

调和方程 / Laplace 方程

中文自学讲义与期末复习提纲

以 Evans 为主线，Strauss 补充计算方法，谷超豪《数学物理方程》补充中文课程体系

本讲义不是逐句翻译教材，而是按本科生自学和期末复习的顺序重新组织。重要定理后均附“什么时候用”和“怎么用”；例题尽量取自或改写自 Evans《Partial Differential Equations》、Strauss《Partial Differential Equations: An Introduction》以及谷超豪等《数学物理方程》的例题与课后题型。

2026 年 6 月 5 日

目录

阅读说明与题目来源	5
怎样用这份讲义自学	5
第一章 Laplace 方程和 Poisson 方程的来源	7
1.1 基本符号	7
1.2 稳态热传导	7
1.3 静电势与稳态扩散	8
1.4 从守恒律到方程：一步一步看	8
1.5 Dirichlet、Neumann、Robin 边值问题	9
1.6 适定性的三个问题	10
第二章 调和函数的基本性质	11
2.1 调和函数定义与例子	11
2.2 平均值公式	12
2.3 极值原理、比较原理与唯一性	14
2.4 Harnack 不等式、Liouville 定理与正则性	16
2.5 本章逻辑图	17
第三章 基本解与 Green 函数	18
3.1 Laplace 方程的基本解	18
3.2 Newton 势	19
3.3 Green 第一、第二恒等式	20
3.4 Green 函数与表示公式	21
3.5 本章自学检查	22
第四章 典型区域上的显式解	23
4.1 单位圆盘上的 Poisson 公式	23
4.2 圆盘 Poisson 方程的径向例题	25
4.3 矩形区域分离变量法	26

4.4	本章自学检查	29
第五章	Neumann 问题	30
5.1	兼容条件	30
5.2	为什么解只差一个常数	30
5.3	与 Dirichlet 问题的区别	32
5.4	Neumann 问题的解题顺序	32
第六章	弱解和能量方法	33
6.1	Sobolev 空间背景	33
6.2	Poisson 方程的弱形式	33
6.3	变分 formulation 与 Lax–Milgram	34
6.4	弱解和经典解的关系	35
6.5	本章自学检查	36
第七章	常见题型总结	37
7.1	题型一：判断函数是否调和	37
7.2	题型二：用平均值公式求点值	37
7.3	题型三：用极值原理证明唯一性	37
7.4	题型四：用比较原理估计解	37
7.5	题型五：圆盘 Dirichlet 问题	38
7.6	题型六：矩形区域分离变量	38
7.7	题型七：Green 函数表示	38
7.8	题型八：Liouville 型题目	38
7.9	题型九：Neumann 兼容条件	38
7.10	题型十：Poisson 方程弱形式	39
第八章	教材题型精选与详解	40
8.1	题 1：径向调和函数	40
8.2	题 2：平均值公式	41
8.3	题 3：极值原理排除解	41
8.4	题 4：Liouville 型题目	41
8.5	题 5：圆盘 Dirichlet 问题	42

8.6 题 6: 矩形分离变量	42
8.7 题 7: Neumann 兼容条件	43
8.8 题 8: Green 第一恒等式	43
8.9 题 9: 弱形式	44
8.10 题 10: 从四边非齐次到叠加	44
参考书目	45

阅读说明与题目来源

本讲义围绕三个问题展开：

模型从哪里来？ 解有什么性质？ 遇到题目怎样算？

Evans 的主线是调和函数的结构：基本解、平均值公式、极值原理、正则性、Harnack 不等式、Liouville 定理、Green 函数和能量方法。Strauss 的主线是可计算边值问题：矩形、圆盘、Fourier 级数、Poisson 公式、Neumann/Robin 条件。谷超豪《数学物理方程》的课程体例强调第一、第二、第三边值问题、适定性条件、分离变量和 Green 函数法，适合作为中文课程复习框架。

题目选取原则

例题和练习尽量从三本书的典型例题或课后题改写而来：径向壳层、圆盘 Poisson 公式、矩形三边为零一边给定、Neumann 兼容条件、Green 恒等式、Liouville 型题目等。为便于自学，题目叙述会比原题更完整，部分常数和边界数据会作轻微调整；这类题后统一标注“改写自”。

怎样用这份讲义自学

如果你是第一次系统学习 Laplace 方程，不建议一上来就背 Green 函数或 Poisson 核。更好的顺序是：

模型 $\rightarrow$ 调和函数的性质 $\rightarrow$ 基本解和表示公式 $\rightarrow$ 具体区域计算 $\rightarrow$ 弱解和能量法。

每一步对应一个核心问题：

1. **模型**：为什么稳态问题会出现 $\Delta u = 0$ 或 $-\Delta u = f$ ？
2. **性质**：如果一个函数调和，它在内部能不能乱长？最大值在哪里？是否光滑？
3. **表示**：能不能把解写成“源项贡献 + 边界贡献”的叠加？
4. **计算**：圆盘、矩形、球壳这些标准区域怎么显式算？
5. **弱解**：如果解不够光滑，怎样仍然谈论方程和边界条件？

最低预备知识

阅读本讲义前最好熟悉以下内容：多元函数偏导数、梯度和散度；二重积分和三重积分；Gauss 公式或散度定理；一元常微分方程；Fourier 正弦、余弦级数的基本

展开。Sobolev 空间只需要先知道“函数和一阶弱导数平方可积”这个直观含义即可。

复习时的三张卡片

性质卡： 平均值公式、极值原理、比较原理、Harnack、Liouville、正则性。

公式卡： 基本解、Newton 势、Green 恒等式、Green 表示公式、Poisson 核。

计算卡： 径向化、圆盘 Fourier 模式 r^n 、矩形分离变量、Neumann 兼容条件、弱形式。

1 Laplace 方程和 Poisson 方程的来源

1.1 基本符号

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，边界记为 $\partial\Omega$ 。未知函数为

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

若 u 二阶连续可微，定义 Laplace 算子

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

梯度记为 $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ 。若 $\partial\Omega$ 足够光滑， ν 表示单位外法向量，法向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = Du \cdot \nu.$$

1.2 稳态热传导

令 $u(x)$ 表示温度， $q(x)$ 表示热流密度。Fourier 定律写作

$$q = -kDu, \quad k > 0.$$

负号表示热量从高温处流向低温处。若没有内部热源，稳态意味着任意体积元中没有热量积累，于是

$$\operatorname{div} q = 0.$$

当 k 为常数时，代入 Fourier 定律得

$$-k\Delta u = 0, \quad \text{即} \quad \Delta u = 0.$$

这就是 Laplace 方程。若存在体热源 $F(x)$ ，守恒律可写作 $\operatorname{div} q = F$ ，从而

$$-\Delta u = f, \quad f = \frac{F}{k}.$$

这就是 Poisson 方程。这里 f 表示单位导热系数下的热源强度。

1.3 静电势与稳态扩散

在静电学中，电势 u 与电场 E 的关系为

$$E = -Du.$$

Gauss 定律给出

$$\operatorname{div} E = \rho,$$

其中 ρ 是电荷密度。于是

$$-\Delta u = \rho.$$

若没有电荷，即 $\rho = 0$ ，则电势满足 Laplace 方程。

在稳态扩散中，令 u 表示浓度，通量为 $J = -D_0 Du$ 。无源稳态给出 $\operatorname{div} J = 0$ ，所以 $\Delta u = 0$ ；有源稳态给出 Poisson 型方程。

本节核心

Laplace 方程对应“区域内部没有源”的稳态平衡；Poisson 方程对应“区域内部有源项”的稳态平衡。边界条件描述外界怎样控制系统。

1.4 从守恒律到方程：一步一步看

许多教材会很快写出 $\operatorname{div} q = 0$ ，但自学时最容易卡在这里。下面把这一步展开。取区域内部任意一个小控制体 $V \in \Omega$ 。若 q 是通量密度， $q \cdot \nu$ 表示单位时间穿过边界 ∂V 、沿外法向流出的量。于是

$$\text{单位时间流出 } V \text{ 的总量} = \int_{\partial V} q \cdot \nu \, dS.$$

稳态且无内部源时，控制体内部既不积累也不产生该物理量，所以净流出量应为 0：

$$\int_{\partial V} q \cdot \nu \, dS = 0 \quad (\forall V \in \Omega).$$

由散度定理，

$$\int_V \operatorname{div} q \, dx = 0 \quad (\forall V \in \Omega).$$

若 q 足够连续，则只能有

$$\operatorname{div} q = 0 \quad \text{于 } \Omega.$$

再把具体物理定律代入，例如 $q = -kDu$ ，便得到

$$\operatorname{div}(-kDu) = 0.$$

当 k 为常数时，这就是 $\Delta u = 0$ 。若 $k = k(x)$ 随位置变化，则方程变为

$$-\operatorname{div}(k(x)Du) = 0,$$

这是更一般的二阶椭圆方程。Evans 后续椭圆方程理论正是从这个形式推广出去的。

符号里的物理量

u 是势函数或密度； Du 指向增长最快方向； $-Du$ 常表示从高值流向低值的流动方向； $\Delta u = \operatorname{div}(Du)$ 衡量梯度场在一点附近的净发散。调和方程 $\Delta u = 0$ 的直观含义是：每个小邻域内流入和流出精确平衡。

例题 1.1: 由热源推出 Poisson 方程

设一块均匀材料占据区域 Ω ，温度为 $u(x)$ ，导热系数为 $k > 0$ ，单位体积单位时间产生的热量为 $F(x)$ 。写出稳态方程。

解. 热流密度为 $q = -kDu$ 。对任意 $V \Subset \Omega$ ，稳态时“流出量 = 内部产生量”，即

$$\int_{\partial V} q \cdot \nu \, dS = \int_V F \, dx.$$

用散度定理得到

$$\int_V \operatorname{div} q \, dx = \int_V F \, dx.$$

因为 V 任意，所以 $\operatorname{div} q = F$ 。代入 $q = -kDu$ ：

$$-k\Delta u = F, \quad \text{即} \quad -\Delta u = \frac{F}{k}.$$

□

1.5 Dirichlet、Neumann、Robin 边值问题

定义 1.1: 三类边界条件

设 Ω 为有界区域。

1. Dirichlet 条件：给定 u 在边界上的值，例如

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

2. Neumann 条件：给定法向导数，例如

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = h, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

3. Robin 条件：给定 u 与法向导数的线性组合，例如

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

什么时候用，怎么用

Dirichlet 用于边界温度、电势已知；Neumann 用于边界热流、电通量已知；Robin 用于边界与外界有交换，如 Newton 冷却律。做题时先判断边界条件类型，再选工具：Dirichlet 常配极值原理和 Poisson 公式，Neumann 必先检查兼容条件，Robin 常进入分离变量或能量法。

1.6 适定性的三个问题

边值问题不是只要写出方程就结束。一个完整的数学问题至少要问三件事：

1. **存在性**：给定 f, g 后，是否真的有解？
2. **唯一性**：如果有解，是否只有一个？
3. **稳定性**：边界数据或源项轻微改变，解是否只轻微改变？

Dirichlet 问题的唯一性通常由极值原理给出；存在性可以由 Poisson 公式、Green 函数、Perron 方法或弱解理论给出。Neumann 问题则必须先满足兼容条件，而且即使有解也只差一个常数。

本章自测

以下问题都来自三本书共同反复出现的模型思想。试在不看后文的情况下回答：

1. 为什么 $-\Delta u = f$ 中常写负号？
2. 若边界温度固定，应配哪种边界条件？若边界热流固定呢？
3. 为什么 Neumann 问题不能任意给定源项和边界通量？
4. 若 $k = k(x)$ 非常数，稳态热方程为什么不是简单的 $-k\Delta u = f$ ？

2 调和函数的基本性质

2.1 调和函数定义与例子

定义 2.1: 调和函数

若 $u \in C^2(\Omega)$ 且

$$\Delta u = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中成立,}$$

则称 u 在 Ω 中为调和函数。

例题 2.1: 判断函数是否调和

判断

$$u_1(x, y) = x^2 - y^2, \quad u_2(x, y) = x^2 + y^2, \quad u_3(x) = \frac{1}{|x|} \quad (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$$

是否调和。此题型改写自 Evans 与 Strauss 中关于调和函数定义和径向解的基础练习。

解. $\Delta u_1 = 2 - 2 = 0$, 故 u_1 调和; $\Delta u_2 = 2 + 2 = 4$, 故 u_2 不调和。对 u_3 , 使用三维径向公式

$$\Delta v(r) = v''(r) + \frac{2}{r}v'(r).$$

令 $v(r) = r^{-1}$, 则 $v' = -r^{-2}$, $v'' = 2r^{-3}$, 所以

$$\Delta(r^{-1}) = 2r^{-3} + \frac{2}{r}(-r^{-2}) = 0 \quad (r > 0).$$

因此 u_3 在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 中调和, 但不能说它在原点调和。□

题型模板: 判断函数是否调和

先看定义域, 再算 Δu 。含 $|x|$ 的函数优先用径向公式

$$\Delta v(r) = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r).$$

常见陷阱是忽略奇点: r^{2-n} 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 中调和, 但在 0 附近有奇性。

为什么调和函数很特殊

一般的二阶方程 $\Delta u = f$ 允许内部源项改变函数形状; 调和函数满足 $\Delta u = 0$, 这相当于每一点都处在局部平衡中。它的一个重要后果是: 内部值不是自由的, 而是由周围值平

均决定。换句话说，调和函数没有“内部孤立峰值”，也没有“内部孤立谷值”。后面的平均值公式和极值原理都是这个思想的精确版本。

例题 2.2: 非调和函数为什么会有内部峰

函数 $u(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ 在单位圆盘内有内部最大值 $u(0, 0) = 1$ ，但它不是调和函数。验证这一点，并说明它为什么不违反极值原理。

解. 直接计算

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = -2 - 2 = -4 \neq 0.$$

因此 u 不是调和函数，极值原理不适用。事实上， $\Delta u < 0$ 表明它是严格超调和函数，内部可以出现向下弯出的峰。□

2.2 平均值公式

定理 2.1: 球面平均值公式

设 $u \in C^2(\Omega)$ 且 $\Delta u = 0$ 。若 $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$ ，则

$$u(x) = \oint_{\partial B(x, r)} u(y) \, dS(y).$$

证明. 只证明 $x = 0$ 。令

$$\phi(r) = \oint_{\partial B(0, r)} u(y) \, dS(y) = \oint_{\partial B(0, 1)} u(rz) \, dS(z).$$

对 r 求导并换回 $\partial B(0, r)$:

$$\phi'(r) = \frac{1}{|\partial B(0, r)|} \int_{\partial B(0, r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS = \frac{1}{|\partial B(0, r)|} \int_{B(0, r)} \Delta u \, dy = 0.$$

所以 $\phi(r)$ 为常数。令 $r \rightarrow 0^+$ ，由连续性得 $\phi(r) \rightarrow u(0)$ 。□

定理 2.2: 球平均值公式

在定理 2.1 的条件下，还有

$$u(x) = \int_{B(x, r)} u(y) \, dy.$$

证明. 对球面平均值公式关于半径从 0 到 r 积分:

$$\int_{B(x, r)} u(y) \, dy = \int_0^r \int_{\partial B(x, \rho)} u(y) \, dS(y) \, d\rho = u(x) \int_0^r |\partial B(x, \rho)| \, d\rho = u(x) |B(x, r)|.$$

□

什么时候用，怎么用

当题目给出球面或圆周上的平均、积分、对称边界值时，用平均值公式直接求中心值。证明极值原理、Liouville 定理和 Harnack 不等式时，平均值公式是根部工具。

平均值公式的两个读法

平均值公式有两个读法。第一是**计算读法**：如果知道一个球面上的值，就可以求球心值。第二是**结构读法**：调和函数在任一点的值不能高于周围平均，也不能低于周围平均；如果它在中心已经达到周围的最大值，平均还等于最大值，就迫使周围全部等于最大值。

特别注意，平均值公式只说球心值等于以该点为中心的球面平均，并不说任意内部点都等于整个边界平均。若要求圆盘内任意点的值，通常需要 Poisson 公式。

例题 2.3: 平均值公式求点值

设 u 在 $\mathbb{R}^2$ 中调和，且在圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 上

$$u(x, y) = 3 + x^2 - y.$$

求 $u(0, 0)$ 。此题改写自 Strauss 第 6 章关于圆周平均与调和函数的基础题型。

解. 由平均值公式，

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (3 + 4 \cos^2 \theta - 2 \sin \theta) d\theta = 3 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

□

例题 2.4: 平均值公式的反向使用

设 u 在包含闭圆盘 $\overline{B(0, 1)}$ 的区域内调和，且 $u(0) = 0$ 。若 $u \geq 0$ 在 $\partial B(0, 1)$ 上成立，证明 $u = 0$ 在 $\partial B(0, 1)$ 上几乎处处成立。此题改写自 Evans 平均值性质与非负性结合的常见推论。

解. 由平均值公式，

$$0 = u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\cos \theta, \sin \theta) d\theta.$$

被积函数在圆周上非负，积分为零，因此它只能处处为零；若只假设可积意义下非负，则得到几乎处处为零。

□

2.3 极值原理、比较原理与唯一性

定理 2.3: 强极值原理

设 Ω 有界连通, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 且 $\Delta u = 0$ 。

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

若 u 在 Ω 内部某点达到最大值或最小值, 则 u 为常数。

证明. 弱结论可由扰动 $u_\varepsilon = u + \varepsilon |x|^2$ 推出。强结论由平均值公式推出: 若 $u(x_0) = M = \max_{\Omega} u$, 则小球面平均值等于 M , 而球面上每点不超过 M , 故小球面上处处等于 M 。这个性质沿连通区域传播, 得到 $u \equiv M$ 。□

什么时候用, 怎么用

用于证明内部不能产生新的最大温度/电势; 用于唯一性; 用于比较两个解的大小。
做唯一性时令 $w = u - v$, 化成边界为零的调和函数。

极值原理的证明细节: 为什么要扰动

初学者常问: 在内部最大点, 二阶导数不是应该满足 $u_{x_i x_i} \leq 0$ 吗? 那 $\Delta u = 0$ 是否立刻矛盾? 不一定。因为可能每个二阶导数都等于 0, 例如高阶平坦点。为了排除这种情况, 常用扰动

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon |x|^2.$$

此时

$$\Delta u_\varepsilon = 2n\varepsilon > 0.$$

若 u_ε 在内部取得最大值, 则 Hessian 半负定, 特别有 $\Delta u_\varepsilon \leq 0$, 矛盾。因此 u_ε 的最大值只能在边界。令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 得到 u 的最大值也由边界控制。

强极值原理再进一步: 若内部达到最大值, 则平均值公式迫使附近球面全等于最大值, 再由连通性把常数性传播出去。

定理 2.4: 比较原理

设 Ω 有界, $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 。若

$$-\Delta u \leq -\Delta v \quad \text{于} \Omega, \quad u \leq v \quad \text{于} \partial\Omega,$$

则 $u \leq v$ 于 $\overline{\Omega}$ 。

证明. 令 $w = u - v$, 则 $-\Delta w \leq 0$, 即 $\Delta w \geq 0$ 。对 $w_\varepsilon = w + \varepsilon |x|^2$ 有 $\Delta w_\varepsilon > 0$, 它不能在内部取得正最大值。于是最大值在边界上, 令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 即得 $w \leq 0$ 。□

什么时候用，怎么用

当两个 Poisson 方程右端不同、边界数据也有大小关系时，用比较原理。常见步骤是：构造上下解 $\underline{u}, \bar{u}$ ，验证方程不等式和边界不等式，再推出 $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ 。

定理 2.5: Dirichlet 问题唯一性

有界区域上 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = g, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

至多有一个经典解 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 。

证明. 若 u, v 都是解，令 $w = u - v$ ，则 $\Delta w = 0$ ，且 $w = 0$ 于 $\partial\Omega$ 。极值原理给出 $\max w = \min w = 0$ ，所以 $w \equiv 0$ 。 $\square$

例题 2.5: 用极值原理证明唯一性

证明: 若 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 满足

$$-\Delta u = x_1^2, \quad -\Delta v = x_1^2, \quad u = v = g \quad \text{于} \partial\Omega,$$

则 $u = v$ 。此题改写自 Evans §2.2 中 Poisson 方程唯一性的标准论证。

解. 令 $w = u - v$ 。则

$$\Delta w = 0, \quad w|_{\partial\Omega} = 0.$$

由极值原理， w 的最大值和最小值都在边界上取得，且边界上 $w = 0$ ，故 $w \equiv 0$ 。 $\square$

例题 2.6: 比较原理估计解

设 Ω 有界， $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 满足

$$-\Delta u \leq 1, \quad u \leq 0 \quad \text{于} \partial\Omega.$$

若存在 $\phi \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 满足

$$-\Delta \phi = 1, \quad \phi = 0 \quad \text{于} \partial\Omega,$$

证明 $u \leq \phi$ 。此题型改写自 Evans 比较原理。

解. 令 $w = u - \phi$ 。则

$$-\Delta w = -\Delta u + \Delta \phi \leq 1 - 1 = 0,$$

即 $\Delta w \geq 0$ 。边界上 $w = u - \phi \leq 0$ 。由比较原理或对 w 的最大值原理，得到 $w \leq 0$ ，即 $u \leq \phi$ 。 $\square$

2.4 Harnack 不等式、Liouville 定理与正则性

定理 2.6: Harnack 不等式

设 $u \geq 0$ 且 u 在 Ω 中调和。若 $V \Subset \Omega$ 连通，则存在常数 $C = C(V, \Omega) > 0$ ，使得

$$\sup_V u \leq C \inf_V u.$$

证明. 局部地对球使用 Poisson 核或平均值公式，可比较同一小球内两个点的函数值。再用有限多个相互重叠的小球连接 V 中任意两点，常数逐步相乘，得到全局比较。 $\square$

什么时候用，怎么用

Harnack 不等式只对非负调和函数有效。它常用于证明正调和函数不能在内部突然从很小变得很大，也用于紧性、极限过程和 Liouville 型结论。

定理 2.7: Liouville 定理

若 $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 调和且有界，则 u 为常数。

证明. Evans 的证明使用导数估计。对任意 x_0 和 $R > 0$ ，

$$|Du(x_0)| \leq \frac{C}{R} \sup_{B(x_0, R)} |u|.$$

若 u 有界，令 $R \rightarrow \infty$ 得 $Du(x_0) = 0$ 。因 x_0 任意， $Du \equiv 0$ ，所以 u 为常数。 $\square$

什么时候用，怎么用

题目给出“全空间调和 + 有界”时几乎立即想到 Liouville。若不是有界，而是增长条件，例如 $|u(x)| \leq C(1 + |x|^\alpha)$ ，可结合导数估计推出 u 是低阶多项式。

定理 2.8: 调和函数的光滑性与解析性

若 u 在 Ω 中调和，则 $u \in C^\infty(\Omega)$ 。进一步， u 在 Ω 中为实解析函数。

证明. 光滑性可由平均值公式与磨光核得到：满足平均值性质的连续函数等于其局部球平均，因此等于光滑函数。解析性来自各阶导数估计

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C^{|\alpha|+1} \alpha!}{r^{n+|\alpha|}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))},$$

这保证 Taylor 级数在足够小球内收敛到 u 。 $\square$

什么时候用，怎么用

当题目问“调和函数能否有尖点、折线、孤立零点堆积”等现象时，用正则性和解析性。经典结论是：调和函数一旦在开集上由某种平均/弱意义确定，内部会自动非常光滑。

2.5 本章逻辑图

本章定理之间的依赖关系可按如下方式理解：

$$\text{Green 公式/散度定理} \implies \text{平均值公式} \implies \begin{cases} \text{极值原理与唯一性,} \\ \text{导数估计与 Liouville,} \\ \text{Harnack 不等式,} \\ \text{光滑性与解析性.} \end{cases}$$

自学时不必一开始记住所有证明，但必须会使用它们。最低要求是：

1. 会用平均值公式求球心值；
2. 会用极值原理证明唯一性；
3. 会用比较原理给出上下界；
4. 会识别 Liouville 型题目；
5. 知道调和函数在内部自动光滑，不会出现普通弱解可能有的粗糙现象。

本章自测

1. 若 u 在单位圆盘调和， $u(0) = 10$ ，边界上 $u \leq 9$ 是否可能？
2. 若 u 在 $\mathbb{R}^2$ 调和且 $0 < u < 1$ ，能否不是常数？
3. 若两个 Poisson 方程解的右端不同，为什么不能直接用唯一性，而要用比较原理？
4. 证明调和函数的任意一阶偏导数仍调和。

3 基本解与 Green 函数

3.1 Laplace 方程的基本解

基本解是带一个点源的 Poisson 方程解。记 $\omega_n = |B(0, 1)|$ 。Laplace 算子的基本解取为

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \\ -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2. \end{cases}$$

它满足

$$-\Delta\Phi = \delta_0$$

的分布意义，其中 δ_0 是原点处的 Dirac 点质量。

$n = 2$ 和 $n \geq 3$ 的区别

径向 Laplace 方程给出

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0.$$

积分得 $r^{n-1}v'(r) = C$ 。若 $n \geq 3$ ，则 $v(r) = Ar^{2-n} + B$ ；若 $n = 2$ ，则 $v(r) = A \log r + B$ 。这就是基本解形式不同的根源。

基本解常数为什么这样选

只知道 Φ 在 $x \neq 0$ 时调和，还不足以决定前面的常数。常数由

$$-\Delta\Phi = \delta_0$$

决定。直观说， Φ 表示原点放一个单位点源产生的势。对小球 $B(0, r)$ 积分：

$$1 = \int_{B(0,r)} \delta_0 dx = \int_{B(0,r)} -\Delta\Phi dx = - \int_{\partial B(0,r)} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} dS.$$

以 $n \geq 3$ 为例，令 $\Phi(x) = Cr^{2-n}$ ，则

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = C(2-n)r^{1-n}.$$

于是

$$- \int_{\partial B(0,r)} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} dS = -C(2-n)r^{1-n} \cdot n\omega_n r^{n-1} = C(n-2)n\omega_n.$$

令它等于 1，便得到

$$C = \frac{1}{n(n-2)\omega_n}.$$

$n = 2$ 时同理可由 $\Phi(x) = C \log r$ 推出 $C = -1/(2\pi)$ 。

例题 3.1: 径向基本解计算

证明 $u(x) = |x|^{2-n}$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 中调和, 其中 $n \geq 3$ 。此题改写自 Evans §2.2 关于基本解的推导。

解. 令 $r = |x|$, $v(r) = r^{2-n}$ 。则

$$v'(r) = (2-n)r^{1-n}, \quad v''(r) = (2-n)(1-n)r^{-n}.$$

因此

$$\Delta v = v'' + \frac{n-1}{r}v' = (2-n)(1-n)r^{-n} + (n-1)(2-n)r^{-n} = 0.$$

□

3.2 Newton 势

若 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, 定义

$$u(x) = (\Phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) \, dy.$$

则

$$-\Delta u = f \quad \text{于 } \mathbb{R}^n.$$

这个 u 称为 f 的 Newton 势。

什么时候用, 怎么用

在全空间 Poisson 方程中, 若 f 紧支撑或衰减足够快, 可直接写 Newton 势。注意不能天真地把二阶导数穿过奇异积分; 严格证明需要处理 $y = x$ 附近的奇性。

Newton 势的叠加思想

如果原点的单位点源产生势 $\Phi(x)$, 那么位于 y 的单位点源产生势 $\Phi(x-y)$ 。若源项不是一个点, 而是连续分布 $f(y)$, 则把每个点源贡献叠加, 形式上得到

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) \, dy.$$

这就是 Newton 势。它体现了线性方程最重要的思想: 复杂源项的解可以由简单点源的解叠加而成。

例题 3.2: 全空间 Poisson 方程的表示

设 $n \geq 3$, $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ 。写出 $-\Delta u = f$ 在全空间中的一个解, 并说明为什么还可以加常数。此题改写自 Evans §2.2 Theorem 1 与 Liouville 表示公式。

解. 取

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy.$$

则 $-\Delta u = f$ 。若 C 是常数, 则 $-\Delta(u+C) = f$, 所以仍是解。若再要求 $u(x) \rightarrow 0$ 当 $|x| \rightarrow \infty$, 通常可排除这个常数自由度。□

3.3 Green 第一、第二恒等式

定理 3.1: Green 恒等式

设 Ω 边界光滑, $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ 。则

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS.$$

并且

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \, dS.$$

证明. 第一式来自散度定理:

$$\operatorname{div}(uDv) = Du \cdot Dv + u \Delta v.$$

第二式由第一式分别作用于 (u, v) 和 (v, u) 后相减得到。□

什么时候用, 怎么用

Green 第一恒等式用于能量估计和弱形式; Green 第二恒等式用于表示公式、Green 函数对称性和边值问题。考试中只要看到 $\int_{\Omega} u \Delta v$ 、 $\int_{\Omega} Du \cdot Dv$ 、法向导数边界项, 就应想到 Green 恒等式。

例题 3.3: Green 第一恒等式证明唯一性

设 $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 满足

$$\Delta w = 0, \quad w = 0 \quad \text{于} \partial\Omega.$$

用能量法证明 $w \equiv 0$ 。此题型改写自 Evans §2.2 能量方法和 Strauss §6.1 Exercise 10。

解. 在 Green 第一恒等式中取 $u = v = w$:

$$\int_{\Omega} |Dw|^2 \, dx = - \int_{\Omega} w \Delta w \, dx + \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \nu} \, dS.$$

由于 $\Delta w = 0$ 且边界上 $w = 0$, 右端为 0。故

$$\int_{\Omega} |Dw|^2 \, dx = 0.$$

于是 $Dw = 0$, 连通区域中 w 为常数; 又边界值为 0, 故 $w \equiv 0$. □

3.4 Green 函数与表示公式

设 Ω 有界, Dirichlet Green 函数 $G(x, y)$ 是满足

$$-\Delta_y G(x, y) = \delta_x(y), \quad G(x, y) = 0 \quad (y \in \partial\Omega)$$

的函数。若

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & y \in \Omega, \\ u = g, & y \in \partial\Omega, \end{cases}$$

则形式上有表示公式

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) dS(y).$$

什么时候用, 怎么用

Green 函数适合“区域固定、边界条件固定、源项或边界数据变化”的问题。先找 G , 再套表示公式。一般区域的 G 难求; 半空间、球、圆盘可以显式写出。

表示公式的推导轮廓

固定 $x \in \Omega$, 把 $G(x, y)$ 看成 y 的函数。由于

$$-\Delta_y G(x, y) = \delta_x(y),$$

形式上有

$$u(x) = \int_{\Omega} u(y) \delta_x(y) dy = \int_{\Omega} u(y) (-\Delta_y G(x, y)) dy.$$

接下来对 u 和 G 使用 Green 第二恒等式, 把 Laplace 算子从 G 转到 u 上, 同时产生边界项。若 $G = 0$ 在边界上, 就得到

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) (-\Delta u(y)) dy - \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) dS(y).$$

若 $-\Delta u = f$ 且 $u = g$ 于边界, 就得到前面的表示公式。

别把 Green 函数和基本解混淆

基本解 $\Phi(x - y)$ 只处理全空间点源; Green 函数 $G(x, y)$ 还要满足边界条件。通常

$$G = \text{基本解} - \text{修正项},$$

其中修正项负责把边界值调成零。

例题 3.4: Green 函数表示的结构

设 G 是 Ω 的 Dirichlet Green 函数, u 解

$$-\Delta u = f, \quad u = 0 \quad \text{于 } \partial\Omega.$$

写出 u 的表示, 并说明边界项为什么消失。此题改写自 Evans §2.2 Green 函数表示公式。

解. 由于边界值 $g = 0$, 表示公式中的边界项为零, 故

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy.$$

这说明零 Dirichlet 问题中, 解完全由区域内部源项通过 Green 函数叠加而来。□

3.5 本章自学检查

必须能回答的问题

1. 为什么基本解在 $x \neq 0$ 处调和, 却仍能解 $-\Delta\Phi = \delta_0$?
2. 为什么二维基本解是 $\log r$, 三维及以上是 r^{2-n} ?
3. Green 第一恒等式和第二恒等式分别常用在哪里?
4. 为什么 Dirichlet Green 函数的边界值要取 0?
5. 在零边界 Poisson 问题中, 为什么表示公式只剩区域积分?

4 典型区域上的显式解

4.1 单位圆盘上的 Poisson 公式

设单位圆盘

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq r < 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

若

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, \\ u(1, \theta) = g(\theta), \end{cases}$$

则

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \varphi) g(\varphi) d\varphi,$$

其中 Poisson 核为

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}.$$

若

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

则

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

什么时候用，怎么用

圆盘 Dirichlet 问题优先看边界数据是否已经是 Fourier 形式。若是三角多项式，直接把第 k 阶项乘 r^k ；若是一般函数，先求 Fourier 系数或使用 Poisson 积分。

Poisson 公式从分离变量来

在极坐标中，

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}.$$

令 $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ ，得到

$$\frac{r^2 R'' + r R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda.$$

由于 $\Theta(\theta)$ 必须 2π 周期，特征值为 $\lambda = n^2$ ，对应

$$\Theta_n(\theta) = \cos n\theta, \quad \sin n\theta.$$

径向方程为

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0,$$

其有界解为 $R(r) = r^n$ 。 $n = 0$ 时有常数解和 $\log r$ ，为了在原点有界，只保留常数。因此圆盘内调和函数自然写成

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

这就是 Poisson 公式背后的分离变量解释。

例题 4.1: 圆盘 Dirichlet 问题

求单位圆盘内满足

$$\Delta u = 0, \quad u(1, \theta) = 2 + \cos 3\theta - 4 \sin 2\theta$$

的调和函数。此题改写自 Strauss §6.3 Poisson 公式的标准例题。

解. 边界数据已经是 Fourier 形式，因此

$$u(r, \theta) = 2 + r^3 \cos 3\theta - 4r^2 \sin 2\theta.$$

□

例题 4.2: 圆盘中非常数边界数据

求单位圆盘中满足

$$\Delta u = 0, \quad u(1, \theta) = \theta(\pi - \theta) \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

且边界函数按 2π 周期延拓的解的 Fourier 形式。此题按 Strauss 第 5-6 章 Fourier 级数进入圆盘问题的方式改写。

解. 设

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \theta(\pi - \theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \theta(\pi - \theta) \sin n\theta \, d\theta.$$

本题重点不是把积分算到最后，而是知道圆盘内解为

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

若考试给出简单三角多项式，直接写答案；若给出一般函数，先写 Fourier 系数再乘 r^n 。

□

4.2 圆盘 Poisson 方程的径向例题

例题 4.3: Poisson 方程径向解

求圆盘 $r < a$ 中

$$u_{xx} + u_{yy} = 1, \quad u|_{r=a} = 0$$

的径向解。此题改写自 Strauss §6.1 Exercise 5。

解. 设 $u = u(r)$ 。二维极坐标下

$$\Delta u = u'' + \frac{1}{r}u' = 1.$$

即

$$(ru')' = r.$$

积分得

$$ru' = \frac{r^2}{2} + C.$$

为了 u 在 $r = 0$ 有界, 必须 $C = 0$ 。再积分:

$$u(r) = \frac{r^2}{4} + C_2.$$

由 $u(a) = 0$ 得 $C_2 = -a^2/4$ 。故

$$u(r) = \frac{r^2 - a^2}{4}.$$

□

例题 4.4: 球壳中的径向调和函数

在三维球壳 $a < r < b$ 中求调和函数 $u(r)$, 满足

$$u(a) = A, \quad u(b) = B.$$

此题改写自 Strauss §6.1 Exercise 4, 也是谷超豪体系中球对称稳态边值问题的典型例题。

解. 三维径向 Laplace 方程为

$$u'' + \frac{2}{r}u' = 0, \quad \text{即} \quad (r^2u')' = 0.$$

积分两次:

$$r^2u' = C_1, \quad u(r) = C_2 - \frac{C_1}{r}.$$

写成

$$u(r) = \alpha + \frac{\beta}{r}.$$

代入边界条件:

$$\alpha + \frac{\beta}{a} = A, \quad \alpha + \frac{\beta}{b} = B.$$

相减得

$$\beta \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = A - B, \quad \beta = \frac{ab(A - B)}{b - a}.$$

再由 $\alpha = A - \beta/a$ 得

$$\alpha = \frac{bB - aA}{b - a}.$$

所以

$$u(r) = \frac{bB - aA}{b - a} + \frac{ab(A - B)}{(b - a)r}.$$

□

4.3 矩形区域分离变量法

考虑矩形

$$R = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}.$$

典型问题是三边为零、一边给定:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b, \\ u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = 0, \\ u(x, b) = g(x). \end{cases}$$

令 $u = X(x)Y(y)$, 代入得

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda.$$

由 $X(0) = X(a) = 0$ 得

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2.$$

对应

$$Y_n(y) = \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

以满足 $u(x, 0) = 0$ 。于是

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

边界 $y = b$ 给出

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

若

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad g_n = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx,$$

则

$$A_n = \frac{g_n}{\sinh(n\pi b/a)}.$$

Fourier 级数如何进入

分离变量先给出一组满足齐次边界条件的基函数；非齐次边界数据 g 必须展开到这组基函数上。这里是正弦级数，因为左右边界为零，特征函数是 $\sin(n\pi x/a)$ 。

矩形题的完整操作流程

矩形 Laplace 题最怕“直接背公式”。真正稳妥的流程是：

1. **先处理边界**：如果四条边都有非齐次数据，利用线性性拆成四个问题，每个问题只保留一条边非齐次。
2. **设分离解**：令 $u = X(x)Y(y)$ ，代入 $\Delta u = 0$ 。
3. **选特征方向**：哪个方向有两个齐次边界条件，就优先把该方向做 Sturm–Liouville 特征值问题。
4. **写特征函数**：Dirichlet–Dirichlet 给正弦；Neumann–Neumann 给余弦；混合条件给半整数频率或特殊组合。
5. **展开非齐次边界**：把给定函数展开到特征函数系中。
6. **代回并检查**：检查 PDE、齐次边界、非齐次边界是否都满足。

例题 4.5: 三边为零、一边给定

求矩形 $0 < x < \pi$, $0 < y < b$ 中

$$\Delta u = 0, \quad u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = \sin x + 3 \sin 2x.$$

此题按 Strauss §6.2 矩形分离变量例题和谷超豪《数学物理方程》第一边值问题体例改写。

解. 由上面的公式， $a = \pi$ ，边界数据只有 $n = 1, 2$ 两项：

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 3.$$

因此

$$u(x, y) = \frac{\sinh y}{\sinh b} \sin x + 3 \frac{\sinh 2y}{\sinh 2b} \sin 2x.$$

□

例题 4.6: 边界数据不是单个正弦项

求 $0 < x < \pi$, $0 < y < 1$ 中的调和函数, 满足

$$u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = x(\pi - x).$$

此题按 Strauss §6.2 与 Fourier 正弦级数练习改写。

解. 设

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(ny) \sin nx.$$

由 $y = 1$ 的边界条件,

$$x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh n \sin nx.$$

因此

$$A_n = \frac{b_n}{\sinh n}, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin nx \, dx.$$

计算积分。分部积分两次可得

$$b_n = \frac{4}{\pi n^3} (1 - (-1)^n).$$

所以偶数项为零, 奇数项为

$$b_{2m+1} = \frac{8}{\pi(2m+1)^3}.$$

最终

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2m+1)^3 \sinh(2m+1)} \sinh((2m+1)y) \sin((2m+1)x).$$

□

例题 4.7: 正方形上的混合边界

在正方形 $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$ 中求调和函数, 满足

$$u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = \cos^2 y.$$

此题改写自 Strauss §6.2 Exercise 3。

解. 因为 y 方向是 Neumann 齐次条件, 所以选

$$Y_n(y) = \cos ny, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

边界数据

$$\cos^2 y = \frac{1}{2}(1 + \cos 2y).$$

对 $n = 0$, $X_0'' = 0$, 且 $X_0(0) = 0$, $X_0(\pi) = 1/2$, 故 $X_0 = x/(2\pi)$ 。对 $n = 2$,

$$X_2'' - 4X_2 = 0, \quad X_2(0) = 0, \quad X_2(\pi) = \frac{1}{2},$$

故

$$X_2(x) = \frac{\sinh 2x}{2 \sinh 2\pi}.$$

因此

$$u(x, y) = \frac{x}{2\pi} + \frac{\sinh 2x}{2 \sinh 2\pi} \cos 2y.$$

□

4.4 本章自学检查

必须能算的问题

1. 单位圆盘边界值为 $1 + 2 \cos \theta + 3 \sin 4\theta$, 写出内部解。
2. 在圆环 $a < r < b$ 中求二维径向调和函数, 边界值分别为 A, B 。提示: 二维径向解含 $\log r$ 。
3. 矩形三边为零、一边给 $g(x)$ 时, 为什么 x 方向出现正弦级数?
4. 正方形中两条边为 Neumann 齐次时, 为什么出现余弦级数?
5. 如果四条边都非齐次, 为什么可以拆成四个问题相加?

5 Neumann 问题

5.1 兼容条件

考虑

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = h, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

若存在光滑解, 则由散度定理

$$\int_{\Omega} f \, dx = \int_{\Omega} (-\Delta u) \, dx = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS = - \int_{\partial\Omega} h \, dS.$$

因此必须有

$$\int_{\Omega} f \, dx + \int_{\partial\Omega} h \, dS = 0.$$

什么时候用, 怎么用

看到 Neumann 问题, 第一步就是积分检查兼容条件。若条件不满足, 直接说明无解; 若满足, 还要记住解不能唯一确定, 只能确定到相差一个常数。

兼容条件的物理解释

Neumann 条件给的是边界通量。若区域内部产生总量为 $\int_{\Omega} f \, dx$, 边界又规定净流出量为 $\int_{\partial\Omega} h \, dS$, 稳态时二者必须平衡。若内部一直产生热量, 但边界又不允许热量流出, 系统就不可能稳态。

符号上要小心: 本讲义采用

$$-\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = h.$$

因此兼容条件是

$$\int_{\Omega} f \, dx + \int_{\partial\Omega} h \, dS = 0.$$

如果教材写成 $\Delta u = f$, 符号会相应改变。考试时不要背符号, 要从散度定理重新推一遍。

5.2 为什么解只差一个常数

若 u, v 是同一 Neumann 问题的两个解, 令 $w = u - v$, 则

$$\Delta w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0.$$

由 Green 第一恒等式,

$$\int_{\Omega} |Dw|^2 dx = - \int_{\Omega} w \Delta w dx + \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \nu} dS = 0.$$

因此 $Dw = 0$, 在连通区域中 w 为常数。

例题 5.1: Neumann 兼容条件

判断如下问题是否可能有解:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u_y(x, 1) = g(x), \\ u_y(x, 0) = 0, \quad u_x(0, y) = u_x(1, y) = 0. \end{cases}$$

此题改写自 Strauss §6.2 Exercise 6 和 §6.1 Exercise 11 的兼容条件题型。

解. 这里 $\Delta u = 0$, 全边界法向导数通量总和必须为零。四边中只有 $y = 1$ 可能贡献:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \int_0^1 g(x) dx.$$

因此必要条件是

$$\int_0^1 g(x) dx = 0.$$

若该条件不满足, 则无解。若满足, 则解至多相差一个常数。□

例题 5.2: 一维 Neumann 问题看清常数自由度

求解

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad -u'(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta.$$

写出兼容条件, 并说明为什么解只差一个常数。此题按谷超豪体系中第二边值问题的适定性思想改写。

解. 对方程积分:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 -u''(x) dx = -u'(1) + u'(0).$$

由边界条件 $u'(1) = \beta$, $u'(0) = -\alpha$, 得

$$\int_0^1 f(x) dx = -\beta - \alpha.$$

即

$$\int_0^1 f(x) dx + \alpha + \beta = 0.$$

若 u 是解, 则 $u + C$ 也是解, 因为二阶导数和一阶边界导数都不变。要唯一, 常加归一化条件

$$\int_0^1 u(x) dx = 0.$$

□

5.3 与 Dirichlet 问题的区别

问题类型	Dirichlet	Neumann
边界信息	给定 u	给定 $\partial u / \partial \nu$
物理意义	温度/电势本身	热流/电通量
唯一性	通常唯一	只差常数
额外条件	一般无需积分兼容	必须满足通量兼容条件
常用工具	极值原理、Poisson 核、Green 函数	散度定理、能量法、零平均归一化

5.4 Neumann 问题的解题顺序

四步法

1. 写清外法向方向，尤其在矩形边界上：左边 $\nu = (-1, 0)$ ，右边 $\nu = (1, 0)$ ，下边 $\nu = (0, -1)$ ，上边 $\nu = (0, 1)$ 。
2. 用散度定理检查兼容条件。
3. 若要做唯一性，两个解相减后用能量法证明差为常数。
4. 若题目要求唯一解，加条件 $\int_{\Omega} u = 0$ 或指定某点值 $u(x_0) = 0$ 。

6 弱解和能量方法

6.1 Sobolev 空间背景

经典解要求 $u \in C^2$ ，但许多边值问题的自然解只有一阶弱导数平方可积。记

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D_i u \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n\},$$

范数为

$$\|u\|_{H^1}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |Du|^2 dx.$$

$H_0^1(\Omega)$ 表示边界迹为零的 H^1 函数空间，可理解为 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 H^1 范数下的闭包。

为什么要弱解

Poisson 方程的能量

$$\int_{\Omega} |Du|^2 dx$$

只要求一阶导数平方可积，并不天然要求二阶导数连续。物理上，有限能量解比经典解更自然；数学上，弱形式能用 Hilbert 空间方法证明存在唯一性。之后再用正则性理论，在条件足够好时把弱解升级为经典解。

6.2 Poisson 方程的弱形式

考虑零 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

取测试函数 $v \in C_c^\infty(\Omega)$ ，乘以 v 并分部积分：

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

于是定义弱解如下。

定义 6.1: 弱解

给定 $f \in L^2(\Omega)$ 。若 $u \in H_0^1(\Omega)$ 且对任意 $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

则称 u 是零 Dirichlet Poisson 问题的弱解。

怎么从强形式到弱形式

强形式 $-\Delta u = f$, 乘测试函数 v , 积分, 分部积分, 把二阶导数转移到一阶导数上。
零 Dirichlet 条件使边界项消失。最终得到

$$a(u, v) = F(v), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} Du \cdot Dv, \quad F(v) = \int_{\Omega} f v.$$

分部积分为什么边界项消失

若 u 是光滑函数, 乘以测试函数 v 后

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) v \, dx = \int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS.$$

在零 Dirichlet 弱形式中, 测试函数 $v \in H_0^1(\Omega)$, 其边界迹为 0, 所以边界项消失。注意这并不是因为 $\partial u / \partial \nu = 0$, 而是因为 $v = 0$ 于边界。

6.3 变分 formulation 与 Lax–Milgram

定义能量泛函

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Dv|^2 \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

其 Euler–Lagrange 方程正是弱形式:

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

定理 6.1: Lax–Milgram 给出存在唯一性

设 Ω 有界, $f \in L^2(\Omega)$ 。则存在唯一 $u \in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega)).$$

证明. 在 $H_0^1(\Omega)$ 上令

$$a(u, v) = \int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx, \quad F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

a 双线性且连续; 由 Poincaré 不等式, $a(v, v) = \|Dv\|_{L^2}^2$ 控制 $\|v\|_{H^1}^2$, 故强制。 F 连续。
Lax–Milgram 定理给出唯一弱解。□

Lax–Milgram 检查表

要用 Lax–Milgram, 不是只写定理名字, 而要检查三件事。

1. 连续性:

$$|a(u, v)| \leq \|Du\|_{L^2} \|Dv\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

2. 强制性: 对 $v \in H_0^1(\Omega)$, Poincare 不等式给出

$$\|v\|_{L^2} \leq C \|Dv\|_{L^2}.$$

因而

$$a(v, v) = \|Dv\|_{L^2}^2 \geq c \|v\|_{H^1}^2.$$

3. 右端连续:

$$|F(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}.$$

三项都成立, 才可推出唯一弱解。

什么时候用, 怎么用

当边界或右端不够光滑、经典解不存在或难以构造时, 用弱解。考试中常要求“写出弱形式”或“说明 Lax–Milgram 如何给出存在唯一性”, 重点是写清空间、双线性型、线性泛函、连续性与强制性。

6.4 弱解和经典解的关系

若弱解 u 足够光滑, 例如 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 则通过反向分部积分可知它满足经典方程。反过来, 经典解必然是弱解。更深的椭圆正则性理论说明: 在 f 与边界足够光滑时, 弱解会自动提高正则性。

例题 6.1: 写出弱形式

设 Ω 有界, 写出

$$-\Delta u = f, \quad u = 0 \text{ 于 } \partial\Omega$$

的弱形式, 并说明解空间。此题按 Evans 能量方法与谷超豪课程中的广义解引入方式整理。

解. 解空间取 $H_0^1(\Omega)$ 。弱形式为: 求 $u \in H_0^1(\Omega)$, 使对任意 $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

若 $f \in L^2(\Omega)$, 右端由 Cauchy–Schwarz 与 Poincare 不等式给出连续线性泛函。□

例题 6.2: 非零 Dirichlet 数据如何处理

写出

$$-\Delta u = f \quad \text{于 } \Omega, \quad u = g \quad \text{于 } \partial\Omega$$

的弱解处理思路。此题按 Evans 椭圆方程弱解框架和谷超豪课程中非齐次边界化齐次的做法整理。

解. 先取一个延拓函数 $G \in H^1(\Omega)$, 使其边界迹为 g 。令

$$u = w + G.$$

由于 $u = g$ 于边界, 要求 $w \in H_0^1(\Omega)$ 。代入弱形式:

$$\int_{\Omega} D(w + G) \cdot Dv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega)).$$

即求 $w \in H_0^1(\Omega)$ 使

$$\int_{\Omega} Dw \cdot Dv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Omega} DG \cdot Dv \, dx.$$

这又是零边界问题, 可用 Lax–Milgram 处理。 □

6.5 本章自学检查

必须能写的问题

1. 强形式 $-\Delta u = f$ 如何变成弱形式? 每一步用了什么?
2. 为什么零 Dirichlet 问题的自然空间是 $H_0^1(\Omega)$?
3. Lax–Milgram 中连续性、强制性、右端连续分别怎么验证?
4. 非零边界数据为什么要先做延拓?
5. 若弱解后来证明属于 C^2 , 为什么它就是经典解?

7 常见题型总结

7.1 题型一：判断函数是否调和

模板

确认定义域；计算二阶偏导和 Δu ；含 r 的函数用径向 Laplace 公式；检查奇点是否在定义域内。

7.2 题型二：用平均值公式求点值

模板

确认闭球包含在区域内；把中心值写成球面或球平均；用三角函数平均、对称性或积分计算。

7.3 题型三：用极值原理证明唯一性

模板

令 $w = u - v$ ；证明 $\Delta w = 0$ 且边界 $w = 0$ ；用极值原理得 $w \leq 0$ ；对 $-w$ 再用一次得 $w \geq 0$ 。

7.4 题型四：用比较原理估计解

模板

构造上解 $\bar{u}$ 和下解 $\underline{u}$ ；检查区域内的 Laplace 不等式和边界不等式；推出 $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ 。

7.5 题型五：圆盘 Dirichlet 问题

模板

把边界数据展开成 Fourier 级数。第 n 阶边界模式 $\cos n\theta, \sin n\theta$ 在圆盘内变成 $r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta$ 。一般边界数据用 Poisson 核积分。

7.6 题型六：矩形区域分离变量

模板

先把非齐次边界尽量化成一条边；设 $u = XY$ ；由齐次边界决定特征函数；把非齐次边界展开成对应 Fourier 级数；写出双曲正弦/余弦系数。

7.7 题型七：Green 函数表示

模板

确认边界条件是 Dirichlet 还是 Neumann；写 G 的定义；零边界时 $u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy$ ；非零边界时加上边界积分项。

7.8 题型八：Liouville 型题目

模板

全空间调和且有界，直接推出常数。若给增长条件，使用导数估计令半径趋于无穷，判断高阶导数是否为零。

7.9 题型九：Neumann 兼容条件

模板

对方程积分并用散度定理：

$$\int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} h = 0.$$

若不满足则无解；若满足，唯一性只能到相差常数，通常加归一化 $\int_{\Omega} u = 0$ 。

7.10 题型十：Poisson 方程弱形式

模板

选空间 $H_0^1(\Omega)$ ；乘测试函数；分部积分；写

$$a(u, v) = F(v).$$

然后用 Lax–Milgram：连续性、强制性、右端连续。

8 教材题型精选与详解

8.1 题 1: 径向调和函数

例题 8.1: 二维圆环径向 Dirichlet 问题

在圆环 $a < r < b$ 中求径向调和函数 $u(r)$, 满足

$$u(a) = A, \quad u(b) = B.$$

此题改写自 Strauss 第 6 章径向调和函数习题, 也是数学物理方程中圆环稳态温度的基本题。

解. 二维径向 Laplace 方程为

$$u'' + \frac{1}{r}u' = 0.$$

等价于

$$(ru')' = 0.$$

积分得

$$ru' = C_1, \quad u' = \frac{C_1}{r},$$

所以

$$u(r) = C_1 \log r + C_2.$$

代入边界条件:

$$C_1 \log a + C_2 = A, \quad C_1 \log b + C_2 = B.$$

相减得

$$C_1 = \frac{B - A}{\log b - \log a}.$$

因此

$$u(r) = A + \frac{B - A}{\log(b/a)} \log \frac{r}{a}.$$

□

易错点

二维径向调和函数含 $\log r$, 三维径向调和函数含 $1/r$ 。不要把两者混在一起。

8.2 题 2：平均值公式

例题 8.2: 由边界积分求中心值

设 u 在包含闭圆盘 $\overline{B(0,3)}$ 的区域中调和, 且圆周 $r = 3$ 上

$$u(3, \theta) = 5 + 2 \cos \theta + \sin 4\theta.$$

求 $u(0)$ 。此题改写自 Strauss 圆盘平均值与 Fourier 模式题型。

解. 圆心值等于圆周平均:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (5 + 2 \cos \theta + \sin 4\theta) d\theta.$$

三角项平均为零, 所以

$$u(0) = 5.$$

从 Fourier 角度看, 圆心只保留常数项, 所有 $n \geq 1$ 的模式都被 r^n 消去。□

8.3 题 3：极值原理排除解

例题 8.3: 边界为零的正调和函数不存在

设 Ω 有界连通, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 调和, 且 $u = 0$ 于 $\partial\Omega$ 。证明 $u \equiv 0$ 。此题是 Evans 和 Strauss 中唯一性论证的核心原型。

解. 极值原理给出

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u = 0,$$

所以 $u \leq 0$ 。对 $-u$ 再用极值原理:

$$\max_{\overline{\Omega}} (-u) = \max_{\partial\Omega} (-u) = 0,$$

所以 $-u \leq 0$, 即 $u \geq 0$ 。两者合并得 $u = 0$ 。□

8.4 题 4：Liouville 型题目

例题 8.4: 有界全空间调和函数

设 u 在 $\mathbb{R}^n$ 中调和, 且 $|u(x)| \leq M$ 。证明 u 为常数。此题改写自 Evans Liouville 定理。

解. 由调和函数导数估计, 对任意 $R > 0$,

$$|Du(x_0)| \leq \frac{C}{R} \sup_{B(x_0, R)} |u| \leq \frac{CM}{R}.$$

令 $R \rightarrow \infty$, 得 $Du(x_0) = 0$. 由于 x_0 任意, $Du \equiv 0$, 故 u 为常数。□

8.5 题 5: 圆盘 Dirichlet 问题

例题 8.5: 三角多项式边界值

求单位圆盘中满足

$$\Delta u = 0, \quad u(1, \theta) = 1 - 2 \cos 2\theta + 5 \sin 3\theta$$

的有界解。此题改写自 Strauss §6.3。

解. 第 n 阶三角模式在圆盘内乘 r^n , 所以

$$u(r, \theta) = 1 - 2r^2 \cos 2\theta + 5r^3 \sin 3\theta.$$

□

8.6 题 6: 矩形分离变量

例题 8.6: 三边为零一边为正弦级数

在 $0 < x < \pi$, $0 < y < 2$ 中求调和函数, 满足

$$u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = 4 \sin x - \sin 3x.$$

解. 形式为

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(ny) \sin nx.$$

由 $y = 2$,

$$A_n \sinh(2n)$$

等于边界正弦级数的第 n 个系数。因此

$$A_1 = \frac{4}{\sinh 2}, \quad A_3 = -\frac{1}{\sinh 6},$$

其余为零。故

$$u(x, y) = 4 \frac{\sinh y}{\sinh 2} \sin x - \frac{\sinh 3y}{\sinh 6} \sin 3x.$$

□

8.7 题 7: Neumann 兼容条件

例题 8.7: 判断是否有解

设 Ω 是单位圆盘。判断

$$-\Delta u = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 1 \quad \text{于 } \partial\Omega$$

是否可能有解。

解. 兼容条件为

$$\int_{\Omega} f \, dx + \int_{\partial\Omega} h \, dS = 0.$$

这里 $f = 2$, $h = 1$, 所以

$$\int_{\Omega} 2 \, dx + \int_{\partial\Omega} 1 \, dS = 2\pi + 2\pi = 4\pi \neq 0.$$

因此无解。 □

8.8 题 8: Green 第一恒等式

例题 8.8: 能量估计

设 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 满足

$$-\Delta u = f, \quad u = 0 \quad \text{于 } \partial\Omega.$$

证明

$$\int_{\Omega} |Du|^2 \, dx = \int_{\Omega} f u \, dx.$$

此题改写自 Evans 能量方法和弱形式推导。

解. 将方程乘以 u 并积分:

$$\int_{\Omega} f u \, dx = \int_{\Omega} (-\Delta u) u \, dx.$$

由 Green 第一恒等式,

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) u \, dx = \int_{\Omega} |Du|^2 \, dx - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS.$$

边界上 $u = 0$, 边界项为零, 故结论成立。 □

8.9 题 9：弱形式

例题 8.9: Robin 问题的弱形式

形式写出

$$-\Delta u = f \quad \text{于 } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = g \quad \text{于 } \partial\Omega$$

的弱形式，其中 $\alpha > 0$ 。此题按谷超豪第三边值问题和 Evans 弱形式方法改写。

解. 乘以测试函数 $v \in H^1(\Omega)$ ，分部积分：

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, dS = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

由边界条件 $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g - \alpha u$ ，代入得

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha uv \, dS = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, dS.$$

这就是 Robin 问题的弱形式。 □

8.10 题 10：从四边非齐次到叠加

例题 8.10: 线性叠加思想

矩形 $R = (0, a) \times (0, b)$ 上的 Dirichlet 问题

$$\Delta u = 0$$

四条边分别给定 g_1, g_2, g_3, g_4 。说明为什么可拆成四个只在一条边非零的问题。此题按 Strauss §6.2 的矩形求解策略整理。

解. Laplace 方程是线性的，边界取值也是线性的。令 u_i 解第 i 个问题：第 i 条边取原来的数据 g_i ，其余三条边取零。则

$$\Delta(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) = 0,$$

并且在每条边上，只有对应的 u_i 贡献非零边界值。因此

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

就是原问题的解。唯一性保证这种构造若成功就是唯一解。 □

参考书目

1. Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, Second Edition. 讲义的调和函数性质、基本解、Green 函数、能量方法主线主要参考第 2.2 节及相关椭圆方程章节。
2. Walter A. Strauss, *Partial Differential Equations: An Introduction*, Second Edition. 讲义的物理例子、矩形与圆盘显式解、Fourier 级数计算题主要参考第 4-6 章及相关习题。
3. 谷超豪、李大潜、陈恕行,《数学物理方程》第 3 版。讲义的中文课程体系、第一/第二/第三边值问题、分离变量法与 Green 函数法的组织方式参考该书。