega(-1)^m}{\pi n} t \sin(2\omega t) \sin \frac{m\pi x}{l} \\ + \sum_{n=1, n \neq m}^{\infty} \frac{4A\omega^2(-1)^n \pi n l^2}{(an^2 \pi^2)^2 - 4(\omega \pi n l)^2} \left[\cos(2\omega t) - \cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right) \right] \sin \frac{n\pi x}{l}, & \omega = \frac{am\pi}{2l} \\ \frac{Ax}{l} \sin^2 \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A\omega^2(-1)^n \pi n l^2}{(an^2 \pi^2)^2 - 4(\omega \pi n l)^2} \left[\cos(2\omega t) - \cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} & \omega \neq \frac{am\pi}{2l} \end{cases}$$

题目 9.6. 利用泊松公式求解波动方程的柯西问题:

$$(1) \begin{cases} u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x^2 + yz \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ u|_{t=0} = x^3 + y^2z, \quad u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解答. 泊松公式是

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} \varphi(y) dS_y \right] + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} \psi(y) dS_y.$$

(1) 记球面上的点为 (ξ, η, ζ) , 令 $\xi = x + at \cos \theta \cos \varphi$, $\eta = y + at \cos \theta \sin \varphi$, $\zeta = z + at \sin \theta$, 则

$$dS = a^2 t^2 \cos \theta$$

$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(x, y, z)} \xi^2 + \eta \zeta dS \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (x^2 + 2xat \cos \theta \cos \varphi + a^2 t^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + yz \\ &\quad + aty \sin \theta + atz \cos \theta \sin \varphi + a^2 t^2 \cos \theta \sin \theta \sin \varphi) \cos \theta d\varphi d\theta \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\pi x^2 + \pi a^2 t^2 \cos^2 \theta + 2\pi yz + 2\pi aty \sin \theta) \cos \theta d\theta \\ &= \frac{t}{4\pi} \left(4\pi x^2 + \frac{4}{3} \pi a^2 t^2 + 4\pi yz \right) \\ &= t(x^2 + yz) + \frac{1}{3} a^2 t^3 \end{aligned}$$

(2) 同样的换元,

$$u(t, x, y, z) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(x, y, z)} \xi^3 + \eta^2 \zeta dS \right]$$

计算里面的积分

$$\begin{aligned} \int_{S_{at}(x, y, z)} \xi^3 + \eta^2 \zeta dS &= a^2 t^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} [x^3 + 3a^2 t^2 \cos^2 \theta + y^2 (z + at \sin \theta) \\ &\quad + a^2 t^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi (z + at \sin \theta)] \cos \theta d\varphi d\theta \\ &= a^2 t^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\pi x^3 \cos \theta + 3\pi a^2 t^2 \cos^3 \theta \\ &\quad + 2\pi y^2 (z \cos \theta + at \sin \theta \cos \theta) + \pi a^2 t^2 \cos^3 \theta (z + at \sin \theta) d\theta \\ &= a^2 t^2 \left(4\pi x^3 + 6\pi a^2 t^2 + 4\pi y^2 z + \frac{4}{3} \pi a^2 t^2 \right) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[x^3 t + \frac{3}{2} a^2 t^3 + y^2 z t + \frac{1}{3} a^2 t^3 \right] \\ &= x^3 + \frac{9}{2} a^2 t^2 + y^2 z + a^2 t^2 \end{aligned}$$

6 p61 1

题目 9.7. 对受摩擦力作用且具有固定端点的有界弦振动, 满足方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - cu_t,$$

其中常数 $c > 0$, 证明其能量是减少的, 并由此证明方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - cu_t + f$$

的初边值问题解的唯一性以及关于初始条件及自由项的稳定性。

解答. 设弦固定在 $0 < x < l$ 上, 定义能量为

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx$$

于是

$$\frac{\partial E}{\partial t}(t) = \int_0^l (u_t u_{tt} + a^2 u_x u_{xt}) dx = \int_0^l (u_t u_{tt} - a^2 u_{xx} u_t) dx = \int_0^l -c (u_t)^2 dx < 0$$

所以能量是减少的。

证明唯一性: 假设 u_1, u_2 均满足方程, 令 $w = u_1 - u_2$, 则 w 满足

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} - cw_t$$

并且 $w(0, t) = w(l, t) = 0, w(x, 0) = 0, w_t(x, 0) = 0$. 所以定义 w 的能量为

$$E_w(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (w_t^2 + a^2 w_x^2) dx$$

在初始 $t = 0$ 时刻, 能量

$$E_w(0) = \frac{1}{2} \int_0^l (w_t(x, 0) + a^2 w_x^2(x, 0)) dx = 0$$

由于能量是减少的, 所以 $0 \leq E_w(t) \leq E_w(0) = 0$, 所以 $E_w(t) \equiv 0$. 所以 $w \equiv 0$, 从而 $u_1 = u_2$.

证明稳定性： 取两个解 u, v ，分别满足方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - cu_t + f_1 \\ u(x, 0) = \varphi_1(x) \\ u_t(x, 0) = \psi_1(x) \end{cases}, \begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} - cv_t + f_2 \\ v(x, 0) = \varphi_2(x) \\ v_t(x, 0) = \psi_2(x) \end{cases}$$

令 $w = u - v$ ，则 w 满足方程

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} - cw_t + f_1 - f_2 \\ w(x, 0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \\ w_t(x, 0) = \psi_1(x) - \psi_2(x) \end{cases}$$

对 w 定义能量，得到能量恒等式为

$$\begin{aligned} E'_w(t) &= \int_0^l (f_1 - f_2) w_t - cw_t^2 dx \\ E_w(0) &= \frac{1}{2} \int_0^l [(\psi_1(x) - \psi_2(x))^2 + a^2 (\varphi'_1(x) - \varphi'_2(x))^2] dx \end{aligned}$$

于是进行估计得

$$\begin{aligned} \left| E'_w(t) + \int_0^l cw_t^2 dx \right| &\leq \int_0^l |f_1 - f_2| |w_t| dx \\ &\leq \frac{1}{2c} \int_0^l (f_1 - f_2)^2 dx + \frac{c}{2} \int_0^l w_t^2 dx \end{aligned}$$

所以

$$E'_w(t) \leq \frac{1}{2c} \int_0^l (f_1 - f_2)^2 dx$$

积分得

$$E_w(t) \leq \frac{1}{2} \int_0^l [(\psi_1(x) - \psi_2(x))^2 + a^2 (\varphi'_1(x) - \varphi'_2(x))^2] dx + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_0^l (f_1 - f_2)^2 dx ds$$

这就说明：如果初始位移、初始速度和自由项的差很小，那么任意时刻解的能量差也很小。这就是稳定性。

第十章 第 12 周微分方程作业

P47 8

题目 10.1. 解非齐次方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2(y - t) \\ u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = x^2 + yz \end{cases}$$

解答. 将原来的柯西问题分成两部分 $u = v + w$, 分别是

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} \\ v|_{t=0} = 0, \\ v_t|_{t=0} = x^2 + yz \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} w_{tt} = w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} + 2(y - t) \\ w|_{t=0} = 0, \\ w_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

第一个直接用泊松公式, 记球面上的点为 (ξ, η, ζ) , 令 $\xi = x + t \cos \theta \cos \varphi, \eta = y + t \cos \theta \sin \varphi, \zeta = z + t \sin \theta$, 则

$$dS = t^2 \cos \theta$$

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \frac{1}{4\pi t} \iint_{\partial B_t(x, y, z)} \xi^2 + \eta \zeta dS \\ &= \frac{1}{4\pi t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t^2 \cos \theta \int_0^{2\pi} x^2 + t^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + yz + ty \sin \theta d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t^2 \cos \theta (2\pi x^2 + \pi t^2 \cos^2 \theta + 2\pi yz + 2\pi ty \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta (2\pi x^2 + \pi t^2 \cos^2 \theta + 2\pi yz) d\theta \\ &= \frac{t}{4\pi} \left(4\pi x^2 + 4\pi yz + \frac{4}{3} \pi t^2 \right) \\ &= \left(x^2 + yz + \frac{1}{3} t^2 \right) t \end{aligned}$$

第二个用 Duhamel 原理, 设 W 为其次方程的定解问题

$$\begin{cases} W_{tt} = W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} \\ W|_{t=\tau} = 0, \quad W_t|_{t=\tau} = 2y - 2\tau \end{cases}$$

则令 $r = t - \tau$ 由泊松公式可得解为

$$\begin{aligned} W(x, y, z, t; \tau) &= \frac{1}{4\pi r} \iint_{S_r(x, y, z)} (2\eta - 2\tau) dS \\ &= \frac{1}{4\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \theta \int_0^{2\pi} 2y + 2t \cos \theta \sin \varphi - 2\tau d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{2r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \theta (2y - 2\tau) d\theta \\ &= \frac{1}{2r} (4yr^2 - 4\tau r^2) \\ &= 2(y - \tau)(t - \tau) \end{aligned}$$

所以由 Duhamel 原理,

$$w(x, t) = \int_0^t 2(y - \tau)(t - \tau) d\tau = 2yt^2 - (y + t)t^2 + \frac{2}{3}t^3 = yt^2 - \frac{t^3}{3}$$

所以

$$u(t, x) = w(t, x) + v(t, x) = x^2t + yzt + yt^2.$$

P62 3,7

题目 10.2. 证明波动方程

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t)$$

的自由项 f 在 $L^2(K)$ 意义下做微小改变时, 对应的柯西问题的解 u 在 $L^2(K)$ 意义下改变也是微小的, 其中 K 是锥体

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (R - at)^2.$$

解答. 令 $v = u_1 - u_2, F = f_1 - f_2$, 定义能量

$$E(t) = \int_{\Omega} [v_t^2 + a^2 |\nabla v|^2] dx dy$$

因为积分区域也随时间改变, 所以求导之后会多一项 $-\frac{a}{2} \int_{\partial K(t)} (v_t^2 + a^2 |\nabla v|^2) dx dy$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \int_{K(t)} 2v_{tt}v_t + 2a^2 \nabla v \cdot \nabla v_t dx dy - \frac{a}{2} \int_{\partial K(t)} (v_t^2 + a^2 |\nabla v|^2) dx dy \\ &= \int_{K(t)} Fv_t dx dy + \int_{\partial K(t)} a^2 v_t v_\nu dS - \frac{a}{2} \int_{\partial K(t)} (v_t^2 + a^2 |\nabla v|^2) dx dy \end{aligned}$$

因为

$$|\nabla v|^2 = v_\nu^2 + |\nabla_r v|^2$$

所以

$$a^2 v_t v_\nu - \frac{a}{2} v_t^2 - \frac{a^3}{2} v_\nu^2 - \frac{a^3}{2} |\nabla_r v|^2 = -\frac{a}{2} (v_t - av_\nu)^2 - \frac{a^3}{2} |\nabla_r v|^2 \leq 0$$

所以

$$\frac{\partial E}{\partial t} \leq \int_{K(t)} Fv_t dx dy \leq \frac{1}{2} \int_{K(t)} F^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_{K(t)} v_t^2 dx dy \leq \frac{1}{2} \int_{K(t)} F^2 dx dy + E(t)$$

因为 $E(0) = 0$, 所以由 Gronwall 不等式,

$$E(t) \leq \frac{1}{2} \int_0^t e^{t-s} \int_{K(s)} F^2 dx dy ds \leq \frac{1}{2} e^t \int_0^t \int_{K(s)} F^2 dx dy ds$$

由于 f 是在 $L^2(K)$ 的意义下作微小改变, 所以

$$E(t) \leq \frac{1}{2} e^t \int_0^t \|F\|_{L^2(K)} ds \leq \frac{1}{2} e^{R/a} \int_0^{R/a} \|F\|_{L^2(K)} ds := C \|F\|_{L^2(K)}$$

于是

$$v(x, y, t) = \int_0^t v_t(x, y, t) ds$$

可得

$$\|v\|_{L^2(K)}^2 \leq C \int_0^T E(s) ds \leq C \|F\|_{L^2(K)}$$

也就是

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2(K)}^2 \leq C \|f_1 - f_2\|_{L^2(K)}$$

题目 10.3. 设 $u(x, t)$ 是 $[0, 1] \times [0, +\infty)$ 中的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = x^2(1-x) \end{cases}$$

的解, 求 $\int_0^1 [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] dx$.

解答. 令

$$E(t) = \int_0^1 [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] dx$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \int_0^1 (2u_{tt}u_t + 2u_{xt}u_x) dx \\ &= \int_0^1 2u_{tt}u_t + 2u_tu_x \Big|_0^1 - \int_0^1 2u_tu_{xx} dx \\ &= \int_0^1 2u_t(u_{tt} - u_{xx}) dx + 2u_tu_x \Big|_0^1 = 0 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} E(t) &= E(0) = \int_0^1 [u_t^2(x, 0) + u_x^2(x, 0)] dx = \int_0^1 x^4(1-x)^2 dx \\ &= \int_0^1 x^6 - 2x^5 + x^4 dx \\ &= \frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{105}. \end{aligned}$$

P63 8

题目 10.4. 设 $u(x, t)$ 是 $[0, 1] \times [0, +\infty)$ 中的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = x(1-x) \end{cases}$$

的解, 求 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{1/2} [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] dx$.

解答. 令 $E(t) = \int_0^1 [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] dx$, 则 $\partial E(t) / \partial t = 0$, 所以

$$\begin{aligned} E(t) &= E(0) = \int_0^1 [u_t^2(x, 0) + u_x^2(x, 0)] dx \\ &= \int_0^1 (x(1-x))^2 dx \\ &= \int_0^1 x^2 - 2x^3 + x^4 dx \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{1/2} [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] dx &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] dx. \\ &= \frac{1}{2} E(0) = \frac{1}{60}\end{aligned}$$

P75 1

题目 10.5. 用分离变量法求下列定解问题的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (t > 0, 0 < x < \pi) \\ u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 & (t > 0) \\ u(x, 0) = f(x) & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

解答. 设 $u(t, x) = T(t)X(x)$, 代入方程可得

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

于是得到了两个常微分方程:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + a^2 \lambda T = 0$$

先求 X , X 的通解为

$$X = Ae^{-\sqrt{-\lambda}x} + Be^{\sqrt{-\lambda}x}$$

带入初值条件

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -\sqrt{-\lambda}Ae^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + \sqrt{-\lambda}Be^{\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \end{cases} \implies e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = e^{\sqrt{-\lambda}\pi}$$

所以 $\lambda = \mu^2 > 0$ 时, X 会有非零解, 设

$$X(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x$$

带入初值, 可得

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x.$$

于是, 时间部分满足

$$T'_n + a^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 T_n = 0$$

其通解为

$$T_n(t) = C_n \exp\left[a^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 t\right].$$

所以二者组合可得

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp \left[a^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 t \right] \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x$$

代入初始条件 $u(x, 0) = f(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(s) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s ds \right] \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x$$

所以

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(s) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s ds$$

所以最终解为

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(s) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) s ds \right] \exp \left[a^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 t \right] \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x$$

题目 10.6. 记 $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$,

1. 证明 f 是 Schwarz 函数, 则 $\hat{f}$ 也是。

以下只考虑 f, g 是 Schwarz 函数。

2. 计算 $f(x)$ 和 $f(x+h)$ 的 Fourier 变换的关系。

3. 计算 $f(x)$ 和 $f(\lambda x)$ 的 Fourier 变换的关系。

4. 承认 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$, 推导逆变换公式。

5. 验证 $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \hat{g}(x) dx$ 。

6. 在 5 中令 $g(x) = e^{-\lambda x^2}$ ($\lambda > 0$) 证明 4 中的公式。

7. 证明 $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$ 。

解答. 1. 因为 f 是 Schwarz 函数, 所以对任意 α, β , 存在常数 $C_{\alpha, \beta}$, 使得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| \leq C_{\alpha, \beta} < \infty$$

由于 $\hat{f}^{(n)} = (i\xi)^n \hat{f}$, $\xi^\alpha \widehat{\hat{f}^{(\beta)}}(\xi) = \xi^\alpha (-i)^\beta \widehat{x^\beta f}(\xi)$,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \xi^\alpha \widehat{\hat{f}^{(\beta)}}(\xi) \right| &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \xi^\alpha \widehat{x^\beta f}(\xi) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \widehat{x^\beta f}^{(\alpha)}(\xi) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \widehat{(x^\beta f)^{(\alpha)}}(\xi) \right| \\ &= \sup \left| \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} \frac{\beta!}{(\beta-k)!} x^{\beta-k} f^{(\alpha-k)} \right| \quad (k > \beta \text{ 时, 就是0了}) \\ &\leq \sup \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} \frac{\beta!}{(\beta-k)!} |x^{\beta-k} f^{(\alpha-k)}| \\ &\leq \sup \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} \frac{\beta!}{(\beta-k)!} C_{\beta-k, \alpha-k} \\ &\leq C'_{\alpha, \beta} \end{aligned}$$

所以 $\hat{f}$ 也是 Schwarz 函数。

2.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y+h) e^{-i(y+h)\xi} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y+h) e^{-iy\xi} dy \cdot e^{-ih\xi} \\ &= e^{-ih\xi} \mathcal{F}[f(x+h)] \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \widehat{f(\lambda x)}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\lambda x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i\frac{y}{\lambda}\xi} dy \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iy\frac{\xi}{\lambda}} dy \\ &= \frac{1}{\lambda} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

4. 这不就是逆变换公式吗, 还需要推什么?

5.

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy} dy \right) g(x) dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x) e^{-ixy} dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-ixy} dy \right) f(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \hat{g}(x) dx
 \end{aligned}$$

6. 令 $g(x) = e^{-\lambda x^2}$, 于是

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x^2 - ix\xi} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda \left(x + \frac{i\xi}{2\lambda}\right)^2 - \frac{\xi^2}{4\lambda}} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2 - \frac{\xi^2}{4\lambda}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda}}
 \end{aligned}$$

所以代入

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \hat{g}(x) dx$$

有

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda}} dx$$

7.

$$\begin{aligned}
 \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}(\xi)} d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \hat{\bar{f}}(\xi) d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \overline{f(\xi)} d\xi \\
 &= \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}
 \end{aligned}$$

第十一章 第 13 周微分方程作业

题目 11.1. 1. 陈述并证明有界区域上的热方程的（弱）极值原理，比较定理

解答. 有界区域上的热方程的（弱）极值原理：

若 $u_t - \Delta u \leq 0$, $t \in (0, T]$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界闭集。定义抛物边界

$$\Gamma := \{0\} \times \bar{\Omega} \cup [0, 1] \times \partial\Omega$$

则

$$\max_{x \in [0, T] \times \bar{\Omega}} u \leq \max_{x \in \Gamma} u.$$

证明： 定义辅助函数 $u_\varepsilon(t, x) = u(t, x) - \varepsilon t$, 则

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon = u_t - \varepsilon - \Delta u \leq -\varepsilon$$

假设存在某个 $\tau < T$, 使得 u_ε 在 $\Omega \times [0, \tau]$ 的最大值不在抛物边界上取得, 也就是最大值点满足 $x_0 \in \Omega$ 且 $0 < t_0 \leq \tau$ 。于是

$$(u_\varepsilon)_t(x_0, t_0) = 0, \quad D_x^2 u_\varepsilon(x_0, t_0) \leq 0$$

哪怕是在边界取到, $(u_\varepsilon)_t(x_0, t_0) \geq 0$, 区别不大。由 Hessian 矩阵半负定, 因此 $\Delta u_\varepsilon(t_0, x_0) \leq 0$, 从而

$$(u_\varepsilon)_t - \Delta u_\varepsilon > 0$$

矛盾, 所以最大值只会在边界取到。

比较定理： 若 $u, v \in C_t^1 C_x^2((0, T] \times \Omega)$, $u, v \in C([0, T] \times \bar{\Omega})$, 且

$$\begin{cases} u_t - \Delta u \leq v_t - \Delta v \\ u|_{\partial\Gamma} \leq v|_{\partial\Gamma} \end{cases}$$

则 $u \leq v$ 对任意的 $[0, T] \times \bar{\Omega}$ 都成立。

证明： 令 $w = u - v$, 则由极值原理,

$$\max_{[0, T] \times \bar{\Omega}} w \leq \max_{\Gamma} w \leq 0$$

因此 $w \leq 0$, 所以 $u \leq v$.

题目 11.2. 2. (利用极值原理) 陈述并证明包含非齐次项的有界区域热方程的稳定性

解答. 包含非齐次项的有界区域热方程的稳定性(AI 表述的, 我看貌似厉害一些):

若 $u, v \in C([0, T] \times \bar{\Omega}) \cap C_t^1 C_x^2(0, T] \times \Omega$, 定义同样地抛物边界, 若

$$u_t - \Delta u = f_1, \quad v_t - \Delta v = f_2$$

则

$$\max_{[0, T] \times \bar{\Omega}} |u - v| \leq \max_{\Gamma} |u - v| + T \max_{[0, T] \times \bar{\Omega}} |f_1 - f_2|$$

证明: 令 $w = u - v$, 则 $w_t - \Delta w = f_1 - f_2$. 令

$$A = \max_{\Gamma} |w|, \quad B = \max_{[0, T] \times \bar{\Omega}} |f_1 - f_2|$$

定义辅助函数 $W = w - Bt$, 则

$$W_t - \Delta w \leq -B < 0$$

由热方程的极值原理,

$$\max_{[0, T] \times \bar{\Omega}} W \leq \max_{\Gamma} W \leq A$$

所以

$$w \leq A + BT$$

对 $-w$ 做同样处理, 定义函数 $\widetilde{W} = -w - Bt$, 可以得到

$$-w \leq A + BT$$

从而, $|w| \leq A + BT$, 两边取最大值, 就有

$$\max_{[0, T] \times \bar{\Omega}} |u - v| \leq A + TB$$

备注 11.1. 上课讲的版本实际上是: 设 Ω 为有界区域, $T > 0$, 记 $Q_T = \Omega \times (0, T]$, 抛物边界为

$$\Gamma_T = (\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$$

若 $u, v \in C([0, T] \times \bar{\Omega}) \cap C_t^1 C_x^2(0, T] \times \Omega$, 定义同样的抛物边界, 且分别在 Q_T 内满足

$$u_t - \Delta u = f_1, \quad v_t - \Delta v = f_2$$

若在 Γ_T 上, $u = v$, 且 $|f_2 - f_1| \leq \delta$ 在 Q_T 内, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$|u_2 - u_1| \leq T(\delta + \varepsilon)$$

3. P75 2,4,7

题目 11.3. 用分离变量法求解热传导方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (t > 0, 0 < x < 1) \\ u(x, 0) = \begin{cases} x & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & (t > 0) \end{cases}$$

解答. 设 $u(t, x) = T(t)X(x)$, 则

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

于是

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(1) = 0$$

所以要想 X 有非零的解, $\lambda_n = n^2\pi^2$, 对应的特征函数为 $X_n(x) = \sin(n\pi x)$ 。

然后解时间方程 $T' + n^2\pi^2 T = 0$, 解得

$$T_n(t) = A_n e^{-n^2\pi^2 t}$$

组合起来有

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

记

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

将他展开成正弦级数, 系数为

$$2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = 2 \int_0^{1/2} x \sin(n\pi x) dx + 2 \int_{1/2}^1 (1-x) \sin(n\pi x) dx$$

第一项分部积分：

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} x \sin(n\pi x) dx &= -\frac{1}{n\pi} x \cos(n\pi x) \Big|_0^{1/2} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{1/2} \cos(n\pi x) dx \\ &= -\frac{1}{2n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

第二项分部积分：

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^1 (1-x) \sin(n\pi x) dx &= -\frac{1}{n\pi} (1-x) \cos(n\pi x) \Big|_{1/2}^1 - \frac{1}{n\pi} \int_{1/2}^1 \cos(n\pi x) dx \\ &= \frac{1}{2n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

于是

$$2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = \frac{4}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

从而就有

$$A_n = \frac{4}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

所以最终的解就是

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} e^{-n^2\pi^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(n\pi x)$$

题目 11.4. 4. 在区域 $t > 0, 0 < x < l$ 中求解如下的定解问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(u - u_0) \\ u(0, t) = u(l, t) = u_0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

其中 α, β, u_0 均为常数, $f(x)$ 为已知函数。

解答. 作未知函数代换 $u = u_0 + v(x, t)e^{-\beta t}$, 于是 $v = (u - u_0)e^{\beta t}$,

$$v_t = u_t e^{\beta t} + \beta(u - u_0)e^{\beta t}, \quad v_{xx} = u_{xx}e^{\beta t}$$

所以 $v_t = a^2 v_{xx}$, 初值条件为

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad v(x, 0) = f - u_0$$

分离变量的结果为

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l (f(s) - u_0(s)) \sin \frac{n\pi s}{l} ds \right] e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

于是

$$u(x, t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l (f(s) - u_0(s)) \sin \frac{n\pi s}{l} ds \right] \exp \left[-a^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t - \beta t \right] \sin \frac{n\pi x}{l}$$

题目 11.5. 7. 设 $u(x, t)$ 是 $(0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \infty)$ 中初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(0, t) = 1, \quad u(\frac{\pi}{2}, t) = 4 \\ u(x, 0) = \cos^4 x + 4 \sin^5 x \end{cases}$$

的解, 求 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

解答. (神奇做法) 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 稳定态不会依赖于 t , 所以满足 $U_t = 0$, 即 $U_{xx} = 0$, 所以可以设 $U(x) = ax + b$, 代入初值条件可得

$$b = 1, \quad \frac{\pi}{2}a + b = 4 \implies a = \frac{6}{\pi}, b = 1$$

所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 1 + \frac{6}{\pi}x.$$

4.p95 1,2,3 (如果你明白课上内容, 2, 3 其实是一道题, 证明可能只有两行; 第一题可尝试利用傅立叶分析)

题目 11.6. 1. 证明: 下列热传导方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

的解当 $t \rightarrow \infty$ 时指数的衰减于零, 其中 $\varphi \in C^2$, 且 $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

解答. 分离变量解是

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi s}{l} ds \right) \exp \left[-a^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

需要证明存在常数 C_φ , 使得

$$|u(x, t)| \leq C_\varphi \exp \left[-a^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right].$$

令 $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi s}{l} ds$, 对 b_n 分部积分

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi s}{l} ds = \frac{2}{l} \frac{l}{n\pi} \int_0^l \varphi'(s) \cos \frac{n\pi s}{l} ds = -\frac{2}{l} \left(\frac{l}{n\pi} \right)^2 \int_0^l \varphi''(s) \sin \frac{n\pi s}{l} ds$$

于是

$$|b_n| \leq \frac{2l}{n^2\pi^2} \int_0^l |\varphi''(x)| dx$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \frac{2l}{\pi^2} \int_0^l |\varphi''(x)| dx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{l}{3} \int_0^l |\varphi''(x)| dx < \infty$$

于是

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \exp \left[-a^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right] \left| \sin \frac{n\pi x}{l} \right| \\ &\leq \exp \left[-a^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right] \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \\ &\leq \frac{l}{3} \int_0^l |\varphi''(x)| dx \exp \left[-a^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 t \right] \end{aligned}$$

所以存在常数

$$C_\varphi = \frac{l}{3} \int_0^l |\varphi''(x)| dx$$

所以这个收敛是指指数减少的。

题目 11.7. 证明：当 $\varphi(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界连续函数，且 $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 时，高维热传导方程柯西问题的解，当 $t \rightarrow \infty$ 时以 $t^{-n/2}$ 衰减率趋于零。

解答. 由泊松公式，

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

所以

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\xi)| e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \leq \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\xi)| d\xi = C t^{n/2}.$$

题目 11.8. 5. 自行复习格林公式（这都是斯托克斯公式特例，或者可以看成是微积分基本原理的自然推广，我有时会统一用散度定理记忆）

解答.

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu dS$$

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS$$

其中

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \nabla v \cdot \nu.$$

补充题目：

(刘维尔定理)

1. 设 u 在 $\mathbb{R}^n$ 中调和且有上(下)界, 证明 $u = \text{常数}$ 。
2. 设 $u \in C(\overline{B} \setminus \{0\})$ 且在 $B \setminus \{0\}$ 中调和, $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$, 若 $u|_{\partial B} \geq 0$ 且 u 有下界, 则 $u \geq 0$ 在 $B \setminus \{0\}$ 上。

证明: Harnack 不等式. 如果 u 在 $B(0, 2)$ 中调和, $u \geq 0$, 则

$$\sup_{B(0,r)} u \leq C \inf_{B(0,r)} u$$

如果 u 在 $B(0, 2r)$ 中调和, $u \geq 0$, 则

$$\sup_{B(0,r)} u \leq C \inf_{B(0,r)} u$$

第十二章 第 14 周微分方程作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

题目 12.1. 设 u 在 $\mathbb{R}^n$ 中调和，且 $u(x) \leq 1 + |x|$ ，则 $\exists a, b \in \mathbb{R}^n$ ，使得 $u(x) = ax + b$.

解答. 由于 u 在 $\mathbb{R}^n$ 中调和，对每个球 $B(x_0, R) \subset \mathbb{R}^n$ ，有导数估计

$$\begin{aligned} |D^2 u(x_0)| &\leq \frac{C_1}{R^{n+2}} \|u\|_{L^1(B(x_0, R))} \leq \frac{C_1}{R^{n+2}} \|1 + |x_0| + R\|_{L^1(B(x_0, R))} \\ &= \frac{C_1}{R^2} (1 + |x_0| + R) \frac{\omega_n}{R^n} \end{aligned}$$

其中 ω_n 表示 n 维半径为 R 的球的体积。令 $R \rightarrow \infty$ ，可得 $|D^2 u(x_0)| \leq 0$ ，从而由于 x_0 是任意的，所以 $D^2 u \equiv 0$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中成立。所以 u 是一次多项式。

备注 12.1. 但是这样是不对的，因为没说 $|u| \leq 1 + |x|$ ，所以应该：

对每个球 $B(x_0, R) \subset \mathbb{R}^n$ ，设 $v_R(x) = 2 + |x_0| + R - u(x)$ ，这样 $v_R(x)$ 调和且大于 0，于是由正调和函数的内估计

$$|D^2 v_R(x_0)| \leq \frac{C}{R^2} v_R(x_0)$$

从而得到

$$|D^2 u(x_0)| \leq \frac{C}{R^2} (2 + |x_0| + R - u(x_0))$$

令 $R \rightarrow \infty$ ，可得 $|D^2 u(x_0)| \leq 0$ ，从而由于 x_0 是任意的，所以 $D^2 u \equiv 0$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中成立。所以 u 是一次多项式。

题目 12.2. 0. 证明满足平均值原理的连续函数是光滑的（只需要证明 C^2 就可以得到调和，并得出解析，但也可以直接利用平均值公式证明是光滑的）

解答. 叙述（连续函数的平均值原理推出光滑性）：设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集， $u \in C(\Omega)$ 。假

设 u 满足平均值原理, 即对任意 $x \in \Omega$, 任意 $r > 0$, 只要闭球 $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, 都有

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y)$$

则 $u \in C^\infty(\Omega)$. 进一步, u 是调和函数, 即 $\Delta u = 0$ in Ω , 因此 u 在 Ω 内是实解析函数。

证明: 取任意 $K \subset \Omega$, 选取 $\varepsilon > 0$, 使得对任意 $x \in K$, 都有 $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$, 取一个径向的光滑函数 $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(B_\varepsilon(0))$, 满足

$$\rho_\varepsilon(z) = \rho_\varepsilon(|z|), \quad \rho_\varepsilon \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(z) dz = 1$$

定义

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(z) u(x-z) dz$$

由于 ρ_ε 光滑且紧支撑, 所以 $u_\varepsilon(x) \in C^\infty(K)$ 。下面证明 $u_\varepsilon = u$ 。

由极坐标公式

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \int_0^\varepsilon \rho_\varepsilon(r) \int_{\partial B_r(x)} u(x-z) dS(z) dr \\ &= \int_0^\varepsilon \rho_\varepsilon(r) |\partial B_r| u(x) dr \\ &= u(x) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(z) dz = u(x) \end{aligned}$$

第一个等号成立, 是因为当 $z \in \partial B_\varepsilon(0)$ 时, 点 $x-z$ 正好在以 x 为球心, r 为半径的球面上, 然后由平均值原理可得。

从而 $u = u_\varepsilon$ 在 K 上成立, 由于 K 是任意的, 所以 $u \in C^\infty(\Omega)$ 。

然后证明 u 是调和函数。任取 $x \in \Omega$, 取充分小的 $r > 0$, 使得 $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, 由平均值原理,

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y)$$

令 $y = x + r\omega$, 其中 $\omega \in S^{n-1}$, 则

$$u(x) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} u(x + r\omega) dS(\omega)$$

对 $u(x + r\omega)$ 做 Taylor 展开:

$$u(x + r\omega) = u(x) + r \nabla u(x) \cdot \omega + \frac{r^2}{2} \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}(x) \omega_i \omega_j + o(r^2)$$

对 ω 取平均, 可得

$$\int_{S^{n-1}} r \nabla u(x) \cdot \omega dS(\omega) = 0, \quad \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \omega_i \omega_j dS(\omega) = \frac{\delta_{ij}}{n},$$

所以

$$u(x) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} u(x + r\omega) dS(\omega) = u(x) + \frac{r^2}{2n} \Delta u(x) + o(r^2)$$

从而, 令 $r \rightarrow 0$, 可得 $\Delta u = 0$, 由于 $x \in \Omega$ 是任意的, 所以在 Ω 中 $\Delta u \equiv 0$, 因此 u 是调和函数。

题目 12.3. 1. 叙述并证明热方程的平均值原理

解答. 叙述 (热方程的平均值原理): 对于一个固定的 $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $r > 0$, 我们定义

$$E(x, t; r) := \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

设 $u \in C_1^2(U \times (0, T])$ 解了热方程, 那么

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x, t; r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds$$

对于任何一个 $E(x, t; r) \subset U \times (0, T]$ 成立。

证明: 平移空间和时间坐标使得 $x = 0, t = 0$, 写 $E(r) = E(0, 0; r)$, 并令

$$\phi(r) := \frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \iint_{E(1)} u(ry, r^2s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds$$

计算

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \iint_{E(1)} \sum_{i=1}^n \left(u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2r u_s \frac{|y|^2}{s} \right) dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(\sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s \frac{|y|^2}{s} \right) dy ds \end{aligned}$$

定义

$$A = \iint_{E(r)} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} dy ds, \quad B = \iint_{E(r)} 2u_s \frac{|y|^2}{s} dy ds$$

引入一个函数

$$\psi = \log(r^n \Phi(y, -s)) = -\frac{n}{2} \log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n \log r$$

在热球边界上, $\Phi(y, -s) = r^{-n}$, 于是 $\psi|_{\partial E(r)} = 0$, 且 $\psi_{y_i} = \frac{|y|^2}{2s} \frac{y_i}{|y|^2} = \frac{y_i}{2s}$, 所以

$$B = \iint_{E(r)} 4u_s \sum_{i=1}^n y_i \psi_{y_i} dy ds$$

对 y_i 进行分部积分, 有

$$\begin{aligned}
 B &= \iint_{E(r)} 4u_s \sum_{i=1}^n y_i \psi_{y_i} dy_1 dy_2 \cdots dy_n ds \\
 &= \sum_{j=1}^n \iint_{E(r)} 4u_s y_j d\psi dy_1 \cdots \widehat{dy_j} \cdots dy_n ds \\
 &= - \iint_{E(r)} \sum_{j=1}^n 4\psi (u_{sy_j} y_j + u_s) dy_1 \cdots dy_n ds \\
 &= - \iint_{E(r)} 4nu_s \psi + 4 \sum_{j=1}^n \psi u_{sy_j} y_j dy ds \\
 &= \iint_{E(r)} \left(-4nu_s \psi + 4 \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \psi_s \right) dy ds.
 \end{aligned}$$

又因为 $\psi_s = -\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}$, 所以

$$A = \iint_{E(r)} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \left(-\frac{2n}{s} - 4\psi_s \right) dy ds = \iint_{E(r)} - \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \frac{2n}{s} - \sum_{i=1}^n 4u_{y_i} y_i \psi_s dy ds$$

于是,

$$\phi'(r) = \frac{1}{r^{n+1}} (A + B) = \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4nu_s \psi - \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \frac{2n}{s} \right) dy ds$$

因为热方程是 $u_s - \Delta u = 0$, 所以代入有

$$\begin{aligned}
 \phi'(r) &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4n\psi \Delta u - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \right) dy ds \\
 &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(4n\nabla\psi \cdot \nabla u - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \right) dy ds
 \end{aligned}$$

因为 $\nabla\psi = (\frac{y_1}{2s}, \dots, \frac{y_n}{2s})$, $\nabla u = (u_{y_1}, \dots, u_{y_n})$, 所以

$$\nabla\psi \cdot \nabla u = \frac{1}{2s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i$$

从而 $\phi'(r) = 0$, 所以 $\phi(r)$ 是常数。于是

$$\begin{aligned}
 \phi(r) &= \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \iint_{E(1)} u(ty, t^2s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \\
 &= u(0, 0) \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds
 \end{aligned}$$

记 $I = \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds$, 然后计算这个 I .

因为热核 $\Phi(-y, -s) = (-4\pi s)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|y|^2}{-4s}\right)$, 而

$$E(1) = \{(y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq 0, \Phi(-y, -s) \geq 1\}$$

也就是

$$-\frac{n}{2} \log(-4\pi s) - \frac{|y|^2}{-4s} \geq 0 \implies |y|^2 \leq 2ns \log(-4\pi s)$$

右边要为正数, 所以

$$s \log(-4\pi s) > 0 \implies -\frac{1}{4\pi} < s < 0$$

因此

$$E(1) = \left\{ (y, s) \mid -\frac{1}{4\pi} < s < 0, |y| \leq \sqrt{2ns \log(-4\pi s)} \right\}$$

记 $\alpha(n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \int_{|y| \leq \sqrt{2ns \log(-4\pi s)}} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds. \\ &= \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \frac{1}{s^2} \int_0^R \rho^{n+1} n \alpha(n) dy ds \\ &= \frac{n \alpha(n)}{n+2} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \frac{(2ns \log(-4\pi s))^{\frac{n+2}{2}}}{s^2} ds \\ &= \frac{n \alpha(n)}{n+2} (2n)^{\frac{n+2}{2}} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 s^{\frac{n-2}{2}} [\log(-4\pi s)]^{\frac{n+2}{2}} ds \\ &= \frac{n \alpha(n)}{n+2} (2n)^{\frac{n}{2}+1} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 2\right) \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+2} \\ &= \frac{8}{n+2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 2\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \\ &= \frac{8}{n+2} \cdot \frac{n+2}{2} = 4 \end{aligned}$$

所以最终,

$$\phi(r) = 4u(0, 0) \implies u(0, 0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds.$$

2.p106 3, 5, 6, 9

题目 12.4. 3. 证明: 拉普拉斯算子在柱面坐标 (r, θ, z) 下可以写成

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

解答. 做坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$, 于是 $u(x, y, z) = u(r, \theta, z), r =$

$$\sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$r_x = \frac{x}{r}, r_y = \frac{y}{r}, \theta_x = -\frac{y}{r^2}, \theta_y = \frac{x}{r^2}, r_{xx} = \frac{y^2}{r^3}, r_{yy} = \frac{x^2}{r^3}, \theta_{xx} = \frac{2xy}{r^4}, \theta_{yy} = -\frac{2xy}{r^4}$$

所以

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x + u_z z_x = u_r \frac{x}{r} - u_\theta \frac{y}{r^2}$$

$$u_y = u_r r_y + u_\theta \theta_y + u_z z_y = u_r \frac{y}{r} + u_\theta \frac{x}{r^2}$$

$$u_z = u_z$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{rx} r_x + u_r r_{xx} + u_{\theta x} \theta_x + u_\theta \theta_{xx} + u_{zx} z_x + u_z z_{xx} \\ &= (u_{rr} r_x + u_{r\theta} \theta_x) r_x + u_r r_{xx} + (u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta} \theta_x) \theta_x + u_\theta \theta_{xx} \\ &= u_{rr} \frac{x^2}{r^2} - u_{r\theta} \frac{2xy}{r^3} + u_r \frac{y^2}{r^3} + u_{\theta\theta} \frac{y^2}{r^4} + u_\theta \frac{2xy}{r^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= (u_{rr} r_y + u_{r\theta} \theta_y) r_y + u_r r_{yy} + (u_{\theta r} r_y + u_{\theta\theta} \theta_y) \theta_y + u_\theta \theta_{yy} \\ &= u_{rr} \frac{y^2}{r^2} + u_{r\theta} \frac{2xy}{r^3} + u_r \frac{x^2}{r^3} + u_{\theta\theta} \frac{x^2}{r^4} - u_\theta \frac{2xy}{r^4} \end{aligned}$$

$$u_{zz} = u_{zz}$$

于是

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \\ &= u_{rr} + u_r \frac{1}{r} + u_{\theta\theta} \frac{1}{r^2} + u_{zz} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{aligned}$$

题目 12.5. 5. 证明用极坐标表示的下列函数都满足调和方程:

- (1) $\ln r$ 和 θ ;
- (2) $r^n \cos n\theta$ 和 $r^n \sin n\theta$;
- (3) $r \ln r \cos \theta - r\theta \sin \theta$ 和 $r \ln r \sin \theta + r\theta \cos \theta$.

解答. 有一个高级的做法是找实部和虚部, 比如第一个是 $\ln z$ 的实部和虚部, 第二个是 z^n , 第三个是 $z \ln z$, 复值函数是调和的, 实部和虚部都是调和的。

解答. (1)

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{1}{r} \right) = 0 \\ \Delta v &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} & \Delta v &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot nr^{n-1} \cos n\theta) - \frac{1}{r^2} n^2 r^n \cos n\theta & &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot nr^{n-1} \sin n\theta) - \frac{1}{r^2} n^2 r^n \sin n\theta \\
 &= \frac{1}{r} n^2 r^{n-1} \cos n\theta - \frac{1}{r^2} n^2 r^n \cos n\theta & &= \frac{1}{r} n^2 r^{n-1} \sin n\theta - \frac{1}{r^2} n^2 r^n \sin n\theta \\
 &= 0 & &= 0
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial r} &= \ln r \cos \theta + \cos \theta - \theta \sin \theta, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \theta} = -r \ln r \cos \theta - 2r \cos \theta + r\theta \sin \theta \\
 \frac{\partial v}{\partial r} &= \ln r \sin \theta + \sin \theta + \theta \cos \theta, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial^2 \theta} = -r \ln r \sin \theta - 2r \sin \theta - r\theta \cos \theta \\
 \Delta u &= u_{rr} + u_r \frac{1}{r} + u_{\theta\theta} \frac{1}{r^2} \\
 &= \frac{1}{r} \cos \theta + \frac{\ln r \cos \theta + \cos \theta - \theta \sin \theta}{r} + \frac{-r \ln r \cos \theta - 2r \cos \theta + r\theta \sin \theta}{r} \\
 &= 0 \\
 \Delta v &= v_{rr} + v_r \frac{1}{r} + v_{\theta\theta} \frac{1}{r^2} \\
 &= \frac{1}{r} \sin \theta + \frac{\ln r \sin \theta + \sin \theta + \theta \cos \theta}{r} + \frac{-r \ln r \sin \theta - 2r \sin \theta - r\theta \cos \theta}{r} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

题目 12.6. 6. 用分离变量法求解由下述调和方程的第一边值问题所描述的矩形平板 ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$) 上的稳定温度分布:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(0, y) = u(a, y) = 0, \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{a}, u(x, b) = 0 \end{cases}$$

解答. 设 $u(x, y) = X(x)Y(y)$, 于是

$$X''Y + XY'' = 0 \implies \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

得到了两个微分方程, 先求解 X 的, 通解为

$$X = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

代入初值条件 $X(0) = X(a) = 0$, 可得

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{\sqrt{-\lambda}a} + Be^{-\sqrt{-\lambda}a} = 0 \end{cases} \implies e^{\sqrt{-\lambda}a} = e^{-\sqrt{-\lambda}a}$$

所以想要 X 有非零解, λ 需要大于 0, 设 $\lambda = \mu^2$, 于是 $e^{\mu ai} = e^{-\mu ai}$, 即 $\sin \mu a = 0$, 可以得到

$$\mu_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

从而特征函数为 $X_n(x) = \sin \mu_n x$.

然后解 $Y'' - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y = 0$. 于是

$$Y_n(y) = A_n e^{\mu_n y} + B_n e^{-\mu_n y}$$

可以得到方程的解为

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{\mu_n y} + B_n e^{-\mu_n y}) \sin \mu_n x$$

代入初值条件 $u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{a}, u(x, b) = 0$, 有

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n + B_n) \sin \frac{n\pi}{a} x = \sin \frac{\pi}{a} x \\ \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{\mu_n b} + B_n e^{-\mu_n b}) \sin \frac{n\pi}{a} x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A_n e^{\mu_n b} + B_n e^{-\mu_n b} = 0 \\ A_1 + B_1 = 1 \\ A_i + B_i = 0 (i \neq 1) \end{cases} \implies \begin{cases} A_1 = \frac{1}{1 - e^{2\mu_1 b}} \\ B_1 = \frac{1}{1 - e^{-2\mu_1 b}} \\ \text{其余的系数全为0} \end{cases}$$

所以最终的解为

$$u(x, y) = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{a}y} - e^{\frac{\pi}{a}(2b-y)}}{1 - e^{2\frac{\pi b}{a}}} \right) \sin \frac{\pi x}{a}$$

题目 12.7. 9. 调和方程的多项式解称为调和多项式。试证: $\mathbb{R}^2$ 中不超过 n 次且线性独立的调和多项式至多只能有 $2n + 1$ 个。

解答. 用数学归纳法。当 $n = 0$ 时, $p(x) = c$ 是调和多项式。

当 $n = k$ 时, 假设 $\mathbb{R}^2$ 中不超过 k 次的独立的调和多项式有 $2k + 1$ 个。记为 $c, p_1(x, y), \dots, p_{2k}(x, y)$. 当 $n = k+1$ 时, 构造多项式 $p_{2k+1}(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^{k+1}, p_{2k+2}(x, y) = \operatorname{Im}(x + iy)^{k+1}$, 这两个都是 $k+1$ 次多项式, 于是与前面的多项式均线性无关。然后只需要证明 $k+1$ 次调和多项式均能由这 $2k+3$ 个多项式表示出来。

假设存在不全为零的实数 a_i , 满足

$$a_0 c + a_1 p_1 + \dots + a_{2k+2} p_{2k+2} = 0$$

考察 n 次项,

$$p_{2k+1}(x, y) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \binom{k+1}{2s} (-1)^s x^{k+1-2s} y^{2s}$$

$$p_{2k+1}(x, y) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \binom{k+1}{2s+1} (-1)^s x^{k-2s} y^{2s+1}$$

故想要 $a_{2k+1}p_{2k+1} + a_{2k+2}p_{2k+2}$ 里的 n 次项为 0, a_{2k+1} 和 a_{2k+2} 就必须为 0, 从而由 $c, p_1(x, y), \dots, p_{2k}(x, y)$ 的线性无关性得到这一列 a_i 都必须为 0, 从而矛盾, 也就是这 $2k+3$ 个多项式线性无关。

此外, 由于 p 一定得是齐次的多项式, 否则无法相互抵消, 所以在极坐标系中, 可以写成

$$p_k = r^k q(\theta)$$

应用极坐标系下的拉普拉斯算子:

$$\Delta p_k = r^{k-2} (q''(\theta) + k^2 q(\theta)) = 0$$

这个常微分方程的解是二维的, 所以令 $\mathcal{H}_k$ 表示 k 次齐次调和多项式空间, 则

$$\dim \mathcal{H}_k \leq 2, \quad k \geq 1$$

所以

$$\dim \mathcal{H} = \sum_{s=1}^{k+1} \dim \mathcal{H}_s \leq 2k+3$$

而上面找到了 $2k+3$ 个线性无关的多项式, 所以 $\dim \mathcal{H} = 2k+3$ 。从而数学归纳完毕。

于是, $\mathbb{R}^2$ 中不超过 n 次且线性独立的调和多项式至多只能有 $2n+1$ 个。

解答. 有一个高级做法来说明 $k+1$ 次调和多项式均能由这 $2k+3$ 个多项式表示出来。

设 $f(x, y)$ 是调和多项式且次数不超过 n , 存在调和函数 g , 使得 $f + ig$ 是全纯函数, 由 Cauchy-Riemann 方程可得

$$f_x = g_y, \quad f_y = -g_x \implies g \text{ 是不超过 } n \text{ 次的多项式}$$

所以 $f + ig$ 也是多项式, 取实部就可以得到 f 的线性表示。

3.p113 2, 5 (公式 (1.8) 处叙述了外问题, 可尝试用极值原理, 请在证明之前先陈述稳定性, 6, 7, 8

题目 12.8. 2. 若函数 $u(x, y)$ 是单位圆上的调和函数, 又已知他在单位圆周上的数值为 $u = \sin \theta$, 其中 θ 表示极角, 问函数 u 在原点之值等于多少?

解答. 由调和函数的平均值定理

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$$

解答. 在边界上不是调和的有一个做法:

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(0,r)} u(x,y) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(0,1)} u(rx,ry) ds.$$

题目 12.9. 5. 证明调和方程狄利克雷外问题解的稳定性。(公式 (1.8) 处叙述了外问题, 可尝试用极值原理, 请在证明之前先陈述稳定性)

解答. 命题 (调和方程狄利克雷外问题解的稳定性): 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是有界闭区域, 边界为 $\Gamma = \partial D$, 外区域为 $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus D$. 考虑调和方程的外 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega \\ u = \varphi, & x \in \Gamma \\ u(x) \rightarrow A, & |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

设 $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 解了这个方程, 则有稳定性估计

$$\sup_{\overline{\Omega}} |u_1 - u_2| \leq \max \left\{ \sup_{\Gamma} |\varphi_1 - \varphi_2|, |A_1 - A_2| \right\}.$$

证明: 设 $w = u_1 - u_2$, 则 w 解了

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & x \in \Omega \\ w = \varphi_1 - \varphi_2, & x \in \Gamma \\ u(x) \rightarrow A_1 - A_2, & |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

记

$$M = \max \left\{ \sup_{\Gamma} |\varphi_1 - \varphi_2|, |A_1 - A_2| \right\}$$

因为 $w(x) \rightarrow A_1 - A_2$, 不妨设 w 从上方趋近, 所以对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 R , 使得当 $|x| > R$ 时,

$$|w(x)| \leq |A_1 - A_2| + \varepsilon \leq M + \varepsilon$$

然后取外区域的分割, $\Omega_R = \Omega \cap B_R(0)$, 这是一个有界区域, 边界为 $B_R(0)$ 和 Γ , 由于 w 在 Ω_R 中调和, 所以对 w 和 $-w$ 应用极值原理, 可得

$$|w(x)| \leq M + \varepsilon$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 由于 x 是任意的, 所以 $\sup_{\Omega} |w(x)| \leq M$.

题目 12.10. 6. 对于二阶偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0,$$

其中 a_{ij}, b_i, c 均为常数, 假设矩阵 (a_{ij}) 是正定的, 即对任何实数 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 成立

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \quad (\alpha \text{ 为正的常数})$$

则称他为椭圆形方程。又设 $c < 0$, 试证明该方程的解也成立如下的极值原理: 若 u 在 Ω 中满足方程, 在 $\Omega \cup \Gamma$ 上连续, 则 u 不能在 Ω 的内部达到正的最大值或负的最小值。

解答. 假设在 Ω 内部达到负的最小值。设在 x_0 处取到负的最小值, 因此

$$u(x_0) < 0, \nabla u(x_0) = 0, H_u(x_0) \text{ 正定}$$

因此由于 A 正定, 所以

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} > 0$$

因为 $c < 0$, 所以原方程应当大于 0, 这与等于 0 矛盾, 所以不会在内部取到最值。

解答. 若 u 在内部点 x_0 取得极小值, Hessian 矩阵 $H_u(x_0)$ 只能说明是半正定, 不一定是正定。

题目 12.11. 7. 证明第 6 题中讨论的椭圆型方程的第一边值问题解的唯一性与稳定性。

解答. 表述: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域, $\Gamma = \partial\Omega$ 。考虑椭圆型方程

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0$$

其中 a_{ij}, b_i, c 均为常数, 假设矩阵 (a_{ij}) 是正定的, $c < 0$, 第一边值问题是

$$\begin{cases} Lu = 0, & x \in \Omega \\ u = \varphi, & x \in \Gamma \end{cases}$$

若 $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 分别满足

$$\begin{cases} Lu_1 = 0, & x \in \Omega, \\ u_1 = \varphi_1, & x \in \Gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} Lu_2 = 0, & x \in \Omega, \\ u_2 = \varphi_2, & x \in \Gamma, \end{cases}$$

则有稳定性估计

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_1 - u_2| \leq \max_{\Gamma} |\varphi_1 - \varphi_2|.$$

特别地, 如果 $\varphi_1 = \varphi_2$, 则 $u_1 \equiv u_2$, 从而证明了解的唯一性。

证明: 设 $w = u_1 - u_2$, 则 w 解了

$$\begin{cases} Lw = 0, & x \in \Omega \\ w = \varphi_1 - \varphi_2, & x \in \Gamma \end{cases}$$

由极大值原理, 正的极大值只能在边界处达到, 即

$$w \leq \max_{\Gamma} w = \max_{\Gamma} |\varphi_1 - \varphi_2|$$

对 $\tilde{w} = -w$ 也做如此操作, 得到负的最小值在边界取到, 即

$$\tilde{w} \geq -\max_{\Gamma} |\varphi_1 - \varphi_2|$$

于是就有

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_1 - u_2| \leq \max_{\Gamma} |\varphi_1 - \varphi_2|.$$

题目 12.12. 8. 举例说明对于方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu = 0 (c > 0)$ 不成立极值原理。

解答. 令 $u = \cos x, c = 1$, 于是

$$u_{xx} + u_{yy} = -\cos x = -cu$$

考虑有界区域 $\Omega = (-\pi, \pi) \times (-1, 1)$, 最大值是在内部取到的。

题目 12.13. 补充题: $u \in C(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} u \Delta \varphi = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 那么 u 调和。

解答. 使用磨光函数 ρ_ε .

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(z) u(x-z) dz$$

这是一个 C^∞ 的函数, 所以

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \Delta \varphi = 0 = \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon \Delta \varphi = 0 = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u_\varepsilon \varphi = 0$$

对任意的 φ 都成立, 所以 u_ε 是调和的, 从而 u 是调和的。

题目 12.14. 补充题: $\partial B(0,1) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 是右半圆, Γ_2 是左半圆, Γ_1, Γ_2 是 $\partial B(0,1)$ 的开子集。若 $u|_{\Gamma_1} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0$, 并且 u 调和, 那么 $u \equiv 0$ 。

解答. 使用格林公式:

$$\int_B |\nabla u|^2 dx = \int_{\partial B} u \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_B u \Delta u dx$$

因为 u 在 B 中调和, 所以 $\Delta u = 0$ in B , 所以 $\int_B u \Delta u dx = 0$. 在 ∂B 上,

$$\int_{\partial B} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{\Gamma_1} u \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

所以 $\int_B |\nabla u|^2 dx = 0$, 从而 $\nabla u = 0 \implies u \equiv 0$.

题目 12.15. 若 $u|_{\Gamma_1} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = 0$, 并且 u 调和, 那么 $u \equiv 0$ 。

第十三章 第 15 周微分方程作业

姓名：王登辉

学号：2024K8009906023

题目 13.1. 1. (此为 p121 问题 2) 证明 $G(x, y) = G(y, x)$ (这里我们追求严格的数学证明, 因此我们用 $G(x, y) = \Phi(x - y) - \phi^x(y)$ 这个定义作为出发点)

解答. 固定 $x \in \Omega$ 之后, ϕ^x 关于变量 y 调和, 并满足边界条件

$$\Delta_y \phi^x(y) = 0 \quad (y \in \Omega), \quad \phi^x(y) = \Phi(x - y) \quad (y \in \partial\Omega).$$

定义 $u(z) = G(x, z), v(z) = G(y, z)$, 固定 x, y , 只有 z 是变量, $u(z)$ 只在 $z = x$ 处有奇性, $v(z)$ 只在 $z = y$ 处有奇性, 且 $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0$.

令 $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (\overline{B(x, \varepsilon)} \cup \overline{B(y, \varepsilon)})$, u, v 在 Ω_ε 上没有奇性, 由格林恒等式, 可得

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u) dz = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (u\nabla v - v\nabla u) dS_z.$$

而 $\partial\Omega_\varepsilon$ 由三部分组成: $\partial\Omega, \partial\overline{B(x, \varepsilon)}, \partial\overline{B(y, \varepsilon)}$. 所以分别进行处理:

在 $\partial\Omega$ 上, $u = v = 0$, 所以 $\int_{\partial\Omega} (u\nabla v - v\nabla u) dS_z = 0$.

在 $\partial\overline{B(x, \varepsilon)}$ 上, 因为 v 是没有奇性的, 所以泰勒展开有 $v(z) = v(x) + O(\varepsilon), |\nabla v| \leq M < \infty, \phi^x(z) = O(\varepsilon)$. 于是

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\overline{B(x, \varepsilon)}} u\nabla v dS_z \right| &\leq \int_{\partial\overline{B(x, \varepsilon)}} |u\nabla v| dS_z \leq M \int_{\partial\overline{B(x, \varepsilon)}} |u| dS_z \\ &= M \int_{\partial\overline{B(x, \varepsilon)}} |\Phi(x - z) - \phi^x(z)| dS_z \\ &\leq \begin{cases} M(\varepsilon^{2-n} + 1)\varepsilon^{n-1} \rightarrow 0 & n \geq 3 \\ M\varepsilon(|\log \varepsilon| + 1) \rightarrow 0 & n = 2 \end{cases} \\ \int_{\partial\overline{B(x, \varepsilon)}} v\nabla u dS_z &= v(x) \int_{\partial\overline{B(x, \varepsilon)}} \nabla u dS_z + \int_{\partial\overline{B(x, \varepsilon)}} O(\varepsilon) \nabla u dS_z \end{aligned}$$

对第一项进行估计,

$$v(x) \int_{\partial\overline{B(x, \varepsilon)}} \nabla u dS_z = v(x) \left(\int_{\partial\overline{B(x, \varepsilon)}} \nabla \Phi(x - z) dS_z - \int_{\partial\overline{B(x, \varepsilon)}} \nabla \phi^x dS_z \right)$$

因为 $\int_{\partial B(x, \varepsilon)} \nabla \Phi(x-z) dS_z = 1$, 且 ϕ^x 光滑, 从而有 $|\nabla \phi^x| \leq M < \infty$, 所以

$$v(x) \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \nabla u dS_z \leq v(x) (1 - \widetilde{M} \varepsilon^{n-1}) \rightarrow v(x).$$

对第二项进行估计,

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} O(\varepsilon) \nabla u dS_z = \int_{\partial B(x, \varepsilon)} [\nabla \Phi(x-z) - \nabla \phi^x] O(\varepsilon) dS_z$$

基本解导数满足 $|\nabla \Phi(x-z)| \leq C\varepsilon^{1-n}$, $\nabla \phi^x$ 仍然是有界的, 所以

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} O(\varepsilon) \nabla u dS_z &\leq \int_{\partial B(x, \varepsilon)} (C\varepsilon^{1-n} + M) O(\varepsilon) dS_z \\ &= (C\varepsilon^{1-n} + M) O(\varepsilon) O(\varepsilon^{n-1}) \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

所以总的来说, 在 $\partial B(x, \varepsilon)$ 上,

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} (u \nabla v - v \nabla u) dS_z \rightarrow -v(x)$$

同理, 在 $\partial B(y, \varepsilon)$ 上,

$$\int_{\partial B(y, \varepsilon)} (u \nabla v - v \nabla u) dS_z \rightarrow u(y)$$

所以, 合到一起, 就有

$$0 = \int_{\partial \Omega_\varepsilon} (u \nabla v - v \nabla u) dS_z = -v(x) + u(y) \implies G(x, y) = G(y, x).$$

题目 13.2. 2. 利用傅立叶方法推导上半平面的 Poisson 公式 (特别的, 计算 $\frac{1}{1+x^2}$ 的傅立叶变换)

解答. 先计算 $\frac{1}{1+x^2}$ 的傅立叶变换:

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{1+x^2} \right] (\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} e^{-ix\xi} dx$$

当 $\xi > 0$ 时, 取下半平面, 奇点是 $-i$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} e^{-ix\xi} dx &= -2\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \text{Res}_{z=-i} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} \\ &= -\sqrt{2\pi} i \lim_{x \rightarrow -i} \frac{e^{-ix\xi}}{x-i} \\ &= -\sqrt{2\pi} i \frac{e^{-\xi}}{-2i} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-\xi} \end{aligned}$$

当 $\xi < 0$ 时, 取上半平面, 奇点是 i , 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} e^{-ix\xi} dx &= 2\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \operatorname{Res}_{z=i} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} \\ &= \sqrt{2\pi} i \lim_{x \rightarrow i} \frac{e^{-ix\xi}}{x+i} \\ &= \sqrt{2\pi} i \frac{e^{\xi}}{2i} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{\xi}\end{aligned}$$

当 $\xi = 0$ 时, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$, 所以综合来说,

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{1+x^2} \right] (\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{|\xi|}.$$

然后用傅立叶方法推导上半平面的 Poisson 公式: (本来写的是二维的, 但是我删了, 又不想补了)

记 n 维空间中的点为 $(x, y), x \in \mathbb{R}^{n-1}, y \in \mathbb{R}$, 于是

$$\begin{cases} \Delta_x u + u_{yy} = 0, & y > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases}$$

对 x 做傅里叶变换, 有

$$\begin{cases} -|\xi|^2 \hat{u} + \hat{u}_{yy} = 0, & y > 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \end{cases}$$

解常微分方程, 通解为

$$\hat{u} = A(\xi) e^{|\xi|y} + B(\xi) e^{-|\xi|y}$$

为了使得 $y \rightarrow \infty$ 时不会去向 ∞ , 所以设 $A(\xi) = 0$. 由边界条件 $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$ 得到 $B(\xi) = \hat{f}(\xi)$, 于是

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|y}$$

所以

$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left[\hat{f}(\xi) e^{-|\xi|y} \right] (x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} f * \mathcal{F}^{-1} [e^{-|\xi|y}],$$

由于

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1} [e^{-|\xi|y}] &= (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\xi|y} e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\xi) \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{y}{(|x - \xi|^2 + y^2)^{n/2}} d\xi \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{y}{(|x - \xi|^2 + y^2)^{n/2}} f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

题目 13.3. 3. 考虑上半平面的边值问题（假设边界值 g 连续，假设 u 在上半平面内部调和），证明（格林公式）给出的 u 在边界连续，（即 x 趋于边界上 x^* ，有 $u(x)$ 趋于 $g(x^*)$ ）

解答. 公式为

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} u(\xi, 0) d\xi$$

设边界函数为 $g(x)$ ，下面需要证明当 $(x, y) \rightarrow (x^*, 0)$ 时， $u(x, y) \rightarrow g(x^*)$ 。

$$\begin{aligned} |u(x, y) - g(x^*)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} g(\xi) d\xi - g(x^*) \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} g(\xi) d\xi - g(x^*) \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} [g(\xi) - g(x^*)] d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} |g(\xi) - g(x^*)| d\xi \end{aligned}$$

因为 g 在 x^* 处连续，所以对任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使得当 $|\xi - x^*| < \delta$ 时， $|g(\xi) - g(x^*)| < \varepsilon$ 。记 $P_y(x - \xi) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2}$ ， $B_\delta(x^*) = \{\xi : |\xi - x^*| < \delta\}$ ， $|g(x)| \leq M$ （假设 g 有界吧，还简单点，不假设的话是不是也可以通过紧集分割然后趋向正无穷？）于是

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} P_y(x - \xi) |g(\xi) - g(x^*)| d\xi &= \left(\int_{B_\delta(x^*)} + \int_{\mathbb{R} \setminus B_\delta(x^*)} \right) P_y(x - \xi) |g(\xi) - g(x^*)| d\xi \\ &\leq \int_{B_\delta(x^*)} P_y(x - \xi) \varepsilon d\xi + \int_{\mathbb{R} \setminus B_\delta(x^*)} P_y(x - \xi) 2M d\xi \\ &\leq \varepsilon + 2M \int_{\mathbb{R} \setminus B_\delta(x^*)} P_y(x - \xi) d\xi \end{aligned}$$

当 x 足够靠近 x^* 时，不妨设 $|x - x^*| < \frac{\delta}{2}$ ，于是

$$|\xi - x| \geq |\xi - x^*| - |x - x^*| \geq \frac{\delta}{2}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R} \setminus B_\delta(x^*)} P_y(x - \xi) d\xi &\leq \int_{|s| \geq \delta/2} \frac{1}{\pi} \frac{y}{s^2 + y^2} ds = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{s}{y}\right) \Big|_{|s| \geq \delta/2} \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\delta}{2y}\right)\end{aligned}$$

当 $y \rightarrow 0$,

$$\int_{\mathbb{R} \setminus B_\delta(x^*)} P_y(x - \xi) d\xi \rightarrow 0$$

因此

$$|u(x, y) - g(x^*)| \leq \varepsilon + \text{一个随 } (x, y) \rightarrow (x^*, 0) \text{ 而趋于 } 0 \text{ 的量.}$$

所以

$$\limsup_{(x, y) \rightarrow (x^*, 0), y > 0} |u(x, y) - g(x^*)| \leq \varepsilon \implies \limsup_{(x, y) \rightarrow (x^*, 0), y > 0} u(x, y) = g(x^*)$$

题目 13.4. 4. 对圆盘平行的完成问题 2, 3

解答. 用傅立叶方法推导圆盘的 Poisson 公式:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & y > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

在极坐标中,

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

于是方程为

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

设 $u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$, 代入得

$$\frac{r^2 R'' + r R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

求解 Θ , 由于 $\Theta'' + \lambda \Theta = 0$, 且 Θ 满足 2π 周期, 所以 $\lambda = n^2$,

$$\Theta(\theta) = C \cos n\theta + D \sin n\theta$$

径向部分满足

$$r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0$$

当 $n \geq 1$ 时, 这是欧拉方程, 解为

$$R(r) = \alpha r^n + \beta r^{-n}$$

由于要求在圆盘内有界, 所以 $\beta = 0$.

当 $n = 0$ 时, 径向解为

$$R(r) = \alpha + \beta \ln r$$

由于要求在圆盘内有界, 所以 $\beta = 0$ 。

此时圆盘内有界调和函数可写成

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

边界条件是 $u(R, \theta) = f(\theta)$ (符号有点混乱), 所以

$$\begin{aligned} u(R, \theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} a_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \end{aligned}$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

比较系数可得

$$R^n A_n = a_n, R^n B_n = b_n \implies A_n = \frac{a_n}{R^n}, B_n = \frac{b_n}{R^n}.$$

所以

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_0^{2\pi} f(\varphi) (\cos n\varphi \cos n\theta + \sin n\varphi \sin n\theta) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n(\varphi - \theta) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(n(\varphi - \theta)) \right] f(\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

然后计算里面的核, 记 $\rho = r/R, \vartheta = \varphi - \theta$, 于是

$$\rho^n \cos(n\vartheta) = \operatorname{Re} e^{n[\ln \rho + i\vartheta]}$$

$$\begin{aligned}
1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(n(\varphi - \theta)) &= \operatorname{Re} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{n[\ln \rho + i\vartheta]} \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{1 + e^{\ln \rho + i\vartheta}}{1 - e^{\ln \rho + i\vartheta}} \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{1 + \rho \cos \vartheta + i\rho \sin \vartheta}{1 - \rho \cos \vartheta - i\rho \sin \vartheta} \right) \\
&= \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos \vartheta + \rho^2} \\
&= \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2}
\end{aligned}$$

所以最终得到

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} f(\varphi) d\varphi$$

证明边界的连续性： 设边界函数为 $f(\theta)$ ，下面需要证明当 $(r, \theta) \rightarrow (R, \theta^*)$ 时， $u(r, \theta) \rightarrow f(\theta^*)$ 。记 $P(\varphi - \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2}$ ，于是

$$\begin{aligned}
|u(r, \theta) - f(\theta^*)| &= \left| \int_0^{2\pi} P(\varphi - \theta) (f(\varphi) - f(\theta^*)) d\varphi \right| \\
&\leq \int_0^{2\pi} P(\varphi - \theta) |f(\varphi) - f(\theta^*)| d\varphi
\end{aligned}$$

因为 f 在 θ^* 处连续，所以对任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使得当 $|\varphi - \theta^*| < \delta$ 时， $|f(\varphi) - f(\theta^*)| < \varepsilon$ 。记 $B_\delta(\theta^*) = \{\varphi : |\varphi - \theta^*| < \delta\}$ ， $|f(\theta)| \leq M$ ，于是

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} P(\varphi - \theta) |f(\varphi) - f(\theta^*)| d\varphi &= \left(\int_{[0, 2\pi] \setminus B_\delta(\theta^*)} + \int_{B_\delta(\theta^*)} \right) P(\varphi - \theta) |f(\varphi) - f(\theta^*)| d\varphi \\
&\leq \int_{B_\delta(\theta^*)} P(\varphi - \theta) \varepsilon d\varphi + 2M \int_{[0, 2\pi] \setminus B_\delta(\theta^*)} P(\varphi - \theta) d\varphi \\
&\leq \varepsilon + 2M \int_{[0, 2\pi] \setminus B_\delta(\theta^*)} \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi
\end{aligned}$$

当 θ 足够靠近 θ^* 时，不妨设 $|\theta - \theta^*| < \frac{\delta}{2}$ ，于是

$$|\varphi - \theta| \geq |\varphi - \theta^*| - |\theta - \theta^*| \geq \frac{\delta}{2}$$

于是

$$\int_{[0, 2\pi] \setminus B_\delta(\theta^*)} P(\varphi - \theta) d\varphi \leq \int_{[0, 2\pi] \cap \{|\varphi - \theta| \geq \delta/2\}} P(\varphi - \theta) d\varphi$$

因为

$$\int_{-\delta/2}^{\delta/2} \frac{a}{\cos \varphi} d\varphi = a \ln \left(\frac{\sin \varphi + 1}{|\cos \varphi|} \right) \Big|_{-\delta/2}^{\delta/2} = 2a \ln \left(\left| \tan \frac{\delta}{2} + \frac{1}{\cos \frac{\delta}{2}} \right| \right)$$

随着 $a \rightarrow 0$ 而趋向于 0, 所以

$$\int_{[0, 2\pi] \cap \{|\varphi - \theta| \geq \delta/2\}} P(\varphi - \theta) d\varphi$$

也是随着 $r \rightarrow R$ 而趋向于 0, 所以

$$|u(x, y) - f(\theta^*)| \leq \varepsilon + \text{一个随 } (r, \theta) \rightarrow (R, \theta^*) \text{ 而趋于 0 的量.}$$

所以

$$\limsup_{(r, \theta) \rightarrow (R, \theta^*)} |u(x, y) - f(\theta^*)| \leq \varepsilon \implies \limsup_{(r, \theta) \rightarrow (R, \theta^*)} u(x, y) = f(\theta^*)$$

5.P121 1, 5, 6, 7, 8

题目 13.5. 1. 证明格林函数的性质 3 及性质 5.

性质 3: 在区域 Ω 中成立着不等式

$$0 < G(x, y) < \frac{1}{4\pi|x-y|}.$$

性质 5: $\iint_{\Gamma} \nabla G(x, y) \cdot n_y dS_y = -1$.

解答. 性质 3: 要证明 $0 < G(x, y) < \frac{1}{4\pi|x-y|}$, 也就是要证明

$$0 < G(x, y) < \Phi(y - x)$$

所以先证明 $\phi^x(y) > 0$.

因为 $\phi^x(y)$ 调和, 在边界上大于 0, 由极小值原理, $\phi^x(y)$ 在 Ω 内大于 0, 所以 $G(x, y) < \Phi(y - x)$.

然后由于 $G(x, y)$ 在 $\Omega - B_\varepsilon(x)$ 上调和, 在边界 $\partial\Omega$ 上等于 0, 在 ∂B_ε 上是 $\frac{1}{4\pi\varepsilon} - \phi^x(y)$, 由于 $\phi^x(y)$ 光滑, 在 x 附近有界, 所以可以找到一个 ε , 使得 $\frac{1}{4\pi\varepsilon} - \phi^x(y)$ 在 ∂B_ε 上大于 0, 于是就有 $G(x, y)$ 在边界上大于等于 0, 由极小值原理, $G(x, y) \geq 0$ 在 Ω_ε 上。再由强极小值原理, 由于 G 不会是常数, 所以在内部不会去到极小值 0, 所以在 Ω_ε 内大于 0. 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 就可以得到在 Ω 内, $G(x, y) > 0$.

性质 5: 因为 $G(x, y) = \Phi(y - x) - \phi^x(y)$. 所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} \nabla G(x, y) \cdot n_y dS_y &= \int_{\Gamma} \nabla \Phi(y - x) \cdot n_y dy - \int_{\Omega} \Delta \phi^x(y) dy \\ &= - \int_{\partial B_\varepsilon} \nabla \Phi(y - x) \cdot n_y dy - 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

题目 13.6. 5. 求半圆区域上狄利克雷问题的格林函数。

解答. 半圆区域有两段边界 $y = 0$ 和 $x^2 + y^2 = R^2 (y > 0)$, 所以要同时对这两条边界作镜像。

令 $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, 三个镜像点分别是:

- 关于 $y = 0$ 的反射点 $Q_1 = (\xi, -\eta)$.
- 关于 $x^2 + y^2 = R^2 (y > 0)$ 的反射点 $Q_2 = \frac{R^2}{\rho^2} (\xi, \eta)$
- 关于两个一起反射 $Q_3 = \frac{R^2}{\rho^2} (\xi, -\eta)$.

于是半圆区域的 Dirichlet 格林函数为

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|P - Q_2||P - Q_1|}{|P - Q||P - Q_3|}$$

题目 13.7. 6. 利用泊松公式求边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ u(r, \theta, \varphi) |_{r=1} = 3 \cos 2\theta + 1 \end{cases}$$

的解。

解答. 单位球内的 Poisson 公式为

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{1 - r^2}{4\pi} \iint_{S^2} \frac{f(\theta', \varphi')}{|x - \xi|^3} dS_\xi$$

但是这个求积分太麻烦了, 所以选择求和的 Poisson 公式:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=-n}^n a_{nm} Y_n^m(\theta, \varphi)$$

其中 $Y_n^m(\theta, \varphi) = C_{nm} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}$, 而

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \overline{Y_n^m(\theta, \varphi)} \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (3 \cos 2\theta + 1) C_{nm} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{-im\varphi} \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$

只有 $m = 0$ 时, a_{nm} 才可能不为 0, 此时

$$C_{n0} = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}}, \quad P_0(\cos \theta) = 1, \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad P_2(\cos \theta) = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}$$

于是

$$\begin{aligned} a_{n0} &= \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (3 \cos 2\theta + 1) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \sqrt{(2n+1)\pi} \int_0^\pi (6 \cos^2 \theta - 2) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

所以不为 0 的 a_{n0} 只有 a_{20} , 并且

$$\begin{aligned} a_{20} &= \sqrt{5\pi} \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1)^2 \sin \theta d\theta \\ &= \sqrt{5\pi} \int_{-1}^1 9t^4 - 6t^2 + 1 dt \\ &= \sqrt{5\pi} \left(\frac{9}{5}t^5 - 2t^3 + t \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{8}{5}\sqrt{5\pi} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=-n}^n a_{nm} Y_n^m(\theta, \varphi) \\ &= r^2 a_{20} Y_2^0(\theta, \varphi) \\ &= r^2 a_{20} C_{20} P_2(\cos \theta) \\ &= r^2 \cdot (3 \cos 2\theta + 1) \end{aligned}$$

备注 13.1. 我有一个想法, 但是 AI 告诉我是不对的。就是既然边界没有涉及 φ , 那么直接就设 $u(r, \theta, \varphi) = u(r, \theta)$. 然后用二维的来做, 但是不对是因为降维之后, 方程不是二维极坐标下的拉普拉斯方程, 而是三维球坐标中去掉 φ 后的方程:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}(u_{\theta\theta} + \cot \theta u_\theta) = 0.$$

这里有 $\frac{2}{r}u_r \cot \theta u_\theta$ 这些三维球坐标特有的项, 二维极坐标的拉普拉斯算子是

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta},$$

它和这里不一样。

解答. 一种巧妙地分离变量, $u = f(r)(3 \cos 2\theta + 1)$.

题目 13.8. 7. 求泊松方程狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u = x^2 y, & x^2 + y^2 < a \\ u = 0, & x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

的解。

解答. 设 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 拉普拉斯算子变成

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

于是 $\Delta u = x^2 y$ 就变成了

$$\Delta u = r^3 \cos^2 \theta \sin \theta = \frac{r^3}{4} (\sin \theta + \sin 3\theta)$$

设 $u = A(r) \sin \theta + B(r) \sin 3\theta$, 那么

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \\ &= A'' \sin \theta + \frac{1}{r}A' \sin \theta - \frac{1}{r^2}A \sin \theta + B'' \sin 3\theta + \frac{1}{r}B' \sin 3\theta - \frac{9}{r^2}B \sin 3\theta \end{aligned}$$

于是得到两个常微分方程

$$\begin{cases} A'' + \frac{A'}{r} - \frac{A}{r^2} = \frac{r^3}{4} \\ B'' + \frac{B'}{r} - \frac{9B}{r^2} = \frac{r^3}{4} \end{cases}$$

设 $A = a_5 r^5 + a_4 r^4 + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0$ 是一个最高次为 5 次的多项式, 于是

$$\begin{aligned} A'' + \frac{A'}{r} - \frac{A}{r^2} &= 20a_5 r^3 + 12a_4 r^2 + 6a_3 r + 2a_2 + 5a_5 r^3 + 4a_4 r^2 + 3a_3 r + 2a_2 + \frac{a_1}{r} \\ &\quad - a_5 r^3 - a_4 r^2 - a_3 r - a_2 - \frac{a_1}{r} - \frac{a_0}{r^2} \\ &= 24a_5 r^3 + 15a_4 r^2 + 8a_3 r + 3a_2 - \frac{a_0}{r^2} \\ &= \frac{r^3}{4} \end{aligned}$$

对应系数可得

$$a_5 = \frac{1}{96}, a_1 \text{ 待定} \implies A(r) = \frac{1}{96}r^5 + a_1 r$$

设 $B = b_5 r^5 + b_4 r^4 + b_3 r^3 + b_2 r^2 + b_1 r + b_0$ 是一个最高次为 5 次的多项式, 于是

$$\begin{aligned} B'' + \frac{B'}{r} - \frac{9B}{r^2} &= 20b_5 r^3 + 12b_4 r^2 + 6b_3 r + 2b_2 + 5b_5 r^3 + 4b_4 r^2 + 3b_3 r + 2b_2 + \frac{b_1}{r} \\ &\quad - 9b_5 r^3 - 9b_4 r^2 - 9b_3 r - 9b_2 - \frac{9b_1}{r} - \frac{9b_0}{r^2} \\ &= 16b_5 r^3 + 7b_4 r^2 - 5b_2 - \frac{8b_1}{r} - \frac{9b_0}{r^2} \\ &= \frac{r^3}{4} \end{aligned}$$

对应系数可得

$$b_5 = \frac{1}{64}, b_3 \text{ 待定} \implies B = \frac{1}{64}r^5 + b_3 r^3$$

所以得到

$$u = \left(\frac{1}{96} r^5 + a_1 r \right) \sin \theta + \left(\frac{1}{64} r^5 + b_3 r^3 \right) \sin 3\theta$$

代入边界条件, 当 $r = \sqrt{a}$ 时, $u = 0$, 有

$$\left(\frac{1}{96} a^{5/2} + a_1 \sqrt{a} \right) \sin \theta + \left(\frac{1}{64} a^{5/2} + b_3 a^{3/2} \right) \sin 3\theta = 0 \implies a_1 = -\frac{1}{96} a^2, b_3 = -\frac{1}{64} a$$

所以最终结果为

$$u(r, \theta) = \left(\frac{1}{96} r^5 - \frac{1}{96} a^2 r \right) \sin \theta + \left(\frac{1}{64} r^5 - \frac{1}{64} a r^3 \right) \sin 3\theta$$

换回 x, y 的结果是

$$u(x, y) = \frac{y}{192} (x^2 + y^2 - a) (11x^2 - y^2 + 2a).$$

题目 13.9. 8. 求 $\mathbb{R}^2$ 中调和方程在两平行线间的格林函数。

解答. 设两平行线为 $l_1: y = a$ 和 $l_2: y = b$, 设 $P = (x, y)$, 固定极点为 $Q(\xi, \eta)$

- 关于 l_1 的对称点为 $Q_1^+ = (\xi, 2a - \eta)$
- 关于 l_2 的对称点为 $Q_1^- = (\xi, 2b - \eta)$
- 关于 l_1 对称然后关于 l_2 对称为 $Q_2^+ = (\xi, 2b - 2a + \eta)$
-

设 $L = b - a$, 这样操作之后会产生一串点,

$$Q_n^+ = (\xi, \eta + 2nL), Q_n^- = (\xi, 2a - \eta + 2nL), n \in \mathbb{Z}$$

所以格林函数为

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \frac{|P - Q_n^-|}{|P - Q_n^+|}.$$

第十四章 期末考试

14.1 常系数 ODE (组), 二阶、齐次 (二阶的一定要会)

14.2 波动方程

Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u|_{t=0} = f(x), u'|_{t=0} = g(x) \end{cases}$$

一维达朗贝尔公式:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-t) + f(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds$$

三维球平均:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} f(y) dS_y \right] + \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} g(y) dS_y$$

惠更斯原理 (三维才对、二维不对, 但考试可能不会涉及)

二维使用降维法

能量方法

$$E(t) = \int_{\Omega_t} u_t^2 + |\nabla u|^2 dx$$

其中 $\Omega_t = \{(x, t) \mid |x - x_0| \leq |t - t_0|\}$ 。求导得到导数小于等于 0 然后得到稳定性、唯一性、有限传播速度。

如果在考试中写了 $\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + |\nabla u|^2 dx$, 要先说明可积性, 如果是一个有界区域 Ω , 那么就是可以随便用的。

14.3 热方程

Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y) K(y, t) dy$$

其中热核 $K(y, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}$.

Fourier 变换:

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{-iy\xi} dy$$

性质: 求导 $\leftrightarrow$ 求多项式, 卷积 $\leftrightarrow$ 乘积, 保 L^2 范数。

极大值原理: $u_t - \Delta u \leq 0$, 最大值位于抛物边界。(会有叙述定理的题目, 不会要求证明)

由极大值原理可以推出一些性质, 比如唯一性、稳定性、最大模估计。

能量法: $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx$.

14.4 位势方程

$\Delta u = 0$ 基本解

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)|B(0,1)|} |x|^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases}, \quad \int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = 1$$

$$\Delta u = f, f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \implies u(x) = f * \Phi(x)$$

要证明一个函数是调和函数至少得是 C^2 的。这样才能求两阶导。

调和函数的性质:

均值公式、弱极值原理、梯度估计。

Harnack 不等式, 推论: 刘维尔定理。

Green 函数:

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

$$u(x, y) = \int_{\partial\Omega} -g \frac{\partial G}{\partial n}(x, y) dS_y + \int_{\Omega} f G(x, y) dy$$

特殊的上半平面和球面的格林函数。

Poisson 公式

强极值原理, Hopf 极值原理

能量方法: $E = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$. (好像考试题并不需要用到能量, 但可以试试)

14.5 Green 公式

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} u \cdot n_i dS &= \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \\ \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dx &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v dx \\ \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u dx\end{aligned}$$

14.6 齐次化原理

(这个其实不会考) 带 t 的方程, 齐次 $\implies$ 非齐次

14.7 初边值问题

分离变量, 找满足边值条件的正交基。

例:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1 \\ u|_{t=0} = g(x), u|_{t=0} = h(x) \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \end{cases}$$