

Walter A. Strauss

**Partial Differential Equations: An
Introduction**

与 Laplace 方程相关内容中文译稿

范围：1.3、1.4、5.1–5.4、第 6 章、第 7 章

译稿说明：公式以 $\text{\LaTeX}$ 重写；原书图示位置仅作标记，不插入图片。

目录

第一章 偏微分方程从何而来	4
1.1 流动、振动与扩散	4
习题	11
1.2 初始条件与边界条件	12
若干物理解释	13
第二章 Fourier 级数	15
2.1 系数	15
2.2 偶函数、奇函数、周期函数与复函数	17
2.3 正交性与一般 Fourier 级数	18
2.4 完备性	18
第三章 调和函数	20
3.1 Laplace 方程	20
最大值原理	21
二维中的不变性	22
三维中的不变性	22
3.2 矩形与长方体	23
3.3 Poisson 公式	25
平均值性质、最大值原理与可微性	26
3.4 圆、楔形区域与环形区域	27
第四章 Green 恒等式与 Green 函数	29
4.1 Green 第一恒等式	29
三维平均值性质	30
能量方法与 Dirichlet 原理	30
4.2 Green 第二恒等式	30
表示公式	31

4.3	Green 函数	31
4.4	半空间与球	32
	半空间	32
	球	33

1 偏微分方程从何而来

1.1 流动、振动与扩散

直到二十世纪以前，偏微分方程这一学科实际上几乎是物理学的一个分支。本节给出一系列来自物理学的偏微分方程例子。这些例子为本书其余部分所研究的偏微分方程问题提供基本动机。我们将看到，在物理问题中，独立变量最常见的是空间变量 x, y, z 与时间变量 t 。

例 1：简单输运

考虑一条截面固定的水平管道，水以常速 c 沿正 x 方向流动。设某种物质，例如污染物，悬浮在水中。令 $u(x, t)$ 表示时刻 t 、位置 x 处该物质的浓度，单位可取为克/厘米。于是

$$u_t + cu_x = 0. \quad (1.1)$$

也就是说，浓度的变化率 u_t 与浓度梯度 u_x 成比例。这里假定扩散效应可以忽略。按第 1.2 节的方法解此方程，可知浓度只依赖于 $x - ct$ 。这意味着该物质以固定速度 c 向右输运。每一个单独粒子都以速度 c 向右运动；也就是说，在 xt 平面中，它恰好沿着一条特征直线运动。

方程 (1) 的推导。在时刻 t ，区间 $[0, b]$ 内污染物的总量为

$$M = \int_0^b u(x, t) dx,$$

单位可取为克。在稍后的时刻 $t + h$ ，同一批污染物分子已向右移动了 ch 厘米。因此

$$M = \int_0^b u(x, t) dx = \int_{ch}^{b+ch} u(x, t+h) dx.$$

对 b 求导，得到

$$u(b, t) = u(b + ch, t + h).$$

再对 h 求导，并令 $h = 0$ ，得到

$$0 = cu_x(b, t) + u_t(b, t),$$

这正是方程 (1)。

例 2: 振动弦

考虑一条长度为 l 的柔软、弹性、均匀的弦或细线，并假定它只作相对较小的横向振动。例如，它可以是一根吉他弦，或被拨动的小提琴弦。在某一给定时刻 t ，弦的形状可如原书图 2 所示。假定弦始终留在同一平面内。令 $u(x, t)$ 表示时刻 t 、位置 x 处弦相对于平衡位置的位移。

由于弦完全柔软，张力总沿弦的切向方向。令 $T(x, t)$ 表示张力向量的大小。令 ρ 表示弦的密度，即单位长度质量。由于弦是均匀的， ρ 为常数。现在对 $x = x_0$ 与 $x = x_1$ 之间的任意一段弦写出 Newton 定律。弦在 x_1 处的斜率为 $u_x(x_1, t)$ 。Newton 定律 $F = ma$ 在纵向 x 分量与横向 u 分量上分别给出

$$\left. \frac{T}{\sqrt{1+u_x^2}} \right|_{x_0}^{x_1} = 0 \quad (\text{纵向}),$$

$$\left. \frac{T u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \right|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt} dx \quad (\text{横向}).$$

右端是弦段质量乘以加速度后在相应方向上的积分。由于我们假定运动纯粹是横向的，所以没有纵向运动。

现在还假定运动很小，更具体地说， $|u_x|$ 很小。于是 $\sqrt{1+u_x^2}$ 可以用 1 代替。这由 Taylor 展开，也即二项式展开所说明：

$$\sqrt{1+u_x^2} = 1 + \frac{1}{2}u_x^2 + \cdots,$$

其中省略号表示 u_x 的更高次幂。如果 u_x 很小，舍去更小的 u_x^2 及其高次幂就是合理的。将平方根都换成 1 后，第一个方程说明 T 沿弦为常数。再假定 T 不依赖于 t ，也不依赖于 x 。对第二个方程求导，得到

$$(T u_x)_x = \rho u_{tt}.$$

也就是说，

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (1.2)$$

这就是波方程。此处尚不清楚为什么以这种方式定义 c ，但很快我们会看到， c 正是波速。

方程 (2) 有许多变形：

(i) 如果存在显著的空气阻力 r ，则会出现一个与速度 u_t 成比例的附加项：

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + r u_t = 0, \quad r > 0. \quad (1.3)$$

(ii) 如果存在横向弹性力，则会出现一个与位移 u 成比例的附加项，如卷簧的情形：

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + k u = 0, \quad k > 0. \quad (1.4)$$

(iii) 如果有外加力作用，它也表现为一个附加项：

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (1.5)$$

这使方程成为非齐次方程。

以上对波方程的推导较快，并不十分精细。也可以作出更加谨慎的推导，使物理假设与数学假设都更明确，见参考文献 [We, Chap. 1]。

同一个波方程或其变形还描述许多其他波动现象，例如弹性杆的振动、管中的声波，以及直渠中的长水波。另一个例子是传输线中电流所满足的方程

$$u_{xx} = C L u_{tt} + (C R + G L) u_t + G R u,$$

其中 C 是单位长度电容， G 是单位长度漏电阻， R 是单位长度电阻， L 是单位长度自感。

例 3: 振动鼓膜

弦的二维对应物是一张弹性、柔软、均匀的鼓膜，即张在框架上的膜。设框架位于 xy 平面内， $u(x, y, t)$ 表示竖直位移，并假定没有水平运动。Newton 定律的水平分量仍然给出常张力 T 。令 D 为 xy 平面中的任意区域，例如圆或矩形；令 $\text{bdy } D$ 表示其边界曲线。按一维情形类似推理，竖直分量近似给出

$$F = \int_{\text{bdy } D} T \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_D \rho u_{tt} dx dy = ma,$$

其中左端是作用在膜的区域 D 上的总力； $\partial u / \partial n = n \cdot \nabla u$ 是沿外法向的方向导数， n 是 $\text{bdy } D$ 上的外单位法向量。由 Green 定理，见附录 A.3，上式可改写为

$$\iint_D \nabla \cdot (T \nabla u) dx dy = \iint_D \rho u_{tt} dx dy.$$

由于 D 任意，由附录 A.1 中的第二消失定理可推出

$$\rho u_{tt} = \nabla \cdot (T \nabla u).$$

因为 T 是常数，得到

$$u_{tt} = c^2 \nabla \cdot (\nabla u) \equiv c^2 (u_{xx} + u_{yy}), \quad (1.6)$$

其中 $c = \sqrt{T/\rho}$ ，并且

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \text{div grad } u = u_{xx} + u_{yy}$$

称为二维 Laplace 算子。方程 (6) 是二维波方程。

现在模式已经清楚。简单的三维振动满足

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}). \quad (1.7)$$

算子

$$\ell = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

称为三维 Laplace 算子，通常记作 Δ 或 ∇^2 。由三维波方程或其变形所描述的物理例子包括：弹性固体的振动、空气中的声波、电磁波（光、雷达等）、线性化的超声速气流、核物理中的自由介子，以及在地球中传播的地震波。

例 4: 扩散

设想一根直管中充满静止液体，一种化学物质，例如染料，正在液体中扩散。简单扩散由下列定律刻画：染料从高浓度区域向低浓度区域移动，移动率与浓度梯度成比例。这称为 Fick 扩散定律。这里不要把扩散与对流（输运）混淆，后者指液体中的流动。令 $u(x, t)$ 表示时刻 t 、管道位置 x 处染料的浓度，即单位长度质量。

在从 x_0 到 x_1 的管段中，染料质量为

$$M(t) = \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx, \quad \frac{dM}{dt} = \int_{x_0}^{x_1} u_t(x, t) dx.$$

该管段中的质量只能通过两端流入或流出而改变。由 Fick 定律，

$$\frac{dM}{dt} = \text{流入量} - \text{流出量} = ku_x(x_1, t) - ku_x(x_0, t),$$

其中 k 是比例常数。因此两种表达式相等：

$$\int_{x_0}^{x_1} u_t(x, t) dx = ku_x(x_1, t) - ku_x(x_0, t).$$

对 x_1 求导，得到

$$u_t = ku_{xx}. \quad (1.8)$$

这就是扩散方程。

在三维情形中，有

$$\iiint_D u_t dx dy dz = \iint_{\text{bdy } D} k(n \cdot \nabla u) dS,$$

其中 D 是任意实体区域， $\text{bdy } D$ 是其边界曲面。由散度定理，并像例 3 一样利用 D 的任意性，得到三维扩散方程

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = k\Delta u. \quad (1.9)$$

如果存在外部源项（或“汇”），并且扩散率 k 是变量，则得到更一般的非齐次方程

$$u_t = \nabla \cdot (k\nabla u) + f(x, t).$$

同一方程还描述热传导、Brown 运动、种群动力学中的扩散模型，以及许多其他现象。

例 5: 热流

令 $u(x, y, z, t)$ 表示温度, 令 $H(t)$ 表示区域 D 中所含热量, 单位可取为卡。于是

$$H(t) = \iiint_D c\rho u \, dx \, dy \, dz,$$

其中 c 是材料的比热, ρ 是密度, 即单位体积质量。热量的变化为

$$\frac{dH}{dt} = \iiint_D c\rho u_t \, dx \, dy \, dz.$$

Fourier 定律说, 热从热区流向冷区, 并且与温度梯度成比例。但区域 D 中的热量只能通过边界流出而损失。这是能量守恒定律。因此, 区域 D 中热能的变化也等于穿过边界的热通量:

$$\frac{dH}{dt} = \iint_{\text{bdy } D} \kappa(n \cdot \nabla u) \, dS,$$

其中 κ 是比例因子, 称为热导率。由散度定理,

$$\iiint_D c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dx \, dy \, dz = \iiint_D \nabla \cdot (\kappa \nabla u) \, dx \, dy \, dz,$$

从而得到热方程

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla u). \quad (1.10)$$

如果 c, ρ, κ 都是常数, 则它与扩散方程完全相同。

例 6: 定常波与定常扩散

考虑前四个例子中的任意一个, 并假定物理状态不随时间改变。于是 $u_t = u_{tt} = 0$ 。因此, 波方程与扩散方程都化为

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \quad (1.11)$$

这称为 Laplace 方程。它的解称为调和函数。

例如, 考虑一个在炉中持续受热热物体。不能指望热量在整个炉内均匀分布。该物体的温度最终达到一个定常状态, 或称平衡状态。这就是一个调和函数 $u(x, y, z)$ 。(当然, 如果热量从所有方向均匀供给, 则定常状态会是 $u \equiv \text{常数}$ 。)在一维情形中, 例如一根侧面绝热、只通过两端与环境交换热量的细杆, u 只是 x 的函数。于是 Laplace 方程就简单化为 $u_{xx} = 0$ 。因此 $u = c_1 x + c_2$ 。二维和三维情形则有趣得多; 其解见第 6 章。

例 7: 氢原子

氢原子由一个绕质子运动的电子组成。令 m 为电子质量, e 为电子电荷, h 为 Planck 常数除以 2π 。令坐标 (x, y, z) 的原点置于质子处, 并令

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

为球坐标中的径向变量。则电子的运动由一个“波函数” $u(x, y, z, t)$ 给出, 它满足 Schrodinger 方程

$$-i\hbar u_t = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u + \frac{e^2}{r} u \quad (1.12)$$

在整个空间 $-\infty < x, y, z < +\infty$ 中成立。此外, 应当有

$$\iiint_{\text{全空间}} |u|^2 dx dy dz = 1.$$

注意 $i = \sqrt{-1}$, 并且 u 是复值函数。系数函数 e^2/r 称为势。对于任意其他只有一个电子的原子, 例如氦离子, e^2 要替换为 Ze^2 , 其中 Z 是原子序数。

这在物理上是什么意思? 在量子力学中, 量不能被精确测量, 而只能以一定概率测量。波函数 $u(x, y, z, t)$ 表示电子的一个可能状态。如果 D 是 xyz 空间中的任意区域, 则

$$\iiint_D |u|^2 dx dy dz$$

是在时刻 t 于区域 D 中找到电子的概率。时刻 t 电子位置的 z 坐标的期望值为

$$\iiint z |u(x, y, z, t)|^2 dx dy dz,$$

x 坐标与 y 坐标的期望值类似。动量的 z 坐标的期望值为

$$\iiint -i\hbar \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z, t) \bar{u}(x, y, z, t) dx dy dz,$$

其中 $\bar{u}$ 是 u 的复共轭。所有其他可观测量都由作用在函数上的算子 A 给出。可观测量 A 的期望值等于

$$\iiint A u(x, y, z, t) \bar{u}(x, y, z, t) dx dy dz.$$

因此, 位置由算子 $Au = \mathbf{x}u$ 给出, 其中 $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; 动量由算子 $Au = -i\hbar \nabla u$ 给出。

Schrodinger 方程最容易被看作一条公设, 它导出正确的物理结论, 而不是一条可由更简单原理推出的方程。它解释了原子为何稳定而不会塌缩, 也解释了 Bohr 所观测到的氢原子中电子的能级。原则上, 它的各种推广解释了所有原子和分子的结构, 因而也解释了整个化学。对于多粒子情形, 波函数 u 依赖于时间 t 以及所有粒子的全部坐标, 所以它是大量变量的函数。Schrodinger 方程于是变为

$$-i\hbar u_t = \sum_{i=1}^n \frac{\hbar^2}{2m_i} (u_{x_i x_i} + u_{y_i y_i} + u_{z_i z_i}) + V(x_1, \dots, z_n) u,$$

这是 n 个粒子的情形，其中势函数 V 依赖于全部 $3n$ 个坐标。除氢原子和氦原子以外，后者有两个电子，其数学分析不可能完整完成，即使用现代计算机也无法完全计算。尽管如此，借助各种近似，许多关于更复杂原子以及分子化学键的事实仍然可以得到理解。

以上只是对偏微分方程在物理问题中来源的一个简短介绍。许多真实情形会导出复杂得多的偏微分方程。更多例子见第 13 章。

习题

1. 仔细推导一根弦在阻力与速度成比例的介质中所满足的方程。
2. 一条长度为 l 的柔性链条从端点 $x = 0$ 悬挂下来，并作水平振动。令 x 轴向下， u 轴向右。假定链条每一点处的重力等于该点以下链条部分的重量，并沿链条切向方向作用。假定振动很小。求该链条满足的偏微分方程。
3. 一根细杆侧面与温度恒为 T_0 的介质发生热交换，并服从 Newton 冷却定律，即通量与温差成比例。忽略杆横截面上的温度变化，温度 $u(x, t)$ 满足什么方程？
4. 假设某些悬浮在液体介质中的粒子，在没有扩散时，会因重力以常速 $V > 0$ 向下运动。考虑扩散效应后，求粒子浓度所满足的方程。假定水平方向 x, y 上均匀，并令 z 轴向上。
5. 推导一个沿 x 轴以常速 V 向右运动的介质中的一维扩散方程。
6. 考虑一根长圆柱中的热流，温度只依赖于 t 以及到圆柱轴的距离 r 。这里

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

是柱坐标中的径向变量。由三维热方程推导

$$u_t = k \left(u_{rr} + \frac{u_r}{r} \right).$$

7. 在球中求解习题 6 的对应问题，但温度只依赖于球坐标径向变量

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

推导

$$u_t = k \left(u_{rr} + \frac{2u_r}{r} \right).$$

8. 对氢原子，若在 $t = 0$ 时有

$$\iiint |u|^2 dx dy dz = 1,$$

证明在所有以后时刻同样成立。提示：对积分关于 t 求导，注意解是复值函数。假定当 $|x| \rightarrow \infty$ 时， u 与 ∇u 足够快地趋于 0。

9. 本题关于散度定理

$$\iiint_D \nabla \cdot F \, dx = \iint_{\text{bdy } D} F \cdot n \, dS,$$

其中 D 是空间中的任意有界区域, 边界曲面为 $\text{bdy } D$, 外单位法向量为 n 。如果你从未学过它, 见 A.3 节。有界性在这里是关键。作为练习, 在下列情形中分别计算等式两边以验证它:

$$F = r^2 \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

且 D 为以原点为中心、半径为 a 的球。

10. 若向量场 $\mathbf{f}(x)$ 连续, 并且对所有 x 有

$$|\mathbf{f}(x)| \leq \frac{1}{|x|^3 + 1},$$

证明

$$\iiint_{\text{全空间}} \nabla \cdot \mathbf{f} \, dx = 0.$$

提示: 取 D 为一个大球, 应用散度定理, 并令其半径趋于无穷。

11. 若在整个三维空间中 $\text{curl } v = 0$, 证明存在一个标量函数 $\phi(x, y, z)$, 使得

$$v = \text{grad } \phi.$$

1.2 初始条件与边界条件

正如第 1.2 节所见, 偏微分方程通常有很多解。为了选定一个解, 必须附加辅助条件; 这些条件应当被设计成能指定唯一解。它们来自物理背景, 主要分为两类: 初始条件与边界条件。

初始条件指定某一时刻 t_0 的物理状态。对扩散方程, 初始条件为

$$u(x, t_0) = \phi(x), \tag{1.13}$$

其中 $x = (x, y, z)$, $\phi(x)$ 是给定函数。若研究扩散物质, $\phi(x)$ 是初始浓度; 若研究热流, $\phi(x)$ 是初始温度。对 Schrodinger 方程, 通常也采用这种初始条件。

对波方程, 需要一对初始条件:

$$u(x, t_0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = \psi(x), \tag{1.14}$$

其中 $\phi(x)$ 是初始位置, $\psi(x)$ 是初始速度。从物理上看, 只有同时给定这两者, 才可能确定以后时刻的位置 $u(x, t)$; 后面也会给出数学证明。

在每一个物理问题中, 偏微分方程都在某一区域 D 内成立。振动弦中 D 是区间 $0 < x < l$, 其边界只有两点 $x = 0$ 与 $x = l$ 。鼓膜中 D 是平面区域, 其边界是一条闭曲

线。化学物质扩散时, D 是盛放液体的容器, 其边界是曲面 $S = \text{bdy } D$ 。氢原子问题中, 区域是整个空间, 因而没有边界。

若要确定解, 通常必须给定边界条件。三类最重要的边界条件如下:

- (D) 指定 u (Dirichlet 条件),
- (N) 指定法向导数 $\partial u / \partial n$ (Neumann 条件),
- (R) 指定 $\partial u / \partial n + au$ (Robin 条件)。

这里 a 是给定函数; 条件对所有 t 以及所有 $x = (x, y, z) \in \text{bdy } D$ 成立。通常这些条件写成方程。例如 Neumann 条件写作

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x, t), \quad (1.15)$$

其中 g 是给定函数, 可称为边界数据。若所指定的函数为零, 则边界条件称为齐次; 否则称为非齐次。通常 $n = (n_1, n_2, n_3)$ 表示 $\text{bdy } D$ 上从 D 指向外部的单位法向量, 且

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv n \cdot \nabla u$$

表示 u 沿外法向的方向导数。

在一维问题中, 若 D 是区间 $0 < x < l$, 边界只有两个端点, 相应条件化为

$$\begin{aligned} \text{(D)} \quad & u(0, t) = g(t), \quad u(l, t) = h(t), \\ \text{(N)} \quad & \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = h(t), \end{aligned}$$

Robin 条件也可类似写出。

若干物理解释

振动弦。若弦的两端固定, 如小提琴弦, 则有齐次 Dirichlet 条件 $u(0, t) = u(l, t) = 0$ 。若一端可无阻力地横向运动, 例如沿无摩擦轨道运动, 则该端没有横向张力, 因而 $u_x = 0$, 这是 Neumann 条件。若端点沿轨道运动但连接到满足 Hooke 定律的弹簧或橡皮筋, 则适当条件为 Robin 条件; 此时弦与弹簧交换一部分能量。若端点按指定方式运动, 则该端满足非齐次 Dirichlet 条件。

扩散。若扩散物质封闭在容器 D 中, 既不能流出也不能流入, 则由 Fick 定律, 浓度梯度在法向方向上必须为零。因此在 $S = \text{bdy } D$ 上有 $\partial u / \partial n = 0$, 即 Neumann 条件。另一方面, 若容器可渗透, 并且流到边界的物质立即被冲走, 则在 S 上有 $u = 0$ 。

热。热传导由扩散方程描述, 此时 $u(x, t)$ 表示温度。若热流通过的物体 D 完全绝热, 则无热量穿过边界, 故有 Neumann 条件 $\partial u / \partial n = 0$ 。若物体浸入温度为 $g(t)$ 的大热库, 且热传导完全, 则在 $\text{bdy } D$ 上有 Dirichlet 条件 $u = g(t)$ 。若一根均匀杆在 $0 \leq x \leq l$ 上侧面绝热, 端点 $x = l$ 浸入温度为 $g(t)$ 的热库, 并按 Newton 冷却定律交换热量, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -a[u(l, t) - g(t)], \quad a > 0,$$

这是一类非齐次 Robin 条件。

光与声。光是电磁场，受 Maxwell 方程支配；电场和磁场的各分量满足波方程，各分量之间通过边界条件耦合。若不研究偏振效应，科学家有时用带齐次 Dirichlet 或 Neumann 条件的波方程作为散射问题的简化模型。

声音是空气中的小扰动。线性化气体动力学以速度 v 与密度 ρ 为未知量，满足

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \operatorname{grad} \rho = 0, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} v = 0, \quad (1.17)$$

这里 ρ_0 是静止空气密度， c_0 是声速。若 $\operatorname{curl} v = 0$ ，即无声涡，则 ρ 与 v 的三个分量都满足波方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta v, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta \rho. \quad (1.18)$$

在有刚性墙的封闭隔音房间中，墙面处空气分子只能沿边界切向运动，因此 $v \cdot n = 0$ 。若 $v = -\operatorname{grad} \psi$ ，则势函数 ψ 满足波方程，并满足 Neumann 条件 $n \cdot \operatorname{grad} \psi = 0$ 。在开窗处，大气压恒定，故密度在窗口处为常数，这对应 Dirichlet 条件。若边界为软壁，例如覆盖开窗的弹性膜，压力差与法向速度成比例：

$$p - p_0 = Z v \cdot n,$$

其中 Z 称为声阻抗。小扰动下 $p - p_0$ 又与 $\rho - \rho_0$ 成比例，所以边界条件可写为

$$v \cdot n = a(\rho - \rho_0),$$

其中 a 与 $1/Z$ 成比例。

波方程还可能出现另一种边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n} + b \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (1.19)$$

该条件表示能量通过边界向外辐射 ($b > 0$) 或从外部吸收 ($b < 0$)。例如，端点浸在黏性液体中的振动弦满足 $b > 0$ 的这种条件。

若区域 D 无界，物理上通常还会给出无穷远处的条件。例如 Schrodinger 方程在全空间中要求 $\int |u|^2 dx = 1$ ，这事实上意味着 u 在无穷远处消失。声波或电磁波散射中，若研究向外辐射到无穷远的波，适当条件是 Sommerfeld 向外辐射条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0, \quad (1.20)$$

其中 $r = |x|$ 是球坐标径向变量。若区域由物理性质不同的两部分组成，还会出现跃迁条件，例如两种材料焊接处热传导中温度与热通量的连续性。

2 Fourier 级数

本章的第一个目标是在 Fourier 级数中求出系数。第 5.3 节引入函数正交性的思想，并说明不同类型的 Fourier 级数可以用统一方式处理。第 5.4 节陈述基本的完备性（收敛）定理；证明放在第 5.5 节。Joseph Fourier 在研究热流时发展了三角级数收敛思想；他的 1807 年论文曾因过于不精确而被其他科学家拒绝，直到 1822 年才发表。

2.1 系数

先考虑区间 $(0, l)$ 上的 Fourier sine 级数

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.1)$$

这里先暂不讨论级数是否收敛到 $\phi(x)$ 。关键事实是正弦函数满足

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0, \quad m \neq n, \quad (2.2)$$

其中 m, n 为正整数。这可由恒等式

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \cos(a - b) - \frac{1}{2} \cos(a + b)$$

直接积分验证。

固定 m ，将 (1) 乘以 $\sin(m\pi x/l)$ ，并逐项积分。由于正交性，除 $n = m$ 的项以外全部消失，留下

$$A_m \int_0^l \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} A_m.$$

因此

$$A_m = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx. \quad (2.3)$$

这是 sine 级数 Fourier 系数的著名公式。如果 $\phi(x)$ 确有展开式 (1)，那么系数只能由 (3) 给出。展开式是否真的成立，是收敛问题，留到第 5.4 节。

回到 Dirichlet 边界条件下的扩散方程，公式 (3) 给出了任意初始数据 $\phi(x)$ 的最终求解成分。对带 Dirichlet 条件的波方程，初始数据是一对函数 $\phi(x)$ 、 $\psi(x)$ 。其中 A_m 由 (3) 给出，而另一个系数满足

$$\frac{m\pi c}{l} B_m = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx. \quad (2.4)$$

对 Neumann 边界条件对应的 cosine 级数, 写作

$$\phi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.5)$$

余弦函数同样满足正交性:

$$\int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 0, \quad m \neq n,$$

其中 m, n 为非负整数。由完全相同的方法得到, 对所有非负整数 m ,

$$A_m = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx. \quad (2.6)$$

$\frac{1}{2}A_0$ 的写法正是为了使同一公式适用于 $m = 0$ 。

在区间 $-l < x < l$ 上, 完整 Fourier 级数定义为

$$\phi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (2.7)$$

注意此时区间长度是前面的两倍。特征函数族为

$$1, \quad \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

任取两个不同的特征函数, 在 $(-l, l)$ 上相乘积分均为零。再计算平方积分

$$\int_{-l}^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l = \int_{-l}^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx, \quad \int_{-l}^l 1^2 dx = 2l,$$

得到完整 Fourier 级数的系数公式:

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

例 1

若 $\phi(x) \equiv 1$ 于 $[0, l]$, 其 sine 级数系数为

$$A_m = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{2}{m\pi} [1 - (-1)^m].$$

因此 m 为奇数时 $A_m = 4/(m\pi)$, m 为偶数时 $A_m = 0$, 于是

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{l} + \dots \right), \quad 0 < x < l.$$

例 2

同一函数 $\phi(x) \equiv 1$ 的 cosine 级数只有 $A_0 = 2$ 非零；因此级数为平凡展开

$$1 = 1 + 0 \cos \frac{\pi x}{l} + 0 \cos \frac{2\pi x}{l} + \cdots$$

例 3

若 $\phi(x) = x$ 于 $(0, l)$ ，其 sine 级数系数为

$$A_m = \frac{2}{l} \int_0^l x \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{2l}{m\pi} (-1)^{m+1}.$$

故

$$x = \frac{2l}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{l} - \cdots \right).$$

2.2 偶函数、奇函数、周期函数与复函数

Fourier sine 级数自然对应奇延拓，cosine 级数自然对应偶延拓。若 f 在 $(-l, l)$ 上为奇函数，即 $f(-x) = -f(x)$ ，则完整 Fourier 级数中所有 cosine 系数为零，只剩 sine 项。若 f 为偶函数，即 $f(-x) = f(x)$ ，则所有 sine 系数为零，只剩 cosine 项。

这解释了为何在 $(0, l)$ 上的同一函数可以有 sine 展开，也可以有 cosine 展开：前者是在 $(-l, l)$ 上作奇延拓后取完整 Fourier 级数，后者是在 $(-l, l)$ 上作偶延拓后取完整 Fourier 级数。

完整 Fourier 级数也可以被看作周期为 $2l$ 的函数的展开。若一个函数满足

$$f(x + 2l) = f(x) \quad \text{对所有 } x,$$

则称其以 $2l$ 为周期。Fourier 级数的三角函数项也都具有这一周期。

借助 Euler 公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

完整 Fourier 级数可写成复形式

$$\phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l}, \quad (2.10)$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \phi(x) e^{-in\pi x/l} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.11)$$

复形式与实形式完全等价；若 ϕ 为实值函数，则 $c_{-n} = \overline{c_n}$ 。

2.3 正交性与一般 Fourier 级数

第 5.1 节的计算核心是正交性。若函数 u, v 定义在区间 (a, b) 上, 定义内积

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x) \, dx.$$

若 $(u, v) = 0$, 则称 u 与 v 正交。函数的长度或范数定义为

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \left(\int_a^b |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

设 $\{w_n\}$ 是一组两两正交且非零的函数。若希望把 ϕ 展开为

$$\phi(x) = \sum_n c_n w_n(x),$$

则两边同 w_m 作内积, 正交性给出

$$(\phi, w_m) = c_m (w_m, w_m).$$

因此

$$c_m = \frac{(\phi, w_m)}{(w_m, w_m)}. \quad (2.12)$$

这就是所有 Fourier 系数公式的统一来源。

在带权问题中也会出现带权内积

$$(u, v)_r = \int_a^b u(x)v(x)r(x) \, dx,$$

其中 $r(x) > 0$ 是权函数。只要特征函数相对于该内积正交, 系数公式仍然是

$$c_m = \frac{(\phi, w_m)_r}{(w_m, w_m)_r}.$$

2.4 完备性

正交性只告诉我们若展开存在, 则系数应当如何求; 完备性回答展开是否足以表示给定函数, 以及级数是否收敛到该函数。以下是本书在此处使用的基本收敛事实。

若 ϕ 在适当意义下分段光滑, 则其 Fourier 级数在每个连续点收敛到 $\phi(x)$, 在跳跃点收敛到左右极限的平均值:

$$\frac{1}{2}(\phi(x+) + \phi(x-)).$$

对区间 $(0, l)$ 上的 sine 级数或 cosine 级数, 应当理解为先作奇延拓或偶延拓, 再使用完整 Fourier 级数的收敛结论。

均方意义下, Fourier 级数收敛得更一般。若 ϕ 平方可积, 则其 Fourier 级数的部分和 S_N 满足

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int |\phi(x) - S_N(x)|^2 dx = 0.$$

这称为均方收敛。相应的 Parseval 等式表明函数能量等于其 Fourier 系数能量之和。例如在完整 Fourier 级数中,

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l |\phi(x)|^2 dx = \frac{1}{2} A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2),$$

在相应归一化下也可写成复系数形式

$$\int_{-l}^l |\phi(x)|^2 dx = 2l \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

这些定理的证明在第 5.5 节给出; 本书在求解边值问题时主要使用其结论。

3 调和函数

本章专门讨论 Laplace 方程。先介绍两个重要性质：最大值原理与旋转不变性。然后在矩形、圆及相关区域中用级数形式求解方程。圆盘情形导出优美的 Poisson 公式。

3.1 Laplace 方程

若扩散过程或波动过程是定常的，即与时间无关，则 $u_t \equiv 0$ 且 $u_{tt} \equiv 0$ 。于是扩散方程与波方程都化为 Laplace 方程：

$$u_{xx} = 0 \quad \text{一维,}$$

$$\nabla \cdot \nabla u = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{二维,}$$

$$\nabla \cdot \nabla u = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad \text{三维.}$$

Laplace 方程的解称为调和函数。一维时只有 $u(x) = A + Bx$ ，这过于简单，不能显示高维情形的结构。非齐次方程

$$\Delta u = f \quad (3.1)$$

称为 Poisson 方程。

除定常扩散与定常波外，Laplace 与 Poisson 方程还出现在以下情形中。

1. **静电学**。由 Maxwell 方程有 $\text{curl } E = 0$ 、 $\text{div } E = 4\pi\rho$ ，其中 ρ 是电荷密度。第一式推出 $E = -\text{grad } \phi$ ，其中 ϕ 是电势。因此

$$\Delta\phi = \text{div}(\text{grad } \phi) = -\text{div } E = -4\pi\rho,$$

即 Poisson 方程。

2. **定常流体**。若流体无旋，即 $\text{curl } v = 0$ ，且不可压、无源无汇，即 $\text{div } v = 0$ ，则 $v = -\text{grad } \phi$ ，其中 ϕ 是速度势，并且 $\Delta\phi = 0$ 。

3. **复变解析函数**。令 $z = x + iy$ ，

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x + iy) + iv(x + iy).$$

若 f 可展开为 z 的幂级数，则形式求导给出 Cauchy-Riemann 方程

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

再求导可得 $u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$ ，故 $\Delta u = 0$ ；同理 $\Delta v = 0$ 。因此解析函数的实部和虚部都是调和函数。

4. **Brown 运动**。设容器 D 中粒子完全随机运动, 碰到边界后停止。将边界分为 C_1 与 C_2 。令 $u(x, y, z)$ 表示从点 (x, y, z) 出发的粒子最终停在 C_1 上的概率, 则

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } D, \quad u = 1 \text{ on } C_1, \quad u = 0 \text{ on } C_2.$$

基本数学问题是在区域 D 中解

$$\Delta u = f \quad \text{in } D,$$

并在 $\text{bdy } D$ 上给定

$$u = h, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = h, \quad \text{或} \quad \frac{\partial u}{\partial n} + au = h.$$

最大值原理

设 D 是二维或三维空间中的有界连通开集。若 u 在 D 内调和, 并在闭包 $\bar{D} = D \cup \text{bdy } D$ 上连续, 则 u 的最大值与最小值都在边界 $\text{bdy } D$ 上取得; 除非 $u \equiv \text{常数}$, 否则它们不在内部取得。

换言之, 存在边界点 $x_M, x_m \in \text{bdy } D$, 使得

$$u(x_m) \leq u(x) \leq u(x_M), \quad x \in \bar{D}. \quad (3.2)$$

证明的思想如下。取 $\varepsilon > 0$, 令

$$v(x) = u(x) + \varepsilon|x|^2.$$

在二维中

$$\Delta v = \Delta u + \varepsilon \Delta(x^2 + y^2) = 4\varepsilon > 0.$$

若 v 在内部有最大点, 则二阶导数判别给出 $\Delta v \leq 0$, 矛盾。因此 v 的最大值只能在边界取得。设最大点为 $x_0 \in \text{bdy } D$, 则对所有 $x \in D$,

$$u(x) \leq v(x) \leq v(x_0) = u(x_0) + \varepsilon|x_0|^2 \leq \max_{\text{bdy } D} u + \varepsilon l^2,$$

其中 l 是边界到原点的最大距离。令 $\varepsilon \downarrow 0$ 得

$$u(x) \leq \max_{\text{bdy } D} u.$$

最小值的情形类似。

最大值原理立即给出 Dirichlet 问题的唯一性。若 u, v 都满足

$$\Delta u = f, \quad u = h \text{ on } \text{bdy } D, \quad \Delta v = f, \quad v = h \text{ on } \text{bdy } D,$$

令 $w = u - v$, 则 $\Delta w = 0$ 且 $w = 0$ 于 $\text{bdy } D$ 。由最大值原理, $w \equiv 0$, 故 $u \equiv v$ 。

二维中的不变性

Laplace 方程在刚体运动下不变。平面旋转

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \quad (3.3)$$

下，由链式法则可得

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{x'x'} + u_{y'y'}.$$

因此 Laplace 算子没有优先方向，是各向同性物理情形的数学模型。

在极坐标

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

中，二维 Laplace 算子为

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (3.4)$$

若调和函数只依赖于 r ，则满足

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0, \quad (ru_r)_r = 0,$$

故

$$u = c_1 \log r + c_2.$$

函数 $\log r$ 后面会起核心作用。

三维中的不变性

三维 Laplace 算子在空间刚体运动下也不变。任意旋转可写作 $x' = Bx$ ，其中 B 为正交矩阵。由于 $B^t B = I$ ，链式法则给出

$$\Delta u = u_{x'x'} + u_{y'y'} + u_{z'z'}.$$

三维球坐标取

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

三维 Laplace 算子为

$$\Delta_3 u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} \left(u_{\theta\theta} + (\cot \theta) u_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} u_{\phi\phi} \right), \quad (3.5)$$

也可写为

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.6)$$

若函数只依赖于 r , 则

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r = 0, \quad (r^2 u_r)_r = 0,$$

故

$$u = -c_1 r^{-1} + c_2.$$

因此 $1/r = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ 是三维中对应于二维 $\log r$ 的基本调和函数, 不过它在原点无穷大。

3.2 矩形与长方体

特殊几何区域可用分离变量法求解。一般步骤与第 4 章相同:

- (i) 寻找偏微分方程的分离变量解;
- (ii) 先代入齐次边界条件, 得到特征值;
- (iii) 将这些分离解求和;
- (iv) 最后代入非齐次初始条件或边界条件。

顺序很重要: 齐次边界条件先处理, 非齐次边界条件最后处理。

考虑矩形

$$D = \{0 < x < a, 0 < y < b\},$$

中的方程

$$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{3.7}$$

例 1

若四边边界数据记为 (g, h, j, k) ，线性性使解可写为四个问题的和。为简化，设其中三边数据为零，只保留 $u(x, b) = g(x)$ 这一非齐次条件。

令 $u(x, y) = X(x)Y(y)$ 。由

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

得

$$X'' + \lambda X = 0, \quad Y'' - \lambda Y = 0.$$

齐次条件给出

$$\lambda_n = \beta_n^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{a^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

$$X_n(x) = \sin \frac{(n + \frac{1}{2})\pi x}{a}. \quad (3.9)$$

对 y 变量，齐次 Robin 条件 $Y'(0) + Y(0) = 0$ 使

$$Y(y) = \beta_n \cosh \beta_n y - \sinh \beta_n y.$$

因此

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \beta_n x (\beta_n \cosh \beta_n y - \sinh \beta_n y). \quad (3.10)$$

代入 $u(x, b) = g(x)$ ，得到 Fourier 级数系数

$$A_n = \frac{2}{a} (\beta_n \cosh \beta_n b - \sinh \beta_n b)^{-1} \int_0^a g(x) \sin \beta_n x \, dx. \quad (3.11)$$

例 2

同样方法适用于三维盒子。考虑立方体

$$D = \{0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < z < \pi\},$$

中的 Dirichlet 问题

$$\Delta_3 u = 0, \quad u(\pi, y, z) = g(y, z),$$

其余五个面上 $u = 0$ 。设

$$u = X(x)Y(y)Z(z).$$

齐次边界条件给出

$$Y(y) = \sin my, \quad Z(z) = \sin nz, \quad m, n = 1, 2, \dots,$$

而

$$X'' = (m^2 + n^2)X, \quad X(0) = 0.$$

因此

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sinh(\sqrt{m^2 + n^2} x) \sin my \sin nz. \quad (3.12)$$

代入 $x = \pi$ 上的非齐次条件, 得到双重 Fourier sine 级数。由于

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} (\sin my \sin nz)^2 dy dz = \frac{\pi^2}{4},$$

系数为

$$A_{mn} = \frac{4}{\pi^2 \sinh(\sqrt{m^2 + n^2} \pi)} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} g(y, z) \sin my \sin nz dy dz. \quad (3.13)$$

3.3 Poisson 公式

圆盘的 Dirichlet 问题更有趣。考虑半径为 a 的圆盘

$$x^2 + y^2 < a^2$$

中的问题

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u = h(\theta) \quad \text{on } x^2 + y^2 = a^2. \quad (3.14)$$

在极坐标中令 $u = R(r)\Theta(\theta)$ 。由

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

得到

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \quad r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0. \quad (3.15)$$

角变量满足周期条件 $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$, 故

$$\lambda = n^2, \quad \Theta(\theta) = A \cos n\theta + B \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \dots,$$

并且有 $n = 0$ 的常数解。径向方程为 Euler 方程, 给出 $R = r^n$ 与 $R = r^{-n}$, 而 $n = 0$ 时有 1 与 $\log r$ 。由于圆心 $r = 0$ 要求解有限, 舍去 r^{-n} 与 $\log r$ 。于是

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \quad (3.16)$$

由边界条件 $r = a$, $h(\theta)$ 是完整 Fourier 级数, 故

$$A_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) \cos n\phi \, d\phi, \quad B_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) \sin n\phi \, d\phi. \quad (3.17)$$

将系数代入并求和, 可得 Poisson 公式

$$u(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \phi) + r^2} h(\phi) \frac{d\phi}{2\pi}. \quad (3.18)$$

几何地写, 若 x 是圆盘内点, x' 是边界点, 则

$$u(x) = \frac{a^2 - |x|^2}{2\pi a} \int_{|x'|=a} \frac{u(x')}{|x - x'|^2} \, ds'. \quad (3.19)$$

精确陈述如下: 若 h 是圆周 $C = \text{bdy } D$ 上任意连续函数, 则 Poisson 公式给出 D 中唯一的调和函数, 并且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = h(x_0), \quad x_0 \in C. \quad (3.20)$$

平均值性质、最大值原理与可微性

若 u 在圆盘 D 中调和, 并在闭圆盘上连续, 则 u 在圆心处的值等于 u 在圆周上的平均值。事实上, 在 Poisson 公式中取 $r = 0$ 即得

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) \, d\phi.$$

由平均值性质可得强最大值原理。若 u 在连通区域 D 内调和, 并在内部点 x_M 取得最大值 M , 则取完全包含于 D 的小圆, 以 x_M 为圆心。平均值等于中心值, 而圆周上值均不超过 M , 故圆周上处处等于 M 。移动圆心并利用连通性, 可推出 $u \equiv M$ 。

Poisson 公式还说明调和函数在区域内部自动具有任意阶偏导数。因为公式中的核对内部点 x 可任意阶求导, 且可在积分号下求导。因此调和函数具有无限可微性。

3.4 圆、楔形区域与环形区域

在边界由同心圆和射线组成的区域中，极坐标分离变量法仍然有效。本节处理：

楔形区域 $\{0 < \theta < \theta_0, 0 < r < a\}$,

环形区域 $\{0 < a < r < b\}$,

圆外区域 $\{a < r < \infty\}$.

例 1：楔形区域

考虑三条边为 $\theta = 0, \theta = \beta, r = a$ 的楔形区域，在直边上取齐次 Dirichlet 条件，在圆弧边上取非齐次 Neumann 条件：

$$u(r, 0) = 0 = u(r, \beta), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) = h(\theta). \quad (3.21)$$

角向特征值问题为

$$\Theta'' + \lambda \Theta = 0, \quad \Theta(0) = \Theta(\beta) = 0,$$

故

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2, \quad \Theta(\theta) = \sin \frac{n\pi\theta}{\beta}.$$

舍去在无穷大的负幂项，得到

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{n\pi/\beta} \sin \frac{n\pi\theta}{\beta}. \quad (3.22)$$

由圆弧上的 Neumann 条件，

$$h(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{\beta} a^{-1+n\pi/\beta} \sin \frac{n\pi\theta}{\beta}.$$

于是

$$A_n = a^{1-n\pi/\beta} \frac{2}{n\pi} \int_0^\beta h(\theta) \sin \frac{n\pi\theta}{\beta} d\theta. \quad (3.23)$$

例 2: 环形区域

环形区域的 Dirichlet 问题为

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{in } 0 < a^2 < x^2 + y^2 < b^2,$$

$$u = g(\theta) \text{ on } r = a, \quad u = h(\theta) \text{ on } r = b.$$

此时 r^{-n} 与 $\log r$ 在环内有限, 不能舍去。一般解为

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}(C_0 + D_0 \log r) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) \sin n\theta. \quad (3.24)$$

系数由 $r = a$ 与 $r = b$ 上的边界数据决定。

例 3: 圆外区域

圆外 Dirichlet 问题为

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{for } r > a, \quad u = h(\theta) \quad \text{on } r = a,$$

并要求 u 当 $r \rightarrow \infty$ 有界。于是舍去 r^n , 保留 r^{-n} , 得到

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \quad (3.25)$$

边界条件给出

$$A_n = \frac{a^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad B_n = \frac{a^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \sin n\theta \, d\theta.$$

该级数也可求和, 得到圆外 Poisson 公式

$$u(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - a^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \phi) + r^2} h(\phi) \frac{d\phi}{2\pi}, \quad r > a. \quad (3.26)$$

4 Green 恒等式与 Green 函数

Laplace 算子的 Green 恒等式直接导向最大值原理与关于能量极小化的 Dirichlet 原理。Green 函数是一种区域内调和函数的“通用解”；其他调和函数都可由它表示。与反射法结合后，Green 函数能非常直接地求解某些特殊几何中的边值问题。

4.1 Green 第一恒等式

本章大量使用散度定理与向量记号。在三维中

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = (f_x, f_y, f_z), \quad \operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

并且

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad |\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2.$$

散度定理为

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dx = \iint_{\operatorname{bdy} D} F \cdot n \, dS, \quad (4.1)$$

其中 D 是有界实体区域， n 是 $\operatorname{bdy} D$ 上的外单位法向量。

由乘法法则

$$(vu_x)_x = v_x u_x + v u_{xx}$$

及 y, z 方向对应式，相加得

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u.$$

积分并对左端使用散度定理，得到 Green 第一恒等式

$$\iint_{\operatorname{bdy} D} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = \iiint_D \nabla v \cdot \nabla u \, dx + \iiint_D v \Delta u \, dx. \quad (4.2)$$

取 $v \equiv 1$ ，得到

$$\iint_{\operatorname{bdy} D} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = \iiint_D \Delta u \, dx. \quad (4.3)$$

因此 Neumann 问题

$$\Delta u = f \text{ in } D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = h \text{ on } \operatorname{bdy} D$$

必须满足相容条件

$$\iint_{\operatorname{bdy} D} h \, dS = \iiint_D f \, dx. \quad (4.4)$$

否则没有解。即使有解，仍可加任意常数，故 Neumann 问题一般不唯一。

三维平均值性质

若 u 在包含球 $|x| < a$ 及其边界的区域中调和, 则在球面上 $n = x/r$, 故 $\partial u / \partial n = \partial u / \partial r$ 。由上式得

$$\iint_{|x|=a} \frac{\partial u}{\partial r} dS = 0.$$

写成球坐标并除以球面积 $4\pi a^2$, 可得球面平均值关于半径 r 的导数为零。因此平均值不随 r 改变。令 $r \rightarrow 0$, 得到

$$\frac{1}{\text{area}(S)} \iint_S u dS = u(0). \quad (4.5)$$

这就是三维调和函数的平均值性质。由平均值性质可像二维情形一样推出最大值原理。

能量方法与 Dirichlet 原理

Dirichlet 问题唯一性也可由能量法证明。若 u 调和且 $u = 0$ 于 $\text{bdy } D$, 在 Green 第一恒等式中取 $v = u$, 得

$$\iint_{\text{bdy } D} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_D |\nabla u|^2 dx.$$

左端为零, 故 $\nabla u \equiv 0$ 。若 D 连通, 则 u 为常数, 又因边界上为零, 故 $u \equiv 0$ 。

Dirichlet 原理说: 在所有满足边界条件

$$w = h(x) \quad \text{on } \text{bdy } D$$

的函数中, 使能量

$$E[w] = \frac{1}{2} \iiint_D |\nabla w|^2 dx \quad (4.6)$$

最小者, 正是满足同一边界条件的调和函数 u 。证明如下。令 $v = u - w$, 则 $v = 0$ 于 $\text{bdy } D$, 并且

$$E[w] = \frac{1}{2} \iiint_D |\nabla(u - v)|^2 dx = E[u] - \iiint_D \nabla u \cdot \nabla v dx + E[v].$$

由 Green 第一恒等式, 因 $v = 0$ 于边界且 $\Delta u = 0$, 中间项为零。因此

$$E[w] = E[u] + E[v] \geq E[u].$$

4.2 Green 第二恒等式

Green 第一恒等式中的中间项 $\iiint_D \nabla u \cdot \nabla v dx$ 在交换 u, v 后不变。将两式相减, 得到 Green 第二恒等式:

$$\iiint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx = \iint_{\text{bdy } D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (4.7)$$

若边界条件使右端对任意满足条件的 u, v 都为零, 则称该边界条件对 Δ 是对称的。Dirichlet、Neumann 与 Robin 三类经典边界条件都是对称的。

表示公式

若 $\Delta u = 0$ 于 D , 则对 $x_0 \in D$, 有三维表示公式

$$u(x_0) = \iint_{\text{bdy } D} \left[-u(x) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x - x_0|} \right) + \frac{1}{|x - x_0|} \frac{\partial u}{\partial n} \right] \frac{dS}{4\pi}. \quad (4.8)$$

这里出现的正是第 6.1 节中的基本径向解 r^{-1} , 只是平移到了点 x_0 。

证明的要点是: 在 Green 第二恒等式中取

$$v(x) = -\frac{1}{4\pi|x - x_0|}.$$

由于 v 在 x_0 奇异, 不能直接在整个 D 上使用恒等式, 而要先从 D 中挖去以 x_0 为中心、半径为 ε 的小球, 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。小球边界上的积分极限给出 $u(x_0)$ 。

二维对应公式为

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{bdy } D} \left[u(x) \frac{\partial}{\partial n} \log |x - x_0| - \frac{\partial u}{\partial n} \log |x - x_0| \right] ds. \quad (4.9)$$

4.3 Green 函数

现在用 Green 恒等式研究 Dirichlet 问题。表示公式中用到函数 $-1/(4\pi|x - x_0|)$ 的两个性质: 除 x_0 外调和, 并且在 x_0 有特定奇性。目标是修改这个函数, 使表示公式中的一项消失; 修改后的函数称为区域 D 的 Green 函数。

给定 $x_0 \in D$, 算子 $-\Delta$ 在区域 D 中的 Green 函数 $G(x, x_0)$ 满足:

- (i) 除 $x = x_0$ 外, G 有连续二阶偏导, 且 $\Delta G = 0$;
- (ii) $G(x, x_0) = 0$ 于 $x \in \text{bdy } D$;
- (iii) $G(x, x_0) + 1/(4\pi|x - x_0|)$ 在 x_0 有限、二阶连续, 并在 x_0 调和。

Green 函数存在且唯一。

若 $G(x, x_0)$ 是 Green 函数, 则 Dirichlet 问题的解满足

$$u(x_0) = \iint_{\text{bdy } D} u(x) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial n} dS. \quad (4.10)$$

证明方法是将

$$G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi|x - x_0|} + H(x)$$

代入表示公式, 并对调和函数 H 使用 Green 第二恒等式; 由于 $G = 0$ 于边界, 含 $\partial u / \partial n$ 的项消失。

Green 函数具有对称性:

$$G(x, x_0) = G(x_0, x), \quad x \neq x_0. \quad (4.11)$$

证明是在挖去两个小球的区域上, 对 $G(x, a)$ 与 $G(x, b)$ 应用 Green 第二恒等式, 再令两小球半径趋于零。

Green 函数还可解 Poisson 方程。若

$$\Delta u = f \quad \text{in } D, \quad u = h \quad \text{on } \text{bdy } D,$$

则

$$u(x_0) = \iint_{\text{bdy } D} h(x) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial n} dS + \iiint_D f(x) G(x, x_0) dx. \quad (4.12)$$

4.4 半空间与球

本节将 Green 函数与反射法结合, 求解半空间和球中的调和函数。

半空间

令半空间

$$D = \{z > 0\}$$

位于 xy 平面上方。点 $x = (x, y, z)$ 关于边界平面的反射点为 $x^* = (x, y, -z)$ 。对固定点 $x_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$, 其反射点为 $x_0^* = (x_0, y_0, -z_0)$ 。

半空间的 Green 函数为

$$G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi|x - x_0|} + \frac{1}{4\pi|x - x_0^*|}. \quad (4.13)$$

它在边界 $z = 0$ 上为零, 因为此时 $|x - x_0| = |x - x_0^*|$ 。用它求解 Dirichlet 问题

$$\Delta u = 0 \quad \text{for } z > 0, \quad u(x, y, 0) = h(x, y),$$

注意外法向向下, 所以 $\partial G / \partial n = -\partial G / \partial z$ 于 $z = 0$ 。计算得

$$-\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \frac{z_0}{|x - x_0|^3} \quad (z = 0).$$

因此

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{h(x, y)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}} dx dy. \quad (4.14)$$

向量形式为

$$u(x_0) = \frac{z_0}{2\pi} \iint_{\text{bdy } D} \frac{h(x)}{|x - x_0|^3} dS. \quad (4.15)$$

球

设 $D = \{|x| < a\}$ 。对 $0 < |x_0| < a$, 反射点 x_0^* 与 $0, x_0$ 共线, 并由

$$|x_0| |x_0^*| = a^2$$

确定, 即

$$x_0^* = \frac{a^2 x_0}{|x_0|^2}. \quad (4.16)$$

记

$$\rho = |x - x_0|, \quad \rho^* = |x - x_0^*|.$$

球的 Green 函数为

$$G(x, x_0) = -\frac{1}{4\pi\rho} + \frac{a}{|x_0|} \frac{1}{4\pi\rho^*}. \quad (4.17)$$

当 $|x| = a$ 时, 有

$$\frac{|x_0|}{a} \rho^* = \rho,$$

所以 $G = 0$ 于球面。

若 $x_0 = 0$, Green 函数为

$$G(x, 0) = -\frac{1}{4\pi|x|} + \frac{1}{4\pi a}. \quad (4.18)$$

对球中 Dirichlet 问题

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } |x| < a, \quad u = h \quad \text{on } |x| = a,$$

计算边界法向导数得到

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{a^2 - |x_0|^2}{4\pi a |x - x_0|^3} \quad (|x| = a).$$

于是三维 Poisson 公式为

$$u(x_0) = \frac{a^2 - |x_0|^2}{4\pi a} \iint_{|x|=a} \frac{h(x)}{|x - x_0|^3} dS. \quad (4.19)$$

用通常球坐标写成

$$u(r_0, \theta_0, \phi_0) = \frac{a(a^2 - r_0^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{h(\theta, \phi) \sin \theta}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \psi)^{3/2}} d\theta d\phi, \quad (4.20)$$

其中 ψ 是 x_0 与 x 的夹角。

二维情形可从基本函数 $(1/2\pi)\log r$ 出发, 以相同反射法恢复圆盘 Poisson 公式。此时

$$G(x, x_0) = \frac{1}{2\pi} \log \rho - \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{r_0}{a} \rho^* \right), \quad (4.21)$$

从而得到

$$u(x_0) = \frac{a^2 - |x_0|^2}{2\pi a} \int_{|x|=a} \frac{h(x)}{|x - x_0|^2} ds,$$

这正是第 6.3 节所得的 Poisson 公式。