

微分方程作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

2026 年 5 月 11 日

第一章 第2周微分方程作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

课本15页6,8,10。

6. 判断下列方程是否为恰当方程，并对恰当方程求解

6. $(ye^x + 2e^x + y^2)dx + (e^x + 2xy)dy = 0$.

8. $(ax^2 + by^2)dx + cxydy = 0$ (a, b 和 c 为常数) .

10. $xf(x^2 + y^2)dx + yf(x^2 + y^2)dy = 0$,其中 $f(\cdot)$ 是连续可微的.

6.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x + 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x + 2y$$

所以是恰当方程。经过观察发现，

$$\text{原式} = d(ye^x + 2e^x + xy^2) = 0$$

所以通积分为 $\Phi(x, y) = ye^x + 2e^x + xy^2 = C$ ，所以解为

$$e^x(y + 2) + xy^2 = C.$$

8.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2by, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = cy$$

当 $c = 2b$ 时，他是恰当的，否则不恰当。经过观察发现，

$$\text{原式} = d\left(\frac{1}{3}ax^3 + bxy^2\right) = 0$$

所以方程的解为

$$\frac{1}{3}ax^3 + bxy^2 = C.$$

10.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xyf', \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xyf'$$

所以是恰当方程。他的通积分为

$$\int_{x_0}^x x f(x^2 + y^2) dx + \int_{y_0}^y y f(x_0^2 + y^2) dy = C$$

左边可以化简：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} F(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} F(x_0^2 + y^2) + \frac{1}{2} F(x_0^2 + y^2) - \frac{1}{2} F(x_0^2 + y_0^2) \\ &= \frac{1}{2} F(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} F(x_0^2 + y_0^2) \end{aligned}$$

其中 F 是 f 的其中一个原函数。所以方程的通解为

$$F(x^2 + y^2) = C.$$

第20页2(4), 5

1.2. 2(4). 求解微分方程的初值问题： $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln|x|}{1+y^2}$, $y(1) = 0$.

这是一个变量分离方程。由于 $1 + y^2 > 0$ ，所以原式等价于

$$(1 + y^2) dy - \ln|x| dx = 0$$

通积分为

$$\Phi(x, y) = y + \frac{1}{3}y^3 - (x \ln|x| - x) = C$$

代入 $y(1) = 0$ ，有 $C = 1$ ，故方程的解为

$$y + \frac{1}{3}y^3 - x \ln|x| + x - 1 = 0.$$

1.3. 5. 设微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(y),$$

其中 $f(y)$ 在 $y = a$ 的某邻域（例如，区间 $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ ）内连续，而且 $f(y) = 0$ 当且仅当 $y = a$ ，则在直线 $y = a$ 上的每一点，方程的解是局部唯一的，当且仅当瑕积分

$$\left| \int_a^{a \pm \varepsilon} \frac{dy}{f(y)} \right| = +\infty \quad (\text{发散}).$$

“ $\Rightarrow$ ”：因为 $y = a$ 显然是一个解，假设他的解是局部唯一的，所以他只有这一个解，因此瑕积分显然发散。

“ $\Leftarrow$ ”：假设他的解不是局部唯一的，也就是存在非平凡解从 $y(x_0) = a$ 出发，在 $x_1 > x_0$ 处 $y \neq$

a 。由连续性,不妨设 $f(y)$ 在 (x_0, x_1) 上大于 0, 则 $y(x)$ 严格递增。分离变量得

$$\int_a^{y(x)} \frac{du}{f(u)} = x - x_0$$

左边为 ∞ , 右边是有限数, 矛盾! 故不存在这样的 x_1 。也就是解在 x_0 附近恒为常数。

èġčġñŦ. (讲的答案)

第25页7

éŮōéćŸ 1.4. 7. 令集合 $H^0 = \{f(x) \mid f \text{ 是以 } 2\pi \text{ 为周期的连续函数}\}$, 易知 H^0 关于实数域构成一个线性空间。对于任意 $f \in H^0$, 定义它的模

$$\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|.$$

证明: H^0 是一个完备的空间 (即巴拿赫 (Banach, 1892—1945) 空间). 利用 (2.40) 式可以在空间 H^0 中定义一个变换 φ , 它把 f 变到 y . 试证: φ 是一个从 H^0 到 H^0 的线性算子, 而且它是有界的; 亦即要证:

(1) 对任何常数 C_1 和 C_2 , 以及任何 $f_1, f_2 \in H^0$, 有

$$\varphi(C_1 f_1 + C_2 f_2) = C_1 \varphi(f_1) + C_2 \varphi(f_2);$$

(2) 对任何 $f \in H^0$, 有

$$\|\varphi(f)\| \leq k \|f\|,$$

其中 $k > 0$ 是常数.

èġčġñŦ. 先证明 H^0 是完备的空间。

设 $\{f_n\}$ 是一列柯西列, 收敛到 f , 且每个 f_n 以 2π 为周期。于是由题, $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n, m > N$ 时, $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$, 即

$$\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

于是对每个 x , $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, 所以 $\{f_n(x)\}$ 是柯西列, 收敛到 $f(x)$.

又因为 N 是不依赖于 x 的, 所以是一致收敛, 所以 f 是连续的, 所以

$$f(x + 2\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x + 2\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

所以 $f(x) \in H^0$, 所以是完备的。

(1)

$$(\varphi f)(x) = C \int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)} f(s) ds. \quad \text{其中 } C = \frac{1}{e^{2a\pi} - 1}.$$

$$\begin{aligned}
\varphi(C_1 f_1 + C_2 f_2) &= C \int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)} (C_1 f_1 + C_2 f_2)(s) ds \\
&= CC_1 \int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)} f_1(s) ds + CC_2 \int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)} f_2(s) ds \\
&= C_1 \varphi(f_1) + C_2 \varphi(f_2)
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\|\varphi(f)\| &= \max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| C \int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)} f(s) ds \right| \\
&\leq \max_{0 \leq x \leq 2\pi} C \int_x^{x+2\pi} |e^{-a(x-s)}| |f(s)| ds \\
&\leq \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)| \cdot C \int_0^{2\pi} e^{as} ds \\
&= k \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|
\end{aligned}$$

其中 $k = C \int_0^{2\pi} e^{as} ds$ 是常数。

第30-31页 1(1), 2(1)

1.5. 求解下列微分方程:

$$(1) y' = \frac{2y-x}{2x-y}.$$

$$(2) y' = \cos(x-y).$$

1. (1) 做变量代换 $y = ux$, 于是 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 原方程可以化为

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{2u-1}{2-u} \iff \frac{2-u}{u^2-1} du = \frac{dx}{x}$$

两边积分, 有

$$\frac{1}{2} \ln|u-1| - \frac{3}{2} \ln|u+1| - \ln|x| = C$$

整理得

$$\ln \left| \frac{u-1}{x^2(u+1)^3} \right| = C'$$

代回 $u = \frac{y}{x}$, 有

$$\ln \left| \frac{y-x}{(y+x)^3} \right| = C''$$

于是方程的通解为

$$\frac{y-x}{(y+x)^3} = C$$

此外, 当 $y = x$ 和 $y = -x$ 时, 方程也成立。

(2) 令 $x - y = u$, 此时 $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{du}{dx}$, 于是原式化为

$$\frac{du}{dx} = 1 - \cos u = 2 \sin^2 \left(\frac{u}{2} \right) \iff \frac{du}{2 \sin^2 (u/2)} = dx \quad (u \neq 0)$$

两边积分, 左边积分为

$$\int \frac{1}{2 \sin^2 (u/2)} du = \int \frac{1}{\sin^2 t} dt = \cot \frac{u}{2}.$$

所以原方程的解为

$$\cot \frac{u}{2} = x + C \iff \cot \frac{x-y}{2} - x = C'$$

此外, 还有特解 $x - y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

第36页3

1.6. 3. 证明: 齐次方程 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 有积分因子 $\mu = \frac{1}{xP + yQ}$.

¶. 乘上积分因子 μ 之后, 方程变成

$$\frac{P}{xP + yQ} dx + \frac{Q}{xP + yQ} dy = 0$$

因为是其次, 设齐 m 次, 设 $y = ux$, 于是

$$P(x, y) = x^m P(1, u), \quad Q(x, y) = x^m Q(1, u)$$

原式化为

$$\frac{x^m P}{x^{m+1}P + ux^{m+1}Q} dx + \frac{x^m Q}{x^{m+1}P + ux^{m+1}Q} (u dx + x du) = 0$$

整理得

$$\frac{1}{x} dx + \frac{Q(1, u)}{P(1, u) + uQ(1, u)} du = 0$$

这个方程是变量分离方程, 是恰当的。于是确实有积分因子 $\mu = \frac{1}{xP + yQ}$.

第二章 第3周微分方程作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

Arzela-Ascoli定理的证明是找的书，对角线法如果有人跟我说我说不定能做，但要我自己想到这个题需要用对角线法我觉得我应该做不出来。

然后题目2.4验证解的唯一性，我是直接每一块求出来他的解，但我看书上是利用对于 y 的单调性，我不是很理解。

第42页1(2), 2(3)

2.1. 求下列曲线族的正交轨线族：(2) $xy = C$.

求导可得

$$x dy + y dx = 0 \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

所以正交轨线的微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \implies x dx = y dy$$

解微分方程，就可以得到正交轨线族为

$$x^2 - y^2 = C'.$$

2.2. 求与下列曲线族相交成 $\frac{\pi}{4}$ 角的曲线族：(3) $y = x \ln(Cx)$.

求导可得

$$dy = \ln(Cx) dx + x \cdot \frac{1}{Cx} \cdot C dx \implies \frac{dy}{dx} = \ln(Cx) + 1$$

联立 $y = x \ln(Cx)$ ，消去 C ，可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 1.$$

所以相交成 $\frac{\pi}{4}$ 角的曲线族的微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} + 1 + 1}{1 - \left(\frac{y}{x} + 1\right)} = -\frac{y + 2x}{y}.$$

令 $y = ux$, 于是 $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$, 所以原微分方程化为

$$x \frac{du}{dx} + u = -\frac{u+2}{u} \implies -\frac{dx}{x} = \frac{u du}{u^2 + u + 2}.$$

左边积分有 $\int -\frac{1}{x} dx = -\ln|x| + C_1$. 右边积分有

$$\begin{aligned} \int \frac{u}{u^2 + u + 2} du &= \int \frac{u + \frac{1}{2}}{(u + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(u + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} du \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right| - \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2u+1}{\sqrt{7}} + C_2 \end{aligned}$$

所以微分方程的解为

$$-\ln|x| = \frac{1}{2} \ln(u^2 + u + 2) - \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2u+1}{\sqrt{7}} + C'$$

代入 $u = \frac{y}{x}$, 有

$$\ln(y^2 + xy + 2x^2) - \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2y+x}{\sqrt{7}x} = C''.$$

第48页证明定理3.2

定理 2.3. 设 $f(x, y)$ 在区域 G 内对 y 满足奥斯古德条件, 则微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 在 G 内经过每一点的解都是唯一的。

其中Osgood条件是: 函数 $f(x, y)$ 在区域 G 内连续, 而且满足不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq F(|y_1 - y_2|),$$

其中 $F(r) > 0$ 是 $r > 0$ 的连续函数, 而且瑕积分 (以0为瑕点)

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} = +\infty \quad (r_1 > 0 \text{ 为常数})$$

证明. 假设存在两个解 $y_1(x), y_2(x)$, 代入不等式, 有

$$\left| \frac{dy_1}{dx} - \frac{dy_2}{dx} \right| \leq F(|y_1 - y_2|) \implies \left| \frac{d(y_1 - y_2)}{F(|y_1 - y_2|)} \right| = dx$$

令 $r = |y_1 - y_2|$, r_1 满足 $y(x_0) = r_1$, x_0 是区域 G 内的一个有限的点。那么两边积分, 有

$$\int_0^{y(x_0)} \frac{dr}{F(r)} = \int_0^{x_0} dx \implies \int_0^{r_1} \frac{dr}{F(r)} = x_0$$

与题目中的 ∞ 矛盾。因此只会存在唯一的解。

第49页验证例1, 并证明解的唯一性

§2.4. 设初值问题

$$(E_0): \frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad y(0) = 0,$$

其中函数

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x = 0, -\infty < y < +\infty, \\ 2x, & 0 < x \leq 1, -\infty < y < 0, \\ 2x - \frac{4y}{x}, & 0 < x \leq 1, 0 \leq y < x^2, \\ -2x, & 0 < x \leq 1, x^2 \leq y < +\infty. \end{cases}$$

验证: 函数 $F(x, y)$ 在条形区域

$$S: 0 \leq x \leq 1, \quad -\infty < y < \infty$$

内是连续的, 可是对 y 不满足利普希茨条件。

§2. 先验证连续。首先每一部分是连续的。其次

$$\lim_{y \rightarrow 0} 2x - \frac{4y}{x} = 2x, \quad \lim_{y \rightarrow x^2} 2x - \frac{4y}{x} = -2x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} F(x, y_0) = 0$$

所以函数是连续的。将 $F(x, y)$ 对 y 求导, 有

$$F_y(x, y) = \begin{cases} -\frac{4}{x}, & 0 < x \leq 1, 0 \leq y < x^2 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

可以发现导数在0附近是无界的, 进而不满足Lipschitz条件。

然后证明解的唯一性, 把每个区域上都求解, 发现只有一个解就应该可以验证唯一性。

$$F(x, y) = 0: \frac{dy}{dx} = 0 \implies y = 0.$$

$$F(x, y) = 2x: \frac{dy}{dx} = 2x \implies y = x^2.$$

$F(x, y) = 2x - \frac{4y}{x}: \frac{dy}{dx} = 2x - \frac{4y}{x}$, 同时乘上积分因子 x^4 , $\frac{d}{dx}(x^4 y) = 2x^5$, 积分并代入初值得 $y = \frac{1}{3}x^2$.

$$F(x, y) = -2x: \frac{dy}{dx} = -2x \implies y = -x^2.$$

每个区域均只有唯一解。

第49页1, 2

§2.5. 利用右端函数的性质讨论下列微分方程满足初值条件 $y(0) = 0$ 的解的唯一性问题:

$$(1) \frac{dy}{dx} = |y|^\alpha, \text{ 常数 } \alpha > 0;$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ y \ln |y|, & y \neq 0. \end{cases}$$

例2. (1) $g(y) = f(x, y) = |y|^\alpha$ 连续, 其次验证是否满足Lipschitz条件。

(a) 当 $\alpha > 1$ 时, $g'(y) = \alpha y^{\alpha-1}$, 在闭区间上导数有界, 所以满足Lipschitz条件, 即解唯一。

(b) 当 $0 < \alpha < 1$ 时, $g'(y) = \alpha y^{\alpha-1}$ 。在0附近导数无界, 即 $\frac{y^\alpha - 0}{y - 0} = y^{\alpha-1} \rightarrow \infty$, 不满足Lipschitz条件, 解不唯一。

(c) 当 $\alpha = 1$ 时, $||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$, 满足。

故当 $\alpha \geq 1$ 时, 解唯一; 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 解不唯一。

$$(2) \text{ 因为 } \lim_{y \rightarrow 0} y \ln |y| = 0, \text{ 所以函数连续。令 } h(y) = \begin{cases} \infty & y = 0 \\ \ln |y| + 1 & y \neq 0 \end{cases}.$$

所以不满足Lipschitz条件。

直接求解 $\frac{dy}{y \ln |y|} = dx$, 两边积分, 左边积分有

$$\int \frac{1}{y \ln |y|} dy = \int \frac{1}{\ln |y|} d \ln |y| = \ln (|\ln |y||) + C$$

于是, 方程的解为

$$y = e^{e^{x+C}}.$$

代入初值条件 $y(0) = 0$, 没有符合条件的 C , 所以方程只有一个特解 $y = 0$ 。所以右边的函数虽然不满足Lipschitz条件, 但也是只有唯一解。

例2.6. 试求初值问题:

$$\frac{dy}{dx} = x + y + 1, \quad y(0) = 0$$

的皮卡序列, 并由此取极限求解。

解. $y_0 = y(0) = 0$,

$$y_1 = y_0 + \int_0^x f(s, y_0(s)) ds = \int_0^x (s + 0 + 1) ds = \frac{1}{2}x^2 + x.$$

$$y_2 = y_0 + \int_0^x f(s, y_1(s)) ds = \int_0^x \left(2s + \frac{1}{2}s^2 + 1 \right) ds = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

$$y_3 = y_0 + \int_0^x f(s, y_2(s)) ds = \int_0^x \left(2s + s^2 + \frac{1}{6}s^3 + 1 \right) ds = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

下面用数学归纳法, 设 $y_k = x + 2\left(\frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k\right) + \frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}$, 那么

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_0 + \int_0^x f(s, y_k(s)) ds = \int_0^x \left[1 + s + s + 2 \sum_{n=2}^k \frac{1}{n!} s^n + \frac{1}{(k+1)!} s^{k+1} \right] ds \\ &= x + x^2 + 2 \sum_{n=2}^k \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} + \frac{1}{(k+2)!} x^{k+2} \\ &= x + 2 \left(\frac{1}{2} x^2 + \cdots + \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} \right) + \frac{1}{(k+2)!} x^{k+2} \end{aligned}$$

所以由数学归纳法可知, 他的皮卡序列是

$$y_k = x + 2 \left(\frac{1}{2} x^2 + \cdots + \frac{1}{k!} x^k \right) + \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}.$$

令 $k \rightarrow \infty$,

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} = e^x - 1 + e^x - 1 - x = 2e^x - x - 2.$$

利用皮卡迭代/压缩映射, 证明隐函数定理

定理 2.7. 证明隐函数定理:

设 $F(x, y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 中某开集上的 C^1 函数, 且满足

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

则存在 x_0 的邻域 U 和 y_0 的邻域 V , 以及唯一的 C^1 函数 $f: U \rightarrow V$, 使得

$$f(x_0) = y_0, \quad F(x, f(x)) \equiv 0, \quad \forall x \in U.$$

并且隐函数的导数为

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

证明. 我要寻找唯一的 f , 使得 $F(x, f(x)) = 0$ 。设 $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, 定义映射 $T: [y_0 - b, y_0 + b] \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b]$, 满足

$$T(f(x)) = f(x) - kF(x, f(x)) \quad (\text{或 } T(y) = y - kF(x, y))$$

其中 $k = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$, 这个的选择主要是取决于 T 的压缩性。然后这样也就是转化为寻找 f , 使得 $Tf = f$ 。

第一步证明 T 的压缩性。对 y 求导，有

$$\frac{dT}{dy} = 1 - \left[\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) \right]^2 \leq \Delta < 1.$$

所以任意的 $y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b]$ ，由微分中值定理

$$|T(y_1) - T(y_2)| = T'(\xi) |y_1 - y_2| \leq \Delta |y_1 - y_2|$$

由此， T 是一个压缩映射。

第二步证明 T 的值域仍然是 $[y_0 - b, y_0 + b]$ 。

由于 F 是连续的，且 $F(x_0, y_0) = 0$ ，所以存在 x_0 的 δ 邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ，使得 $F(x, y_0) \leq \frac{(1-\Delta)b}{k}$

对于任意的 $y \in [y_0 - b, y_0 + b]$ ，

$$\begin{aligned} |T(y) - y_0| &\leq |T(y) - T(y_0)| + |T(y_0) - y_0| \\ &\leq \Delta |y - y_0| + kF(x, y_0) \\ &\leq \Delta b + (1 - \Delta)b \\ &= b \end{aligned}$$

所以，当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时， T 会映到自身。

第三步，由压缩映射的性质可知，存在且唯一存在 $y^* = f(x)$ ，满足 $Ty^* = y^*$ ，即 $F(x, y^*) = 0$ 。此时， $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ， $V = (y_0 - b, y_0 + b)$ 。

第四步证明 y^* 是连续的。设 $x, x' \in U$ ，

$$|f(x) - f(x')| = |y^* + kF(x, y^*) - y^* - kF(x', y^*)| = k|F(x, y^*) - F(x', y^*)|$$

由 $F(x, y)$ 的连续性可知，当 $x' \rightarrow x$ 时，右边是0，所以左边是0，所以 $f(x)$ 是连续的。

第五步证明 $f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$ 且 y^* 是 C^1 的。

对 $F(x, f(x)) = 0$ 两边对 x 求导，可以得到

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, f(x)) + \frac{\partial}{\partial y} F(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0 \implies f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

由于 F 是 C^1 的且 $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ ，所以 $f'(x)$ 就是两个连续函数的比值也是连续的，所以 $f(x) \in C^1$ 。

αsl. 用压缩映射，需要先构造，构造首先是确定里面有 y 和 $F(x, y)$ ，至于二者之间的比例需要由压缩性来寻找。

证明Arzela-Ascoli定理

2.8. 证明Arzela-Ascoli定理:

设函数序列 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ 在有限闭区间 I 上是一致有界和等度连续的, 则可以选取它的一个子序列

$$f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \dots, f_{n_k}(x), \dots,$$

使该子序列在区间 I 上是一致收敛的。

等度连续: 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - y| < \delta$ 时, 对所有的 n , 有 $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ 成立。

证明. 首先, 设 $w_1, w_2, \dots \in I$, 由于 I 是紧的, 取定 r , 使得 $I \subset \bigcup_k B(w_k, r)$ 。那么我就可以选取有限个开球覆盖 I , 不妨设选择了 $w_1, \dots, w_n$ 。

固定 x_1 , 可知数列 $f_1(x_1), f_2(x_1), \dots, f_n(x_1), \dots$ 收敛, 那么由魏尔斯特拉斯定理, 就存在一个收敛子列, 记该子列为 $\{f_{1k}\}$ 。

固定 x_2 , 可知数列 $f_{11}(x_2), f_{12}(x_2), \dots, f_{1n}(x_2), \dots$ 收敛, 于是他也存在一个收敛子列, 记该子列为 $\{f_{2k}\}$ 。

同理, 固定 $x_3, x_4, \dots$, 就可以得到一系列的收敛子列:

$$\begin{aligned} & f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n}, \dots \quad (x_1 \text{ 收敛}) \\ & f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2n}, \dots \quad (x_1, x_2 \text{ 收敛}) \\ & f_{31}, f_{32}, \dots, f_{3n}, \dots \quad (x_1, x_2, x_3 \text{ 收敛}) \\ & \vdots \end{aligned}$$

取 $\{f_{kk}, k = 1, 2, \dots\}$ 作为 $\{f_{n_k}\}$, 这个序列是一致收敛的。因为对任意的 $\varepsilon > 0$, $x \in I$, 并取一个 w , 使得 $x \in B(w, r)$, 存在 N , 当 $n_k, n_s > N$ 时,

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x) - f_{n_s}(x)| &= |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(w) + f_{n_k}(w) - f_{n_s}(w) + f_{n_s}(w) - f_{n_s}(x)| \\ &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(w)| + |f_{n_k}(w) - f_{n_s}(w)| + |f_{n_s}(w) - f_{n_s}(x)| \end{aligned}$$

由等度连续性, 第一项和第三项是 ε , 由点收敛, 第二项也是 ε , 所以合起来就是 3ε 。于是, $\{f_{n_k}\}$ 一致收敛。

第三章 第4周微分方程作业

题目3.3,3.4这样的题我都是仿照着题目的3.1写的步骤，就是每一部分挨着分析，证明小于某一个函数不会爆破因此可以延伸到无穷，正确证明过程不会写。

然后拉直是抄的AI.

pg 60 例2

3.1. 在平面上任取一点 $P_0(x_0, y_0)$ ，试证初值问题

$$(E): \frac{dy}{dx} = (x - y)e^{xy^2}, \quad y(x_0) = y_0$$

的右行解（即从 P_0 点出发向右延伸的解）都在区间 $[x_0, +\infty)$ 上存在。

3.1. 由于 $(x - y)e^{xy^2}$ 是光滑的，所以从 (x_0, y_0) 出发解存在唯一。考察 $L: y = x$ 这条直线，在这条直线上 $y' = 0$ ，直线上方 $y' < 0$ ，下方 $y' > 0$ 。所以：

若 x_0 在直线左边，则函数单调递减，必然与 L 相交。

再研究 $x_0 \geq y_0$ ，当函数靠近 $y = x$ 时，设 $x - y = \delta$ ，那么

$$\frac{dy}{dx} = \delta e^{(y+\delta)y^2} \leq \delta e^{2y^3}$$

于是在任意有限区间 $[x_0, M]$ ，都可以选取 δ ，使得 $\frac{dy}{dx} < 1$ ，这样也就不会穿过 $y = x$ ，于是就不会爆破。

pg63 2 (1) (3) 4, 5 (假设 f 光滑)

3.2. 2. 讨论下列微分方程解的存在区间：

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + y^2};$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = y \sin(xy);$$

3.2. (1) $\frac{1}{x^2 + y^2}$ 在 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上光滑，且大于0，所以初值不为 $(0, 0)$ 时，设初值 (x_0, y_0) , $x_0 > 0$ ，看 $x \rightarrow \pm\infty$ 时的行为，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + y^2} < 1 \implies y < x$$

因此可以延伸到 $+\infty$ 。向左延伸时，先快速变小，当 $x < -1$ 时，下降的速度减缓， x 很小时解一定在 $y = x$ 的上方，所以也是可以延伸到 $-\infty$ 的。

因此当初值不为 $(0, 0)$ 时, 解的存在区间是 $(-\infty, +\infty)$.

(3) 由于 $y \sin(xy)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上光滑, 所以对任意初值 (x_0, y_0) 解存在唯一。由于

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = |y \sin(xy)| \leq |y|$$

所以可得 $|y(x)| \leq |y_0 e^{|x-x_0|}|$, 于是 y 会在任意有限区间内保持有界, 不会在有限时间内爆破, 因此解的最大存在区间是 $(-\infty, +\infty)$.

例 3.3. *4. 设初值问题

$$(E): \frac{dy}{dx} = (y^2 - 2y - 3)e^{(x+y)^2}, \quad y(x_0) = y_0$$

的解的最大存在区间为 (a, b) , 其中 (x_0, y_0) 是平面上的任一点. 则 $a = -\infty$ 和 $b = +\infty$ 中至少有一个成立.

解. 由于函数 $f(x, y) = (y - 3)(y + 1)e^{(x+y)^2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 且

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2y - 2)e^{(x+y)^2} + (y^2 - 2y - 3)(2x + 2y)e^{(x+y)^2}$$

局部有界、连续, 所以 f 关于 y 局部 Lipschitz 连续, 因此对初值 (x_0, y_0) 有唯一的局部解。

考虑 $y = -1$ 和 $y = 3$ 这两条直线。由解的唯一性, 任何其他解不能穿过这两条直线, 只能渐近趋近。

- 若 $y_0 = -1$ 或 $y_0 = 3$, 那么解就是这两条直线, 存在区间为 $(-\infty, +\infty)$.
- 若 $y_0 \in (-1, 3)$, 则解 y 满足 $y' < 0$, 故 y 单调递减, 对一切 x , $y \in (-1, 3)$, 即解有界。此时存在区间为 $(-\infty, +\infty)$.
- 若 $y_0 < -1$, 则 $y' > 0$, 故 y 单调递增, 考虑右行解, 当 $x > x_0$ 时, $y \in (y_0, -1)$, 所以可以向右无限延伸, 此时 $b = +\infty$.
- 若 $y_0 > 3$, 则 $y' > 0$, 故 y 单调递增, 考虑左行解, 当 $x < x_0$ 时, $y \in (3, y_0)$, 所以可以向左无限延伸, 此时 $a = -\infty$.

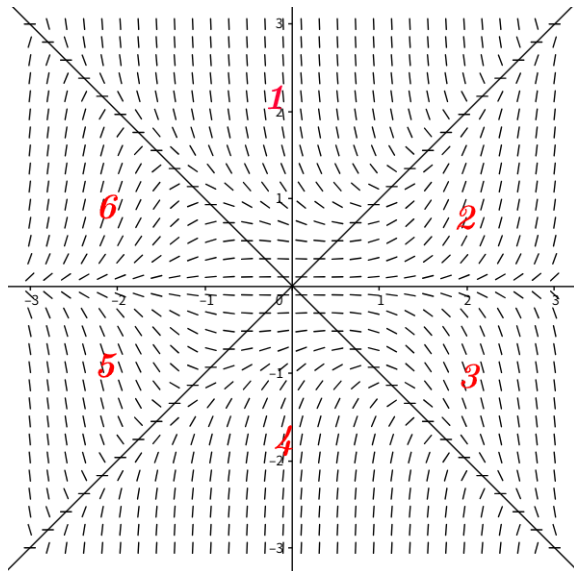
综上, $a = -\infty$ 和 $b = +\infty$ 中至少有一个成立.

例 3.4. *5. 设初值问题

$$(E): \frac{dy}{dx} = (x^2 - y^2)f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

其中函数 $f(x, y)$ 在全平面连续、光滑且满足当 $y \neq 0$ 时, $yf(x, y) > 0$, 则对于任意的 (x_0, y_0) , 当 $x_0 < 0$ 和 $|y_0|$ 适当小时, 初值问题 (E) 的解可延伸到 $(-\infty, +\infty)$.

§3.1. 首先方程右侧函数 $F(x, y) = (x^2 - y^2)f(x, y)$ 连续, 且 $\frac{\partial F}{\partial y}$ 连续, 故解唯一。由于 $y > 0$ 时 $f(x, y) > 0$, $y < 0$ 时 $f(x, y) < 0$, 所以由连续性, 可得 $f(x, 0) = 0$ 。所以 $y = 0$ 也是原方程的一个解。考虑三条直线 $y = x$ 和 $y = -x$ 和 x 轴, 将平面分成了六个区域。由于 $x_0 < 0$, $|y_0|$ 适当小。不妨只研究 $y > 0$ 的区域。 $y < 0$ 的区域做代换 $u = -y$ 即可



- 在区域1中, $x^2 - y^2 < 0$, 又因为 $yf(x, y) > 0$, 所以 $f(x, y) > 0$, 所以 $y' = (x^2 - y^2)f(x, y) < 0$, 也就是说, 在区域1内部, 解是严格递减的。
- 在区域2中, $x^2 - y^2 > 0$, 又因为 $yf(x, y) > 0$, 所以 $f(x, y) > 0$, 所以 $y' = (x^2 - y^2)f(x, y) > 0$, 也就是说, 在区域2内部, 解是严格递增的。
- 在区域6中, $x^2 - y^2 > 0$, 又因为 $yf(x, y) > 0$, 所以 $f(x, y) > 0$, 所以 $y' = (x^2 - y^2)f(x, y) > 0$, 也就是说, 在区域6内部, 解是严格递增的。
- 在两个边界处, $y' = 0$, 从下方靠近时, $y' > 0$, 从上方靠近时, $y' < 0$ 。

所以说, $x_0 < 0$, $y_0 < \varepsilon$ 时 (ε 是一个和 $f(x)$ 有关的量),

向右延伸时, 由于单调递增, 所以总会和 $y = -x$ 有一个交点, 从区域6进入区域1, 然后单调递减。此后, 解可能再次与直线相交, 形成振荡。但无论振荡与否, 解始终被限制在某个有界范围内, 因为当 y 很大时, y' 为很大的负数, 迫使 y 快速减小。反之当 y 很小时, y' 为正, 又会使 y 增大。直至再次穿过 $y = x$ 进入区域2。然后 y 单调递增, 同样地, 要么他被限制在 $y = x$ 的下方, 要么围绕 $y = x$ 振荡。所以右行存在区间为 $[x_0, +\infty)$ 。

向左延拓时, y 随 x 的减小而减小。因为 $y = 0$ 是一个解, 所以不能穿过它。因此在 $x < x_0$ 时, $0 < y < y_0$, 也是有界的, 所以可以延伸到 $-\infty$ 。

具体来看 y_0 要多小。当 y 很大时, $\frac{dy}{dx} = (x^2 - y^2)f(x, y) \approx -y^2f(x, y)$, 当 $y > 0$ 时, $\frac{dy}{dx} < 0$, 会飞快的衰减。当 $y < 0$, $\frac{dy}{dx} > 0$, 会飞快的上升。所以 y 的大小不是引起爆破的因素, 那就只有可能是 $f(x, y)$ 的大小引起爆破。由于我们研究的是 $y > 0$ 的情况, 所以 $f(x, y) > 0$ 。于是爆破只

可能发生在 $x^2 - y^2 > 0$ 的情形, 同样, 那既然 $x^2 - y^2 > 0$ 了, 就肯定在 $y = x$ 的下方, 没有爆破。所以 y_0 只要小于 $|x_0|$ 应该就可以了。

pg 74 例3

3.5. 求解微分方程

$$y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1.$$

原式等价于 $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-y^2}$, 令 $y = \cos t$, 于是

$$\frac{dy}{dx} = -\sin t \cdot \frac{dt}{dx}$$

代入原式, 有

$$-\sin t \cdot \frac{dt}{dx} = \pm \sin t \implies \frac{dt}{dx} = \pm 1$$

得到通解为 $y = \cos(C - x)$ 。当 $\sin t = 0$ 时, 也就是说 $y = \pm 1$ 也是微分方程的两个特解。

pg77 定理4.1

3.6. 设函数 $F(x, y, p)$ 对 $(x, y, p) \in G$ 是连续的, 而且对 y 和 p 有连续的偏微商 F'_y 和 F'_p . 若函数 $y = \varphi(x)$ ($x \in J$) 是微分方程 $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ 的一个奇解, 并且

$$(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in G \quad (x \in J),$$

则奇解 $y = \varphi(x)$ 满足一个称之为 p -判别式的联立方程组

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0 \end{cases} \quad \left(p = \frac{dy}{dx}\right). \quad (4.23)$$

(设从方程组式中消去 p 得到方程

$$\Delta(x, y) = 0,$$

则称由此方程所决定的曲线为方程的 p -判别曲线. 因此, 微分方程 $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ 的奇解是一条 p -判别曲线.)

奇解的定义: 设一阶微分方程 $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ 有特解 $\Gamma: y = \varphi(x)$, 如果对每一点 $Q \in \Gamma$, 在 Q 点的任何邻域内方程有一个不同于 Γ 的解在 Q 点与 Γ 相切, 则称 Γ 是微分方程的奇解。

由于 $y = \varphi(x)$ 是一个解, 所以必然满足 $F(x, y, p) = 0$, 所以只需要证明 $\frac{\partial}{\partial p} F(x, \varphi(x), p) = 0$.

假设不等于0, 那么就存在 $x_0 \in J$, 使得 $F'_p(x_0, \varphi(x_0), p_0) \neq 0$, 由于 $F(x_0, \varphi(x_0), p_0) = 0$, 所以可以有隐函数定理得, $(x_0, y_0) \in G$ 附近, 方程 $F(x, y, p) = 0$ 唯一确定了 $p = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$,

且 f 连续, 对 y 有连续偏导

$$f'_y = -\frac{F'_y(x, y, f(x, y))}{F'_p(x, y, f(x, y))}.$$

于是, 由皮卡定理, 该初值问题存在唯一解。但是 $\varphi(x)$ 是奇解, 不应该在这个区间内有唯一解, 因此矛盾, 假设不成立, 所以

$$\frac{\partial}{\partial p} F(x, \varphi(x), p) = 0, \quad \forall x \in J$$

因此奇解 $y = \varphi(x)$ 满足方程组。

定义 3.7. 方向场的拉直 (rectification) 是一个微分同胚, 它将该方向场映射为平行方向场。如果存在这样的拉直映射, 则称该方向场是可拉直的。

定理 1: 每个光滑方向场在其每一点的邻域内都是可拉直的。若该方向场是 r 次连续可微的 (属于 C^r 类, 其中 $1 \leq r \leq \infty$), 则对应的拉直微分同胚也可以取为 C^r 类。

证明定理1中的 C^1 情形(即今天上课说的)

证明. 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 C^1 向量场, 且 $X(p) \neq 0$, 则可以做线性变换使得 $X(p) = (1, 0, \dots, 0)$, 所以不妨直接设 $X(p) = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ 。

考虑 $S = \{x \in U : x_1 = 0\}$, 因为 $X(p) = e_1$, 所以存在一个小邻域 $V \subset U$ 和 $\varepsilon > 0$, 使得对所有 $y \in S \cap V$, 常微分方程初值问题

$$\frac{d}{dt} \gamma_y(t) = X(\gamma_y(t)), \quad \gamma_y(0) = y$$

的解 $\gamma_y(t)$ 对 $|t| < \varepsilon$ 存在且唯一。

定义映射

$$\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (S \cap V) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi(t, y) = \gamma_y(t).$$

这里 t 是时间, y 是 S 上的初始点。因为 X 是 C^1 , 常微分方程的解对初值具有 C^1 依赖性。即作为 (t, y) 的函数, $\gamma_y(t)$ 是 C^1 的, 所以 ψ 是 C^1 的。计算 ψ 在 $(0, p)$ 处的雅可比矩阵:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(0, p) = X(p) = e_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(0, p) = \frac{\partial}{\partial y_i}(0, y_2, \dots, y_n) = e_i$$

$$J\psi(0, p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial \psi}{\partial y_n} \end{pmatrix} = I_n$$

由于 ψ 是 C^1 的, $J\psi(0, p)$ 可逆, 存在 $(0, p)$ 的一个开邻域 $W \subset (-\varepsilon, \varepsilon) \times (S \cap V)$, 使得 $\psi|_W$ 是 C^1 微分同胚到他的像。记

$$\phi = (\psi|_W)^{-1} : \psi(W) \rightarrow W$$

则 ϕ 是 C^1 映射, 就是我们想要的坐标变换。

第四章 第5周微分方程作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

由于做的时候刚学，所以每一个我都是先求约当标准型，然后算 $e^{P\Lambda P^{-1}} = Pe^{\Lambda}P^{-1}$ ，所以麻烦得很。

140页，1(3)(4), 2(1)(2)(3), 3(1), 4, 5

4.1. 1. 求出常系数齐次线性微分方程组 $\frac{dy}{dx} = Ay$ 的通解，其中的矩阵 A 分别为：

$$(3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}; (4) \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix};$$

两边同乘 e^{-xA} ，有

$$e^{-xA} \frac{dy}{dx} = e^{-xA} Ay \implies \frac{d}{dx} (e^{-xA} y) = 0$$

所以解得 $e^{-xA} y = C$. 即 $y = e^{xA} \cdot C$.

(3) 由于

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix} = P\Lambda P^{-1}$$

所以

$$e^{xA} = Pe^{x\Lambda}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4x} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-x} & 0 \\ \frac{1}{3}(e^{-x} - e^{-4x}) & \frac{1}{9}((3x-1)e^{-x} + e^{-4x}) & e^{-4x} \end{pmatrix}$$

于是通解为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-x} & 0 \\ \frac{1}{3}(e^{-x} - e^{-4x}) & \frac{3x-1}{9}e^{-x} + \frac{1}{9}e^{-4x} & e^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \\ &= C'_1 \begin{pmatrix} 3e^{-x} \\ 0 \\ e^{-x} - e^{-4x} \end{pmatrix} + C'_2 \begin{pmatrix} 9xe^{-x} \\ 9e^{-x} \\ (3x-1)e^{-x} + e^{-4x} \end{pmatrix} + C'_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-4x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(4) 由于

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & & \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = P\Lambda P^{-1}$$

所以

$$e^{xA} = P e^{x\Lambda} P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^x & xe^x & \\ & e^x & \\ & & e^x \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e^x & \frac{2x}{3}e^x & -\frac{2x}{3}e^x \\ 0 & (1 - \frac{x}{3})e^x & \frac{x}{3}e^x \\ 0 & -\frac{x}{3}e^x & (1 + \frac{x}{3})e^x \end{pmatrix}$$

于是通解为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^x & \frac{2x}{3}e^x & -\frac{2x}{3}e^x \\ 0 & (1 - \frac{x}{3})e^x & \frac{x}{3}e^x \\ 0 & -\frac{x}{3}e^x & (1 + \frac{x}{3})e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \\ &= C'_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \end{pmatrix} + C'_2 e^x \begin{pmatrix} 2x \\ 3-x \\ -x \end{pmatrix} + C'_3 e^x \begin{pmatrix} -2x \\ x \\ 3+x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

习题 4.2. 2. 求出常系数非齐次线性微分方程组 $\frac{dy}{dx} = Ay + f(x)$ 的通解, 其中:

- (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -n^2 \\ -n^2 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = \begin{pmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix}$;
- (3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^x \end{pmatrix}$;

§5.1 (1) $y = e^{xA}c + \int_{x_0}^x e^{(x-s)A}f(s)ds$, 其中

$$e^{xA}c = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} xe^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$\int_0^x \begin{pmatrix} e^{2(x-s)} & (x-s)e^{2(x-s)} \\ 0 & e^{2(x-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \int_0^x \begin{pmatrix} e^{2(x-s)} \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{e^{2x}-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$y = c_1' \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} xe^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -n^2 \\ -n^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^2 & \\ & -n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P\Lambda P^{-1}$$

$$e^{xA}c = Pe^{x\Lambda}P^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{n^2x} & \\ & e^{-n^2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{n^2x} + e^{-n^2x} & -e^{n^2x} + e^{-n^2x} \\ -e^{n^2x} + e^{-n^2x} & e^{n^2x} + e^{-n^2x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x e^{(x-s)A}f(s)ds &= \frac{1}{2} \int_0^x \begin{pmatrix} \cosh(n^2(x-s)) & -\sinh(n^2(x-s)) \\ -\sinh(n^2(x-s)) & \cosh(n^2(x-s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos ns \\ \sin ns \end{pmatrix} ds \\ &= \frac{1}{n(n^2+1)} \begin{pmatrix} (n+1)\sin nx \\ (n-1)\cos nx \end{pmatrix} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} y &= \begin{pmatrix} \cosh(n^2x) & -\sinh(n^2x) \\ -\sinh(n^2x) & \cosh(n^2x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n(n^2+1)} \sin nx \\ \frac{n-1}{n(n^2+1)} \cos nx \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n(n^2+1)} \sin nx + C_1 \cosh(n^2x) - C_2 \sinh(n^2x) \\ \frac{n-1}{n(n^2+1)} \cos nx - C_1 \sinh(n^2x) + C_2 \cosh(n^2x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P\Lambda P^{-1}$$

$$e^{xA} = Pe^{x\Lambda}P^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} x+1 & -x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$$

$$\int_0^x e^{(x-s)A}f(s)ds = \int_0^x e^x \begin{pmatrix} x-s+1 & -x+s \\ x-s & 1-x+s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} ds = e^x \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2x-x^2 \end{pmatrix}$$

所以

$$y = e^x \begin{pmatrix} x+1 & -x \\ x & 1-x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + e^x \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2x-x^2 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} C_1(x+1) - C_2x - x^2 \\ C_1x + C_2(1-x) + 2x - x^2 \end{pmatrix}$$

例 1. (1) 的高级做法是: A 本身就是约当标准型为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 特征值 2 的特征向量 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 广义特征向量为 $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以 $e^{2t}\eta_1, e^{2t}(\eta_2 + t\eta_1)$ 组成齐次方程的通解。

然后求特解, 尝试一下常数特解, 发现可以成立。 $\frac{dy}{dx} = Ay + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 于是 $A\eta = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 所以 $\eta = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

综上, 方程的通解为 $y = C_1 e^{2t}\eta_1 + C_2 e^{2t}(\eta_2 + t\eta_1) + \eta$ 。

(2) 的高级做法是: 约当标准型为 $\begin{pmatrix} n^2 & \\ & -n^2 \end{pmatrix}$, 特征值为 n^2 的特征向量 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 特征值为 $-n^2$ 的特征向量为 $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以齐次方程的通解是 $y = C_1 e^{n^2 x}\eta_1 + C_2 e^{-n^2 x}\eta_2$ 。

然后求特解, 猜测 $\begin{pmatrix} A_1 \cos nx + B_1 \sin nx \\ A_2 \cos nx + B_2 \sin nx \end{pmatrix}$ 是一个特解。代入计算可得

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} A_1 \cos nx + B_1 \sin nx \\ A_2 \cos nx + B_2 \sin nx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n^2 \\ -n^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \cos nx + B_1 \sin nx \\ A_2 \cos nx + B_2 \sin nx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -nA_1 \sin nx + nB_1 \cos nx \\ -nA_2 \sin nx + nB_2 \cos nx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - n^2 A_2) \cos nx - n^2 B_2 \sin nx \\ -n^2 A_1 \cos nx + (1 - n^2 B_1) \sin nx \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -nA_1 = -n^2 B_2 \\ nB_1 = 1 - n^2 A_2 \\ -nA_2 = 1 - n^2 B_1 \\ nB_2 = -n^2 A_1 \end{cases}$$

解得

$$A_1 = B_2 = 0, A_2 = \frac{n-1}{n(n^2+1)}, B_1 = \frac{n+1}{n(n^2+1)}$$

所以就找到了特解。所以原方程的通解为

$$y = C_1 e^{n^2 x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-n^2 x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n(n^2+1)} \sin nx \\ \frac{n-1}{n(n^2+1)} \cos nx \end{pmatrix}$$

(3) 的高级做法是: 前半部分一样, 直接看特解怎么求。

$$\text{设 } e^x \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

4.3. 3. 求出微分方程组 $\frac{dy}{dx} = Ay + f(x)$ 满足初值条件 $y(0) = \eta$ 的解, 其中:

$$(1) A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

4. 4. 求解微分方程组 $y = e^{xA}\eta + \int_{x_0}^x e^{(x-s)A}f(s)ds$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = P\Lambda P^{-1}$$

$$e^{xA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-4x} & xe^{-4x} \\ 0 & e^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = e^{-4x} \begin{pmatrix} 1-x & -x \\ x & x+1 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^x e^{(x-s)A}f(s)ds = \int_0^x e^{-4(x-s)} \begin{pmatrix} 1-x+s & -x+s \\ x-s & x-s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s \\ e^{2s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{4}{25}e^x - \frac{1}{36}e^{2x} + e^{-4x} \left(\frac{11}{30}x - \frac{119}{900} \right) \\ \frac{1}{25}e^x + \frac{7}{36}e^{2x} - e^{-4x} \left(\frac{11}{30}x + \frac{211}{900} \right) \end{pmatrix}$$

$$y = e^{-4x} \begin{pmatrix} 1-x & -x \\ x & x+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{25}e^x - \frac{1}{36}e^{2x} + e^{-4x} \left(\frac{11}{30}x - \frac{119}{900} \right) \\ \frac{1}{25}e^x + \frac{7}{36}e^{2x} - e^{-4x} \left(\frac{11}{30}x + \frac{211}{900} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{25}e^x - \frac{1}{36}e^{2x} + e^{-4x} \left(-\frac{19}{30}x + \frac{781}{900} \right) \\ \frac{1}{25}e^x + \frac{7}{36}e^{2x} - e^{-4x} \left(-\frac{19}{30}x + \frac{211}{900} \right) \end{pmatrix}$$

高级做法: 约当标准型为 $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, 特征向量是 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 广义特征向量 $\eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, 所以齐次方程的通解为

$$y = C_1\eta_1 e^{-4x} + C_2(\eta_2 + x\eta_1)e^{-4x}$$

然后可知最小多项式是 $(\lambda+4)^2$, 设 $\lambda^n = m(\lambda)P_n(\lambda) + a_n(\lambda+4) + b_n$, 令 $\lambda = -4$, 得到 $b_n = (-4)^n$, 求导之后令 $\lambda = -4$, 得到 $a_n = n(-4)^{n-1}$. 于是

$$e^{Ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} ((-4x)^n I + nx(-4x)^{n-1}(A+4I)) = e^{-4x} \begin{pmatrix} 1-x & -x \\ x & x+1 \end{pmatrix}$$

4.4. 4. 求解微分方程组

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

其中 a 和 b 为实常数, 而且 $b \neq 0$ 。

§4.5. 设 $I = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $J^2 = -I$, $IJ = JI$. 设题中矩阵为 A , 于是 $A = aI + bJ$, 所以 $e^{xA} = e^{x(aI+bJ)} = e^{xaI+xbJ}$, 因为 $e^{xJ} = I \cos x + J \sin x$, 所以

$$e^{xaI+xbJ} = \begin{pmatrix} e^{xa} & \\ & e^{xa} \end{pmatrix} (I \cos xb + J \sin xb) = \begin{pmatrix} e^{xa} \cos xb & -e^{xa} \sin xb \\ e^{xa} \sin xb & e^{xa} \cos xb \end{pmatrix}$$

所以

$$y = \begin{pmatrix} e^{xa} \cos xb & -e^{xa} \sin xb \\ -e^{xa} \sin xb & e^{xa} \cos xb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{xa} \begin{pmatrix} \cos xb \\ -\sin xb \end{pmatrix} + C_2 e^{xa} \begin{pmatrix} -\sin xb \\ \cos xb \end{pmatrix}$$

§4.5. 5. 证明: 常系数齐次线性微分方程组 $\frac{dy}{dx} = Ay$ 的任何解当 $x \rightarrow +\infty$ 时都趋于零, 当且仅当它的系数矩阵 A 的所有特征根都具有负的实部.

§4.5. 设 $A = P\Lambda P^{-1}$, 所以方程的解为

$$y = e^{xA} \cdot C = P e^{x\Lambda} P^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} P J_{n_1} P^{-1} C_1 \\ e^{\lambda_2 x} P J_{n_2} P^{-1} C_2 \\ \vdots \\ e^{\lambda_m x} P J_{n_m} P^{-1} C_m \end{pmatrix}, \quad J_{n_i} = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & x & \cdots & \frac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & x \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

设 $\lambda_i = a + bi$, 那么解的每一个分量就是

$$y_{ij} = C_{ij}^j e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) R(x)$$

其中 C_{ij}^j 是一个系数, $R(x)$ 是关于 x 的一个多项式. 所以, 任何解当 $x \rightarrow \infty$ 时都趋向于 0 等价于 $a < 0$ 也就是特征根有负的实部.

证明有限维线性空间上的范数是等价的 (请自己将这个叙述用数学语言写准确)

§4.6. 设 X 是有限维线性空间, 则 X 上的任意两个范数 $\|\cdot\|_a$ 和 $\|\cdot\|_b$ 是等价的, 即存在正常数 $c_1, c_2 > 0$, 使得对任意 $x \in X$, 有

$$c_1 \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c_2 \|x\|_a.$$

§4.6. 考虑范数 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x^i|$, 其中 $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$. $\|\cdot\|$ 是任意一个 X 上的范数, 先证明 $C_1 \|x\| \leq \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|$.

因为

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x^i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x^i e_i\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \sum_{i=1}^n |x^i| = \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \|x\|_1$$

所以取 $C_1 = 1 / \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|$, 就得到 $C_1 \|x\| \leq \|x\|_1$.

右半边使用归纳法。假设 $n-1$ 维向量空间满足 $\|x\|_1 \leq C_2 \|x\|$ ，那么 n 维时，因为

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x^i e_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=1, i \neq j}^n x^i e_i \right\| - \|x^j e_j\|$$

当 j 取遍1到 n 时，两边求和，有

$$\begin{aligned} n \|x\| &\geq \sum_{j=1}^n \left\| \sum_{i=1, i \neq j}^n x^i e_i \right\| - \sum_{j=1}^n \|x^j e_j\| \geq [(n-1)(\min C_2) - 1] \sum_{i=1}^n \|x^i e_i\| \\ &\geq [(n-1)(\min C_2) - 1] \left(\min_{1 \leq i \leq n} \|e_i\| \right) \|x\|_1 \end{aligned}$$

取每一个 C_2 都很大，使得 $[(n-1)(\min C_2) - 1] (\min_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|) > 0$ ，这样，取 $n = C_1 [(n-1)(\min C_2) - 1] (\min_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|)$ 就有 $\|x\|_1 \leq C_1 \|x\|$ 。

最后，根据等价的传递性， X 上的任意两个范数 $\|\cdot\|_a$ 和 $\|\cdot\|_b$ 都与 $\|\cdot\|_1$ 等价，所以二者等价。

陈述并证明解对参数的二阶光滑依赖性（我们课上详细研究了一阶依赖性）

4.7. 考虑含参数 $\mu \in \mathbb{R}^m$ 的常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

其中： $(x, y, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ， $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是定义在开集 G 上的向量场。假设函数 $f \in C^2(G)$ ，证明：在上述假设下，解 $y = \varphi(x, \mu)$ 关于参数 μ 具有二阶连续可微性，即 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \in C$ 。

由于 $f \in C^1$ ，由一阶光滑性定理， $\varphi(x, \mu)$ 关于 μ 连续可微，那么

$$\frac{d}{dx} \varphi(x, \mu) = f(x, \varphi(x, \mu), \mu)$$

两边对 μ 求导，

$$\frac{d}{d\mu} \frac{d}{dx} \varphi(x, \mu) = f_y \frac{d\varphi}{d\mu} + f_\mu, \quad \frac{d\varphi}{d\mu}(x_0) = 0$$

记 $\eta = \frac{d}{d\mu} \varphi(x, \mu)$ ，那么 η 就会满足一个初值问题：

$$\frac{d\eta}{dx} = f_y \eta + f_\mu, \quad \eta(x_0, \mu) = 0$$

因为 f 是二阶可微的，所以 f_y 和 f_μ 都是 C^1 函数，因此右侧仍然是一个连续函数，再次应用一阶光滑性定理，解 $\eta(x, \mu)$ 关于 μ 连续可微，所以

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mu}(x, \mu) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}(x, \mu)$$

存在且连续。因此 $\varphi(x, \mu)$ 对 μ 有二阶连续偏导数。

令 $\zeta = \frac{\partial \eta}{\partial \mu}(x, \mu)$ ，同时也可以验证

$$\frac{d\zeta}{dx} = f_y \zeta + f_{yy}(\eta, \eta) + 2f_{y\mu}\eta + f_{\mu\mu}, \quad \zeta(x_0) = 0.$$

ěğčçñĤ. 还有一种是不用一阶的定理，直接算。因为菜，所以多练。

因为 $\varphi(x, \mu)$ 关于 μ 连续可微，记 $\eta(x, \mu) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(x, \mu) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ，则 η 满足一阶变分方程

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = f_y(x, \varphi, \mu) \eta + f_\mu(x, \varphi, \mu), \quad \eta(x_0, \mu) = 0$$

我们要证明 $\eta(x, \mu)$ 关于 μ 连续可微，即 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}$ 存在且连续。

固定一个 μ ，考虑在某一个方向上的增量 he_i ，定义差商

$$Z^h(x, \mu) = \frac{\eta(x, \mu + he_i) - \eta(x, \mu)}{h}$$

目标是证明当 $h \rightarrow 0$ 时， Z^h 一致收敛到某个连续函数 $\zeta_i(x, \mu)$ ，且该函数就是 $\frac{\partial \eta}{\partial \mu_i}$ 。

代入 η 满足的一阶变分方程，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \eta(x, \mu) &= f_y(x, \varphi(x, \mu), \mu) \eta(x, \mu) + f_\mu(x, \varphi(x, \mu), \mu) \\ \frac{\partial}{\partial x} \eta(x, \mu + he_i) &= f_y(x, \varphi(x, \mu + he_i), \mu + he_i) \eta(x, \mu + he_i) + f_\mu(x, \varphi(x, \mu + he_i), \mu + he_i) \end{aligned}$$

代入 Z^h 中，有

$$\frac{\partial Z^h}{\partial x} = \frac{1}{h} [f_y(x, \varphi^h, \mu^h) \eta^h - f_y(x, \varphi, \mu) \eta] + \frac{1}{h} [f_\mu(x, \varphi^h, \mu^h) - f_\mu(x, \varphi, \mu)]$$

其中 $\varphi^h = \varphi(x, \mu + he_i)$ ， $\mu^h = \mu + he_i$ ， $\eta^h = \eta(x, \mu + he_i)$ 。

先处理第一项，

$$\begin{aligned} f_y(x, \varphi^h, \mu^h) \eta^h - f_y(x, \varphi, \mu) \eta &= f_y(x, \varphi, \mu) (\eta^h - \eta) + [f_y(x, \varphi^h, \mu^h) - f_y(x, \varphi, \mu)] \eta^h \\ \frac{1}{h} [f_y \eta^h - f_y \eta] &= f_y(x, \varphi, \mu) Z^h + \frac{1}{h} [f_y(x, \varphi^h, \mu^h) - f_y(x, \varphi, \mu)] \eta^h \end{aligned}$$

然后对这两个差值进行泰勒展开。

$$f_y(x, \varphi^h, \mu^h) - f_y(x, \varphi, \mu) = f_{yy}(x, \varphi, \mu) (\varphi^h - \varphi) + f_{y\mu_i}(x, \varphi, \mu) h + o(|\varphi^h - \varphi|^2 + |h|^2)$$

$$f_\mu(x, \varphi^h, \mu^h) - f_\mu(x, \varphi, \mu) = f_{\mu y}(x, \varphi, \mu) (\varphi^h - \varphi) + f_{\mu\mu_i}(x, \varphi, \mu) h + o(|\varphi^h - \varphi|^2 + |h|^2)$$

由于

$$\varphi^h - \varphi = \eta(x, \mu)h + \varepsilon_1(x, h)h, \quad \eta^h = \eta(x, \mu) + \varepsilon_2(x, h)$$

且 $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0$ 一致, $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$ 一致。

全都代入 $\frac{\partial Z^h}{\partial x}$, 就有

$$\frac{\partial Z^h}{\partial x} = f_y(x, \varphi, \mu)Z^h + \left[f_{yy}(x, \varphi, \mu)(\eta + \varepsilon_1) + f_{y\mu_i} + \frac{o}{h} \right](\eta + \varepsilon_2) + f_{\mu y}(x, \varphi, \mu)(\eta + \varepsilon_1) + f_{\mu\mu_i} + \frac{o}{h}.$$

定义 $\zeta_i(x, \mu)$ 为如下线性初值问题的解:

$$\frac{d\zeta_i}{dx} = f_y(x, \varphi, \mu)\zeta_i + f_{yy}(x, \varphi, \mu)(\eta, \eta_i) + 2f_{y\mu_i}(x, \varphi, \mu)\eta + f_{\mu\mu_i}(x, \varphi, \mu), \quad \zeta_i(x_0, \mu) = 0.$$

令误差 $E^h(x, \mu) = Z^h - \zeta_i$, 得

$$\frac{\partial}{\partial x} E^h(x, \mu) = f_y(x, \varphi, \mu)E^h + \delta^h(x, \mu), \quad E^h(x_0, \mu) = 0$$

其中

$$\delta^h(x, \mu) = f_{yy}(x, \varphi, \mu)[(\eta + \varepsilon_1)(\eta + \varepsilon_2) - \eta\eta_i] - f_{y\mu_i}\varepsilon_2 + f_{\mu y}\varepsilon_1 + \frac{o}{h}$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, $\delta^h(x, \mu) \rightarrow 0$ 。由Gronwall不等式可以得到

$$|E^h(x)| \leq \int_{x_0}^x |\delta^h(s)| e^{\int_s^x \|f_y\| d\tau} ds \leq C \int_{x_0}^x |\delta^h(s)| ds \rightarrow 0$$

所以 $E^h \rightarrow 0$ 一致, 即

$$Z^h(x, \mu) \rightarrow \zeta_i(x, \mu) \text{ 当 } h \rightarrow 0, \text{ 一致于 } x \in I, \mu \in B$$

这样 ζ_i 就连续了, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} Z^h = \frac{\partial \eta}{\partial \mu_i}$ 存在且等于 ζ_i 。因此 η 关于 μ_i 连续可微, 偏导数连续。

从而就得到了 $\eta \in C_\mu^1$, 也就是原解 $\varphi(x, \mu)$ 关于 μ 二阶连续可微。

第五章 第6周微分方程作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

pg 124 1(1),3,4,5

5.1. 1. 求出齐次线性微分方程组 $\frac{dy}{dt} = A(t)y$ 的通解，其中 $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$, $t \neq 0$;

解.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} y_1 \\ \frac{1}{t} y_2 \end{pmatrix}$$

所以单独解这两个微分方程，可得通解为 $y_1 = C_1 t$, $y_2 = C_2 t$.

5.2. 3. 试证向量函数组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

在任意区间 (a, b) 上线性无关。(显然，它们的朗斯基行列式 $W(x) \equiv 0$ 。对照定理 6.2 可知，上述三个线性无关的向量函数不可能同时满足任何一个三阶的齐次线性微分方程组。)

解. 假设 $1, x, x^2$ 在区间 (a, b) 上线性相关，即存在不全为 0 的 c_1, c_2, c_3 ，使得 $c_1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0$ ，由于左边是一个二次多项式，至多存在两个零点，除非恒为 0，所以得到矛盾。因此这个向量组在任意区间 (a, b) 线性无关。

5.3. 4. 试证基解矩阵完全决定齐次线性微分方程组，即如果方程组

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y \quad \text{与} \quad \frac{dy}{dx} = B(x)y$$

有一个相同的基解矩阵，则 $A(x) \equiv B(x)$ 。

解. 假设矩阵 Φ 是这两个方程的基解矩阵，那么这两个方程的基本解组就可以写成 $(y_1, \dots, y_n)$ ，每个 y_i 就是 Φ 的第 i 列。于是

$$\frac{dy_i}{dx} = A(x)y_i = B(x)y_i \implies A(x)\Phi = B(x)\Phi$$

两边同乘 Φ^{-1} ，有 $A(x) = B(x)$ 。

5.4. 5. 设 $\Phi(x)$ 是线性齐次微分方程组 $\frac{dy}{dx} = A(x)y$ 的一个基解矩阵, 并且 n 维向量函数 $f(x, y)$ 在区域 $E = \{(x, y) | a < x < b, |y| < +\infty\}$ 上连续, 则求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

等价于求解(向量形式的)积分方程

$$y(x) = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^x \Phi(x)\Phi^{-1}(s)f(s, y(s))ds,$$

其中 $x_0 \in (a, b)$ 。

5.5. 因为 $\Phi(x)$ 是一个基解矩阵, 所以 $\frac{d\Phi(x)}{dx} = A(x)\Phi(x)$, 并且 $\Phi(x)$ 可逆。然后求 Φ^{-1} 的导数, 对 $\Phi(x)\Phi^{-1}(x) = I$ 两边求导,

$$\frac{d\Phi(x)}{dx}\Phi^{-1}(x) + \Phi(x)\frac{d\Phi^{-1}(x)}{dx} = 0 \implies \frac{d\Phi^{-1}(x)}{dx} = -\Phi^{-1}(x)A(x)$$

所以, 在方程 $\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x, y)$ 两边同时左乘上 $\Phi^{-1}(x)$, 有

$$\Phi^{-1}(x)\frac{dy}{dx} = \Phi^{-1}(x)A(x)y + \Phi^{-1}(x)f(x, y)$$

令 $z = \Phi^{-1}(x)y$, 于是

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\Phi^{-1}(x)}{dx}y + \Phi^{-1}(x)\frac{dy}{dx} = -\Phi^{-1}(x)A(x)y + \Phi^{-1}(x)\frac{dy}{dx}$$

所以原方程等价于 $\frac{dz}{dx} = \Phi^{-1}(x)f(x, \Phi(x)z)$, 两边积分, 有

$$z = z_0 + \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)f(s, y)ds$$

代入 $z = \Phi^{-1}(x)y$ 并化简后可得

$$y(x) = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^x \Phi(x)\Phi^{-1}(s)f(s, y(s))ds$$

Pg 143 证明定理6.3

5.5. 设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ 是齐次线性微分方程在区间 (a, b) 上的一个基本解组, 则非齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

的通解为

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x) + \varphi^*(x),$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是任意常数, 而

$$\varphi^*(x) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \cdot \int_{x_0}^x \frac{W_k(s)}{W(s)} f(s) ds.$$

是方程 $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$ 的一个特解。这里 $W(x)$ 是 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 的朗斯基行列式, 而 $W_k(x)$ 是 $W(x)$ 中第 n 行第 k 列元素的代数余子式 (亦即, 以 $(0, 0, \cdots, 0, 1)$ 的转置替换 $W(x)$ 中的第 k 列后所得的行列式)。

例 6.3. 将高阶的微分方程转化为一阶微分方程组

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & \cdots & -a_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(s) \end{pmatrix}$$

应用定理6.3得到他的通解。然后就只需要说明向量函数 $\int_{x_0}^x \Phi(x)\Phi^{-1}(s)f(s, y(s))ds$ 的第一个分量是 $\varphi^*(x)$ 。

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \Phi(x)\Phi^{-1}(s)f(s, y(s))ds &= \int_{x_0}^x \frac{\Phi(x)}{W(x)} \begin{pmatrix} * & * & W_1(x) \\ & * & W_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & * & W_n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(s) \end{pmatrix} ds \\ &= \int_{x_0}^x \frac{f(s)}{W(x)} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ & * & & * \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1(x) \\ W_2(x) \\ \vdots \\ W_n(x) \end{pmatrix} ds \\ &= \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \cdot \int_{x_0}^x \frac{W_k(s)}{W(s)} f(s) ds \end{aligned}$$

pg 151 3, 4, 5, 7, 10 (1) (2) (3)

例 5.6. 3. 考虑微分方程 $y'' + q(x)y = 0$ 。

(1) 设 $y = \varphi(x)$ 与 $y = \psi(x)$ 是它的任意两个解, 试证 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的朗斯基行列式恒等于一个常数。

(2) 已知方程有一个特解为 $y = e^x$, 试求这方程的通解, 并确定 $q(x)$ 。

§5.7. (1) 记 $W(x) = \begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix} = \varphi\psi' - \psi\varphi'$ 。求导得

$$W'(x) = \varphi\psi'' - \psi\varphi'' = \varphi(-q(x)\varphi) - \psi(-q(x)\varphi) = 0$$

所以 $W(x)$ 是一个常数。

(2) 代入 $y = e^x$, $e^x + q(x)e^x = 0 \implies q(x) = -1$ 。所以方程变为 $y'' - y = 0$, 特征方程为 $\lambda^2 - \lambda = 0 \implies \lambda = 1$ 或 -1 , 所以通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$ 。

§5.7. 别忘了朗斯基行列式的求导是

$$\frac{dW}{dx} = \text{tr}(A)W, \quad \frac{dy}{dx} = Ay$$

第(2)问, 设另一个特解为 $\varphi(x)$, 于是

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & e^x \\ \varphi'(x) & e^x \end{vmatrix} = e^x(\varphi(x) - \varphi'(x)) = C$$

从而可以得到 $\varphi(x) = \frac{C}{2}e^{-x}$ 。这样的话通解就是 $C_1e^x + C_2e^{-x}$ 。

§5.7. 4. 考虑微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是区间 $I = (a, b)$ 上的连续函数。

(1) 设 $y = \varphi(x)$ 是方程在区间 I 上的一个非零解 (即 $\varphi(x)$ 在区间 I 上不恒等于零), 试证 $\varphi(x)$ 在区间 I 上只有简单零点 (即: 如果存在 $x_0 \in I$, 使得 $\varphi(x_0) = 0$, 那么必有 $\varphi'(x_0) \neq 0$)。并由此进一步证明, $\varphi(x)$ 在任意有限区间上至多有有限个零点, 从而每一个零点都是孤立的。

(2) 在例 1 中, 对一般的情形证明相应的结论。

§5.7. (1) 使用反证法, 假设存在 $x_0 \in I$, $\varphi(x_0) = 0$ 且 $\varphi'(x_0) = 0$, 那么由解的存在唯一性定理, 那么方程只有唯一的解 $y = 0$, 矛盾。因此 $\varphi(x)$ 在区间 I 上只有简单零点。

假如在区间 I 上有无限个零点, 那么会存在一个收敛子列记为 $\{x_n\}$, $x_n \rightarrow x$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时。有中值定理, 存在 $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$,

$$\varphi'(\xi_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}} = 0$$

所以两边取极限, 就会存在 x , 使得 $\varphi'(x) = 0, \varphi(x) = 0$, 与简单零点矛盾。所以至多只有有限个零点。

(2) 例1: 设 $y = \varphi(x)$ 是二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的一个非零解, 其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是区间 (a, b) 上的连续函数, 则方程的通解为

$$y = \varphi(x) \left[C_1 + C_2 \int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi^2(s)} e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt} ds \right],$$

其中 C_1 和 C_2 为任意常数。

设 $\varphi(x)$ 存在零点, 不妨设只有一个, 多个也是一样, 记零点为 $\xi \in (x_0, \infty)$, $E(s) = e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt}$, 由于 $\varphi(\xi) = 0, \varphi'(\xi) \neq 0$, 所以在 $s \in (\xi - \delta, \xi)$ 中, $\varphi(s) = \varphi'(s)(s - \xi) + o(s - \xi)$, $E(s) = E(\xi) + o(1)$. 于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \xi} \varphi(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{\varphi^2(s)} E(s) ds &= \lim_{x \rightarrow \xi} \varphi(x) \left(\int_{x_0}^{\xi-\delta} + \int_{\xi-\delta}^x \right) \frac{E(s) ds}{\varphi^2(s)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \varphi(x) \int_{\xi-\delta}^x \frac{E(s) ds}{\varphi^2(s)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \xi} \varphi(x) \int_{\xi-\delta}^x \frac{E(\xi) + o(1)}{[\varphi'(\xi)(s - \xi) + o(s - \xi)]^2} ds \\ &= \lim_{x \rightarrow \xi} \varphi(x) \int_{\xi-\delta}^x \frac{E(\xi)}{[\varphi'(\xi)(s - \xi)]^2} \cdot \frac{1 + o(1)}{(1 + o(1))^2} ds \\ &= \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\varphi'(\xi)(x - \xi) E(\xi) + o(x - \xi)}{\varphi'(\xi)^2} \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{x - \xi} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \xi} \left[\frac{(x - \xi) E(\xi)}{\varphi'(\xi) \delta} - \frac{E(\xi)}{\varphi'(\xi)} + o(1) \right] \\ &= -\frac{E(\xi)}{\varphi'(\xi)} \end{aligned}$$

是一个有限的值!

5.8. 5. 设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的一个基本解组, 试证:

- (1) 方程的系数函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 能由这个基本解组唯一地确定。
- (2) $u(x)$ 和 $v(x)$ 没有共同的零点。

(1) 将 $u(x), v(x)$ 代入方程, 可得

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = 0 \\ v'' + pv' + qv = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} p = \frac{u''v - v''u}{uv' - vu'} \\ q = \frac{v''u' - v'u''}{uv' - vu'} \end{cases}$$

由于 u, v 是基本解组, 所以朗斯基行列式 $\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = uv' - vu' \neq 0$, 这说明了上面方程组有唯一解。所以 p, q 可以由基本解组唯一确定。

(2) 假设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 有一个共同的零点 x_0 , 即 $u(x_0) = v(x_0) = 0$ 。则朗斯基行列式

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} u(x_0) & v(x_0) \\ u'(x_0) & v'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ u'(x_0) & v'(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

但 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是方程的一个基本解组, 故它们线性无关, 从而朗斯基行列式恒不为零, 矛盾。因此 $u(x)$ 和 $v(x)$ 没有共同的零点。

§5.9. 7. 设欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n x y' + a_n y = 0,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是常数, $x > 0$ 。试利用适当的变换把它化成常系数齐次线性微分方程。

解. 令 $x = e^t$, 那么

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \cdot \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(e^{-t} \cdot \frac{dy}{dt} \right) = \frac{de^{-t}}{dt} \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \right) = e^{-2t} \left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \end{aligned}$$

这样代入进去就正好能和前面的 x 消掉, 变成常系数齐次线性微分方程。

§5.10. 10. 求解下列常系数线性微分方程:

- (1) $y'' + y' - 2y = 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
- (2) $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$;
- (3) $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$;

解. (1) 先求齐次方程的通解, 特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \implies \lambda = -2$ 或 1 , 所以通解是

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$$

然后求特解, 设 $y = ax + b$, 代入得

$$a - 2ax - 2b = 2x \implies (2 + 2a)x = a - 2b$$

所以 $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$, 特解为 $y = -x - \frac{1}{2}$.

所以原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - x - \frac{1}{2}$$

代入边界条件, 有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = 0 \\ -2C_1 + C_2 - 1 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

最后得到解为

$$y = -\frac{1}{2}e^{-2x} + e^x - x - \frac{1}{2}.$$

(2) 先求齐次方程的通解, 特征方程为 $2\lambda^2 - 4\lambda - 6 = 0 \implies \lambda = -1$ 或 3 , 所以通解是

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

然后求特解, 设特解为 $Q(x)e^{2x}$, $Q(x)$ 是多项式, 将原方程简记为 $P\left(\frac{d}{dx}\right)y = 3e^{2x}$, 其中 $P(\lambda) = 2\lambda^2 - 4\lambda - 6$, 代入可得

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dx}\right)y &= 2\frac{d^2(Q(x)e^{2x})}{dx^2} - 4\frac{d(Q(x)e^{2x})}{dx} - 6Q(x)e^{2x} \\ &= 2Q''(x)e^{2x} + 8Q'(x)e^{2x} + 8Q(x)e^{2x} - 4Q'(x)e^{2x} - 8Q(x)e^{2x} - 6Q(x)e^{2x} \\ &= [2Q''(x) + 4Q'(x) - 6Q(x)]e^{2x} = 3e^{2x} \end{aligned}$$

所以我可以确定 $Q(x)$ 是常数, 故特解是 $-\frac{1}{2}e^{2x}$ 。所以常微分方程的解是

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}.$$

(3) 先求齐次方程的通解, 特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda = 0 \implies \lambda = 0$ 或 -2 , 所以通解是

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2$$

然后求特解, 设特解为 $A \sin 2x + B \cos 2x + Cx$, 代入得

$$-4A \sin 2x - 4B \cos 2x + 2(2A \cos 2x - 2B \sin 2x + C) = 3 + 4 \sin 2x$$

即

$$(-4A - 4B) \sin 2x + (4A - 4B) \cos 2x + 2C = 3 + 4 \sin 2x \implies A = -\frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{3}{2}$$

所以特解为 $y = -\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{2}x$, 所以, 方程的通解为

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{2}x.$$

第六章 第7周微分方程作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

p152 10 (4) (5) (11) (12)

6.1. (4) $y''' + 3y' - 4y = 0$;

(5) $y''' - 2y'' - 3y' + 10y = 0$;

(11) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$;

(12) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$;

(4) 特征方程为 $\lambda^3 + 3\lambda - 4 = 0$, 三个根为 $\lambda = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$ 。所以通解为

$$y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{2} x \right) + C_3 \sin \left(\frac{\sqrt{15}}{2} x \right) \right).$$

(5) 特征方程为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda + 10 = 0$, 三个根为 $\lambda = -2, 2 \pm i$, 所以通解为

$$y = C_1 e^{-2x} + e^{2x} (C_2 \cos x + C_3 \sin x).$$

(11) 先求齐次方程的通解。特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, 两个根为 $\lambda = 1 \pm i$, 所以通解为

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

再找特解。设特解为 $y_s = (A(x) \cos x + B(x) \sin x) e^x$, 于是

$$\begin{aligned} y'_s &= e^x \left[(A + A' + B) \cos x + (B + B' - A) \sin x \right] \\ y''_s &= e^x \left[(A'' + 2A' + 2B' + 2B) \cos x + (B'' - 2A' + 2B' - 2A) \sin x \right] \end{aligned}$$

代入得

$$(A'' + 2B') \cos x + (B'' - 2A') \sin x = 4 \cos x$$

可得 $y_s = 2xe^x \sin x$, 所以原非齐次方程的通解为

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2xe^x \sin x.$$

(12) 先求齐次方程的通解。特征方程为 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, 两个根为 $\lambda = 2, 3$, 所以通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

再找特解。设特解为 $y_s = P(x) e^{-x}$, 于是

$$\begin{aligned} y'_s &= (P'(x) - P(x)) e^{-x} \\ y''_s &= (P''(x) - 2P'(x) + P(x)) e^{-x} \end{aligned}$$

代入得

$$(P'' - 7P' + 12P) e^{-x} = (12x - 7) e^{-x}$$

于是特解为 $y = x e^{-x}$, 所以原非齐次方程的通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x e^{-x}.$$

p243 例2

§6.2. 例 2 求解微分方程组

$$\begin{cases} \alpha \frac{du}{dt} = (\beta - \gamma)vw, & (1) \\ \beta \frac{dv}{dt} = (\gamma - \alpha)wu, & (2) \\ \gamma \frac{dw}{dt} = (\alpha - \beta)uv, & (3) \end{cases}$$

其中 $\alpha > \beta > \gamma > 0$ 是给定的常数。

§6.2. (1) · u + (2) · v + (3) · w 可得

$$\alpha u \frac{du}{dt} + \beta v \frac{dv}{dt} + \gamma w \frac{dw}{dt} = 0$$

所以 $V_1(u, v, w) = \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = C_1$ 是一个首次积分。

(1) · αu + (2) · βv + (3) · γw 可得

$$\alpha^2 u \frac{du}{dt} + \beta^2 v \frac{dv}{dt} + \gamma^2 w \frac{dw}{dt} = 0$$

所以 $V_2(u, v, w) = \alpha^2 u^2 + \beta^2 v^2 + \gamma^2 w^2 = C_2$ 是一个首次积分。

从而可以得到

$$v^2 = \frac{C_1 \gamma - C_2 - (\alpha \gamma - \alpha^2) u^2}{\beta \gamma - \beta^2} = K_1 + K_2 u^2, \quad w^2 = \frac{C_1 \beta - C_2 - (\alpha \beta - \alpha^2) u^2}{\beta \gamma - \gamma^2} = L_1 + L_2 u^2$$

代入第一个微分方程, 有

$$\alpha \frac{du}{dt} = (\beta - \gamma) \sqrt{K_1 + K_2 u^2} \sqrt{L_1 + L_2 u^2}$$

这样就可以解出

$$\int \frac{\alpha du}{(\beta - \gamma) \sqrt{K_1 + K_2 u^2} \sqrt{L_1 + L_2 u^2}} = t + M$$

然后 v, w 就可以求出来了。

p250 1

6.3. 1. 设已知微分方程组 (10.17) 的 k ($1 \leq k \leq n$) 个互相独立的首次积分

$$V_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

(这里所谓 k 个互相独立的首次积分, 其含意是: 矩阵 $\left(\frac{\partial V_i}{\partial y_j}\right)_{k \times n}$ 的秩等于 k , 或不妨设雅可比行列式

$$\frac{D(V_1, V_2, \dots, V_k)}{D(y_1, y_2, \dots, y_k)}$$

不等于 0), 则利用这 k 个互相独立的首次积分可以把微分方程组 (10.17) 降低 k 阶。

6.4. 考虑映射

$$\Phi(x, y_1, \dots, y_n) = (x, V_1, \dots, V_k, y_{k+1}, \dots, y_n)$$

他的雅可比矩阵为

$$J\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial V_1}{\partial y_k} & \frac{\partial V_1}{\partial y_{k+1}} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial V_k}{\partial x} & \frac{\partial V_k}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial V_k}{\partial y_k} & \frac{\partial V_k}{\partial y_{k+1}} & \dots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

由于 $\text{rank} \left(\frac{\partial V_i}{\partial y_j}\right)_{k \times n} = k$, 不妨设他的前 k 列满秩。交换一下变量的位置可以得到 $\det J\Phi \neq 0$, 所以 Φ 是局部微分同胚, 于是原方程组在新坐标下就变成了

$$\frac{dV_i}{dx} = 0 \quad (i = 1, \dots, k), \quad \frac{dy_i}{dx} = F_i(x, C_1, \dots, C_k, y_{k+1}, \dots, y_n)$$

这就是降了 k 阶。

陈述并证明秩定理

6.4. 设 $U \subset \mathbb{R}^m$ 是开集, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射。若在 U 内每一点, f 的雅可比矩阵的秩都等于同一个常数 r ($0 \leq r \leq \min(m, n)$), 则对任意一点 $p \in U$, 存在:

- p 的邻域 $V \subset U$,
- $\mathbb{R}^m$ 中的开集 $\tilde{V}$ 上的 C^1 微分同胚 $\varphi: V \rightarrow \tilde{V}$ (变量替换, 满足 $\varphi(p) = 0$),
- $\mathbb{R}^n$ 中的开集 W 上的 C^1 微分同胚 $\psi: f(V) \rightarrow W$ (值域替换, 满足 $\psi(f(p)) = 0$),

使得复合映射 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \tilde{V} \rightarrow W$ 具有如下简单形式:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

例 1. 取定点 $a \in U$, 在 a 附近 $\text{rank } Jf = r$.

第一步: 构造 φ .

因为秩为 r , 不妨设 Jf 左上角 $r \times r$ 的子矩阵秩为 r , 定义映射

$$\varphi(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x), x_{r+1}, \dots, x_m) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

在 a 处他的雅可比矩阵是

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{r+1}} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} & \frac{\partial f_r}{\partial x_{r+1}} & \cdots \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

因为 $\det J\varphi(a) \neq 0$, 所以在 a 附近是一个微分同胚, 这样

$$f \circ \varphi^{-1}(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_r, g_{r+1}(y), \dots, g_n(y)).$$

其中 $g_i(y) := f_i \circ \varphi^{-1}(y)$.

第二步: 构造 ψ .

令 $F = f \circ \varphi^{-1}$. F 的雅可比矩阵仍为 r ,

$$JF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial g_{r+1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial y_r} & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial y_{r+1}} & \cdots & \frac{\partial g_{r+1}}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \frac{\partial g_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_r} & \frac{\partial g_n}{\partial y_{r+1}} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

所以每一个 $\frac{\partial g_l}{\partial y_s}$ ($l > r, s > r$)都等于0, $g_k(y)$ 实际上不依赖于 $y_{r+1}, \dots, y_m$, 只是 $y_1, \dots, y_r$ 的函数,

因此令 $h_k(y_1, \dots, y_r) = g_k(y)$, 我们有

$$F(y) = (y_1, \dots, y_r, h_{r+1}(y_1, \dots, y_r), \dots, h_n(y_1, \dots, y_r))$$

令 $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, x_{r+1} - h_{r+1}(x_1, \dots, x_r), \dots, x_n - h_n(x_1, \dots, x_r))$$

$$\det(J\psi) = \det \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ & I_{n-r} \end{pmatrix} = 1$$

所以 ψ 在局部也是一个微分同胚。并且

$$\begin{aligned} \psi \circ F(y) &= (y_1, \dots, y_r, h_{r+1}(y_1, \dots, y_r) - h_{r+1}(x_1, \dots, x_r), \dots) \\ &= (y_1, \dots, y_r, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

于是我们就找到了这样的 ψ 和 φ .

第七章 第8周微分方程作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

7.1. 推导三维波方程的解的公式

7. 固定空间点 M ，定义 u 的球面平均：

$$U(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(M)} u(P, t) dS_P$$

在球坐标下，

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}u$$

对球面取平均时，角向Laplace项的积分为0，所以有

$$U_{tt} = a^2 \left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r \right)$$

令 $V(r, t) = rU(r, t)$ ，可以发现

$$V_{rr} = \frac{\partial}{\partial r} (U + rU_r) = 2U_r + rU_{rr} = \frac{1}{a^2}V_{tt}$$

于是 V 满足一维波方程，且初值为

$$V(r, 0) = r\Phi(r), \quad V_t(r, 0) = r\Psi(r),$$

其中

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(M)} \varphi(P) dS_P, \quad \Psi(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(M)} \psi(P) dS_P$$

将 $F(r) := V(r, 0), G(r) := V_t(r, 0)$ 关于 r 做奇延拓，定义

$$F(r) = \begin{cases} F(r), & r \geq 0 \\ -F(-r), & r < 0 \end{cases}, \quad G(r) = \begin{cases} G(r), & r \geq 0 \\ -G(-r), & r < 0 \end{cases}$$

这样，新的 F, G 就都是奇函数了。

对奇延拓后的问题使用达朗贝尔公式,

$$V(r, t) = \frac{1}{2} [F(r+at) + F(r-at)] + \frac{1}{2a} \int_{r-at}^{r+at} G(s) ds$$

因为 $V = rU$, 所以 $V_r(r, t) = U(r, t) + rU_r(r, t)$, 因为 $U(0, t) = u(M, t)$, 所以 $V_r(0, t) = u(M, t)$ 。

所以, 对 r 求导, 有

$$V_r(r, t) = \frac{1}{2} [F'(r+at) + F'(r-at)] + \frac{1}{2a} [G(r+at) - G(r-at)]$$

令 $r = 0$, 有

$$\begin{aligned} V_r(0, t) &= \frac{1}{2} [F'(at) + F'(-at)] + \frac{1}{2a} [G(at) - G(-at)] \\ &= F'(at) + \frac{1}{a} G(at) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{a} F(at) \right] + \frac{1}{a} G(at) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \varphi_{at(M)} dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \psi_{at(M)} dS \end{aligned}$$

§ 7.2. 计算球坐标下的拉普拉斯

§ 7. 直角坐标系下:

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

设三维球坐标为

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

其中 $r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$. $f(x, y, z) = g(r, \theta, \varphi)$.

因为 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 所以

$$r_x = \frac{x}{r} = \sin \theta \cos \varphi, \quad r_y = \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \varphi, \quad r_z = \frac{z}{r} = \cos \theta$$

然后因为 $\cos \theta = \frac{z}{r}$, 所以

$$\theta_x = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r}, \quad \theta_y = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r}, \quad \theta_z = -\frac{\sin \theta}{r}.$$

再由 $\tan \varphi = \frac{y}{x}$, 可得

$$\varphi_x = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta}, \quad \varphi_y = \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta}, \quad \varphi_z = 0$$

所以根据链式法则，

$$f_x = g_r r_x + g_\theta \theta_x + g_\varphi \varphi_x = g_r \sin \theta \cos \varphi + g_\theta \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} - g_\varphi \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta}$$

同理可得，

$$f_y = g_r \sin \theta \sin \varphi + g_\theta \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} + g_\varphi \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta}$$

$$f_z = g_z \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r} g_\theta$$

对任意变量 $x_i \in \{x, y, z\}$ ，都有

$$f_{x_i} = g_r r_{x_i} + g_\theta \theta_{x_i} + g_\varphi \varphi_{x_i}.$$

于是

$$\Delta f = \sum_i f_{x_i x_i}$$

展开后，是

$$\begin{aligned} & g_{rr} \sum r_{x_i}^2 + g_{\theta\theta} \sum \theta_{x_i}^2 + g_{\varphi\varphi} \sum \varphi_{x_i}^2 \\ & + 2g_{r\varphi} \sum r_{x_i} \varphi_{x_i} + 2g_{r\theta} \sum r_{x_i} \theta_{x_i} + 2g_{\theta\varphi} \sum \theta_{x_i} \varphi_{x_i} \\ & + g_r \sum r_{x_i x_i} + g_\theta \sum \theta_{x_i x_i} + g_\varphi \sum \varphi_{x_i x_i} \end{aligned}$$

由前面的结果可以看出，

$$\begin{aligned} \sum r_{x_i}^2 &= 1, \quad \sum \theta_{x_i}^2 = \frac{1}{r^2}, \quad \sum \varphi_{x_i}^2 = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \\ \sum r_{x_i} \varphi_{x_i} &= \sum r_{x_i} \theta_{x_i} = \sum \theta_{x_i} \varphi_{x_i} = 0 \\ \sum r_{x_i x_i} &= \Delta \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) = \frac{2}{r}, \quad \sum \theta_{x_i x_i} = \frac{\cot \theta}{r^2}, \quad \sum \varphi_{x_i x_i} = 0 \end{aligned}$$

最终，合并所有项，就可以得到

$$\Delta f = g_{rr} + \frac{2}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta} + \frac{\cot \theta}{r^2} g_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} g_{\varphi\varphi}$$

§ 7.3. 利用三维波方程的解的公式，给出二维波方程解的公式

§ 7.4. 三维的泊松公式为

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(M)} \varphi dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(M)} \psi dS$$

把二维初值延拓成三维初值:

$$\tilde{\varphi}(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(\xi, \eta), \quad \tilde{\psi}(\xi, \eta, \zeta) = \psi(\xi, \eta),$$

他们不依赖 ζ 也就是说二维解不依赖 z , 所以二维解可以取为

$$v(x, y, t) = u(x, y, 0, t)$$

将三维球面投影到二维圆盘上, 面积微元 $dS = d\sigma \cdot \cos \gamma$, γ 为这两个面积微元法线方向间的夹角, 且

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}{at}$$

然后把上下两片合起来, 令 $\rho = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$, 因此

$$S_{at(M)} \tilde{\varphi} dS =_{\rho < at} \frac{2at\varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}} d\sigma$$

$$S_{at(M)} \tilde{\psi} dS =_{\rho < at} \frac{2at\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}} d\sigma$$

代入三维公式, 就可以得到

$$v(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi a} \int_{\rho < at} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}} d\sigma \right) + \frac{1}{2\pi a} \int_{\rho < at} \frac{2at\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}} d\sigma$$

7.4. 陈述并证明二维波方程的有限传播速度 (可以只考虑光滑初值)

陈述: 设 $u = u(x, y, t)$ 是二维波方程的解, 则 $u(P, t)$ 只依赖初值 φ, ψ 在圆盘

$$B(P, at) = \{Q \in \mathbb{R}^2 : |Q - P| < at\}$$

中的取值。

证明: 由上一题的公式可以看出, 两个积分只在 $\rho < at$ 中求, 所以成立。

7.5. 陈述并证明二维波方程不满足强惠更斯原理

举一个反例. 设 $\varphi = 0, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\psi > 0, \text{supp} \psi \subset B(0, R)$, 当 $t > R/a$ 时, 假如他满足强惠更斯原理, 那么 $u(0, 0, t)$ 应该与 $\psi(0, 0, 0)$ 无关系, 但实际上有公式可知,

$$u(0, 0, t) = \int_{\text{supp} \psi} \frac{2at\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{(at)^2 - \rho^2}} d\sigma$$

也就是说, 即使 $t > R/a$, 在原点处, 仍然能感受到初始速度 ψ 的影响。

§7.6. 课本51页, (5.11) 式下方说3维波方程的解以 t^{-1} 的阶趋向于0, 阅读5.11式, 将其陈述为一个定理并证明。

(可以假设初值紧支撑光滑, 5.11的关键是估计和 M 的选取无关)

定理陈述: 设 $a > 0$, 考虑三维波方程的Cauchy问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases}$$

其中 $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ 。则其解 $u(x, t)$ 满足: 存在常数 $L > 0$, 使得对任意 $M \in \mathbb{R}^3$ 和任意 $t \geq 1$, 都有

$$|u(M, t)| \leq \frac{L}{t}.$$

证明: 泊松公式为

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t S_{at}(M)} \varphi dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t S_{at}(M)} \psi dS$$

其中 $S_{at}(M)$ 表示以 $M(x, y, z)$ 为球心, at 为半径的球面。为了讨论的方便, 我们进行改写。由于

$$\frac{1}{4\pi a^2 t S_{at}(M)} \varphi dS = \frac{1}{4\pi S_1(x)} t \varphi(x_1 + at\alpha_1, x_2 + at\alpha_2, x_3 + at\alpha_3) d\omega$$

对 t 求导一次, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t S_{at}(M)} \varphi dS \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi S_1(x)} \varphi(x + at\alpha) d\omega \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[S_1(x) \varphi(x + at\alpha) d\omega + S_1(x) at \sum_{i=1}^3 \varphi_{x_i}(x + at\alpha) \cdot a_i d\omega \right] \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t^2 S_{at}(M)} \left[\varphi(M') + \nabla \varphi(M') \cdot \overrightarrow{MM'} \right] dS_{M'} \end{aligned}$$

其中 M' 为积分球面上的变动点, 而 $dS_{M'}$ 为面积微元, 于是, 泊松公式就可以改写成

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t^2 S_{at}(M)} \left[t\psi(M') + \varphi(M') + \nabla \varphi(M') \cdot \overrightarrow{MM'} \right] dS_{M'}$$

因为 φ, ψ 都是紧支撑的, 所以存在 $\rho > 0$, 使得 φ, ψ 以及 $\nabla \varphi$ 都在球 $B_\rho(0)$ 外为0, 于是上面的积分实际上只需要在 $S_{at}(M) \cap B_\rho(0)$ 上进行。

设 $|\varphi|, |\psi|, |\nabla\varphi|$ 都小于某个与 M 无关的正常数 C , 于是, 被积函数就可以写成

$$\left| t\psi(M') + \varphi(M') + \nabla\varphi(M') \cdot \overrightarrow{MM'} \right| \leq Ct + C + Cat = At + C$$

此外, $S_{at}(M) \cap B_\rho(0)$ 的面积, 不超过 $B_\rho(0)$ 的面积, 也就是 $4\pi\rho^2$, 于是,

$$|u(M, t)| \leq \frac{1}{4\pi a^2 t^2} (At + C) \cdot 4\pi\rho^2 = \frac{\rho^2}{a^2} \left(\frac{A}{t} + \frac{C}{t^2} \right)$$

当 $t \geq 1$ 时, $t^{-2} \leq t^{-1}$, 所以

$$|u(M, t)| \leq \frac{\rho^2}{a^2} (A + C) \frac{1}{t}$$

令 $L = \frac{\rho^2}{a^2} (A + C)$, 他不依赖于空间中 M 点的选取, 这就说明了三维波方程的解以 t^{-1} 的阶趋向于0。

第八章 第9周微分方程作业

姓名：王登辉 学号：2024K8009906023

1. 证明p17 定理2.2；

8.1. 若 $W(x, t; \tau)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \\ t = \tau : W = 0, \frac{\partial W}{\partial t} = f(x, \tau) \end{cases}$$

的解（其中 τ 为参数），则

$$u(x, t) = \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau$$

是初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \\ t = \tau : u = 0, \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

的解。

直接带入验证。

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau = W(x, t; t) + \int_0^t W_t(x, t; \tau) d\tau.$$

其中由初值条件， $W(x, t; t) = 0$ ，再对 t 求导

$$\begin{aligned} u_{tt} &= W_t(x, t; t) + \int_0^t W_{tt}(x, t; \tau) d\tau \\ &= f(x, t) + \int_0^t W_{tt}(x, t; \tau) d\tau \end{aligned}$$

另外，

$$u_{xx} = \int_0^t W_{xx}(x, t; \tau) d\tau$$

于是

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) + \int_0^t (W_{tt} - a^2 W_{xx})(x, t; \tau) d\tau = f(x, t)$$

最后验证初值

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = \int_0^0 (\cdot) d\tau = 0$$

所以

$$u(x, t) = \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau$$

是初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \\ t = \tau : u = 0, \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

的解。

2. P20, 3,10 (承认唯一性, 可考虑利用 (2.38));

§8.2. 利用传播波法, 求解波动方程的Goursat问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (-at < x < at, t > 0), \\ u|_{x-at=0} = \varphi(x) & (t > 0) \\ u|_{x+at=0} = \psi(x) & (t > 0), \varphi(0) = \psi(0) \end{cases}$$

§8.2. 令 $\xi = x - at, \zeta = x + at$, 于是

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\zeta \zeta_x = u_\xi + u_\zeta$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\zeta} \zeta_x + u_{\zeta\xi} \xi_x + u_{\zeta\zeta} \zeta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\zeta} + u_{\zeta\zeta}$$

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\zeta \zeta_t = -au_\xi + au_\zeta$$

$$u_{tt} = -au_{\xi\xi} \xi_t - au_{\xi\zeta} \zeta_t + au_{\zeta\xi} \xi_t + au_{\zeta\zeta} \zeta_t = a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\zeta} + a^2 u_{\zeta\zeta}$$

从而

$$\begin{aligned} u_{tt} = a^2 u_{xx} &\implies a^2 (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\zeta} + u_{\zeta\zeta}) = a^2 (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\zeta} + u_{\zeta\zeta}) \\ &\implies u_{\xi\zeta} = 0 \end{aligned}$$

将这个方程关于 ξ 积分一次, 关于 ζ 积分一次, 就可以得到通解为

$$u(\xi, \zeta) = F(\xi) + G(\zeta)$$

代回原来的变量, 通解就是

$$u(x, t) = F(x - at) + G(x + at)$$

代入初始条件, 得到

$$F(0) + G(2x) = \varphi(x), \quad F(-2x) + G(0) = \psi(-x)$$

所以

$$G(x+at) = \varphi\left(\frac{x+at}{2}\right) - F(0), \quad F(x-at) = \psi\left(\frac{x-at}{2}\right) - G(0)$$

由于 $\varphi(0) = \psi(0)$, 所以

$$u(0,0) = F(0) + G(0) = \varphi(0) = \psi(0)$$

所以

$$u(x,t) = \varphi\left(\frac{x+at}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-at}{2}\right) - \varphi(0).$$

8.3. 证明: 在柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) & (t > 0, -\infty < x < \infty), \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

中, 若 $f(x, t)$ 是 x 的奇函数, 则 $u(0, t) \equiv 0$; 若 $f(x, t)$ 是 x 的偶函数, 则 $u_x(0, t) \equiv 0$.

证明. 这个柯西问题的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau$$

若 $f(x, t)$ 是 x 的奇函数,

$$u(0, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau$$

考虑 $-u(0, t)$, 有

$$\begin{aligned} -u(0, t) &= \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} -f(y, \tau) dy d\tau \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(-y, \tau) dy d\tau \\ &= -\frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-a(t-\tau)}^{-a(t-\tau)} f(z, \tau) dz d\tau \end{aligned}$$

因为 $f(\cdot, t)$ 是奇函数, 所以

$$-\int_{-a(t-\tau)}^{-a(t-\tau)} f(z, \tau) dz = \int_{a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(y, \tau) dy$$

所以 $u(0, t) = -u(0, t) \implies u(0, t) \equiv 0$.

若 $f(x, t)$ 是 x 的偶函数,

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^t [f(x+a(t-\tau), \tau) - f(x-a(t-\tau), \tau)] d\tau \\ u_x(0, t) &= \frac{1}{2a} \int_0^t [f(a(t-\tau), \tau) - f(-a(t-\tau), \tau)] d\tau \equiv 0 \end{aligned}$$

8.4. 3. 陈述波方程解的唯一性和有限传播速度, 并利用能量方法证明 (需包含课上能量不等式推导)

波方程解的唯一性的陈述: 考虑初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), & (x, y) \in \Omega, t > 0 \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \\ u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \\ u|_{\Gamma} = 0, \end{cases}$$

其中 $\Gamma = \partial\Omega$, 若该问题存在足够光滑的解, 则解是唯一的。

证明: 考虑齐次方程

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad u|_{\Gamma} = 0$$

定义能量

$$E(t) = \int_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy$$

对 t 求导, 并应用分部积分,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)] dx dy = \int_{\Omega} [2u_t u_{tt} - 2a^2 u_t (u_{xx} + u_{yy})] dx dy = 0$$

所以 $E(t) = E(0)$, 就是能量守恒。

令 u_1, u_2 是上述问题两个不同的解, 令 $w = u_1 - u_2$, 则对 w 定义能量 $E_w(t)$, 由能量守恒 $E_w(t) = E_w(0) = 0$, 由于被积函数非负, 积分为0, 所以

$$w_t = w_x = w_y = 0$$

从而由 $w(x, y, 0) = 0$ 可以得到 $w \equiv 0$, 于是 $u_1 = u_2$, 证明了唯一性。

有限传播速度的陈述: 对于全平面上的柯西问题

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$$

固定点 (x_0, y_0) 和半径 $R > 0$, 考虑特征锥

$$K = \left\{ (x, y, t) : 0 \leq t \leq \frac{R}{a}, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (R - at)^2 \right\}$$

其底面为

$$\Omega_0 = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\}$$

时刻 t 的截面为

$$\Omega_t = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (R - at)^2\}.$$

若在底面 Ω_0 上初值为零, 即

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0$$

则 $u \equiv 0$ 于整个特征锥 K 内。

证明: 令 $e = \frac{1}{2} [u_t^2 + a^2 (u_x^2 + u_y^2)]$, 构造

$$P = (-a^2 u_t u_x, -a^2 u_t u_y, e)$$

计算它的散度:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} P &= \frac{\partial}{\partial x} (-a^2 u_t u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (-a^2 u_t u_y) + \frac{\partial e}{\partial t} \\ &= -a^2 (u_{tx} u_x + u_{xx}) - a^2 (u_{ty} u_y + u_{yy}) + u_t u_{tt} + a^2 u_x u_{xt} + a^2 u_y u_{yt} \\ &= u_t [u_{tt} - a^2 (u_{xx} + u_{yy})] = 0 \end{aligned}$$

考虑圆台, 下底面是

$$\Omega_0 : t = 0, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$$

上底面是

$$\Omega_{t_1} : t = t_1, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (R - at_1)^2$$

侧面记为 Σ . 所以由高斯公式,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D \operatorname{div} P dx dy dt = \int_{\partial D} P \cdot \nu dS \\ &= \int_{\Omega_{t_1}} P \cdot \nu dx dy + \int_{\Omega_0} P \cdot \nu dx dy + \int_{\Sigma} P \cdot \nu dS \\ &= \int_{\Omega_{t_1}} e dx dy - \int_{\Omega_0} e dx dy + \int_{\Sigma} P \cdot \nu dS \end{aligned}$$

而侧面的法向量 $\nu = (x - x_0, y - y_0, a(t_0 - t))$,

$$\begin{aligned} P \cdot \nu &= a(t_0 - t) \frac{1}{2} [u_t^2 + a^2 |\nabla u|^2] - (x - x_0) a^2 u_t u_x - (y - y_0) a^2 u_t u_y \\ &= a(t_0 - t) \left[\frac{1}{2} u_t^2 - a u_t (u_x + u_y) + \frac{1}{2} a^2 (u_x^2 + u_y^2) \right] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

于是

$$\int_{\Omega_{t_1}} e dx dy < \int_{\Omega_0} e dx dy$$

假设初始数据在底面 Ω_0 上为零:

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_0$$

此时底面能量为0, 由能量不等式, 每个截面的能量都是零, 所以在每个截面上,

$$u_t = 0, \quad u_x = u_y = 0$$

于是 u 在整个特征锥内为常数, 又因为在底面上 $u(x, y, 0) = 0$, 所以这个常数只能是0, 这就是有限传播速度。