

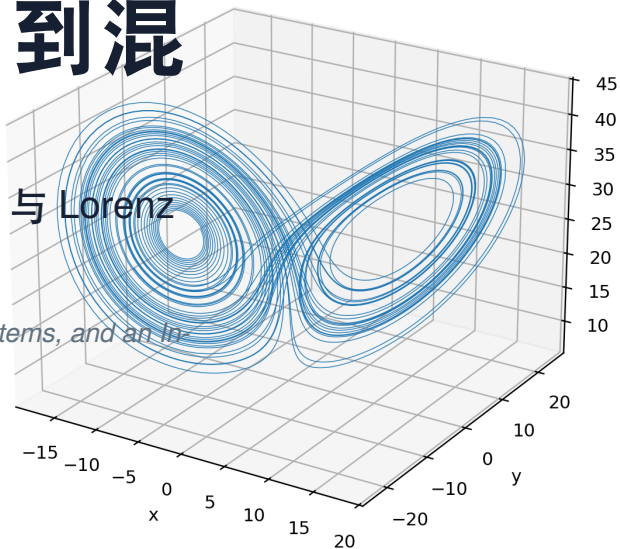
从应用模型到混沌吸引子

SIR、van der Pol、Kepler 与 Lorenz

基于 Hirsch–Smale–Devaney

Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos

小组汇报 2026 年 5 月 25 日



主线：四个模型，四种长期行为

Ch.11

SIR：传播、阈值与相平面

Ch.12

van der Pol / Hopf：平衡点如何生出振荡

Ch.13

Kepler：守恒量如何决定轨道形状

Ch.14

Lorenz：确定性系统中的混沌

汇报的共同问题

我们不追求把方程显式解完，而是问：

解最终会趋向什么？会不会振荡？会不会不可预测？

趋向无病线或地方病平衡



趋向稳定极限环



沿守恒轨道运动



进入奇异吸引子

Chapter 11

SIR: 阈值与相平面

从具体模型读出长期行为

SIR 模型：最小的传播机制

三类人群

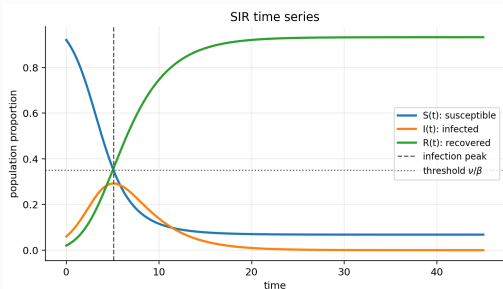
$S(t)$: 易感者, $I(t)$: 感染者, $R(t)$: 移除者.

$$S' = -\beta SI, \quad I' = \beta SI - \nu I, \quad R' = \nu I.$$

守恒量

$$(S + I + R)' = 0, \quad S + I + R = N.$$

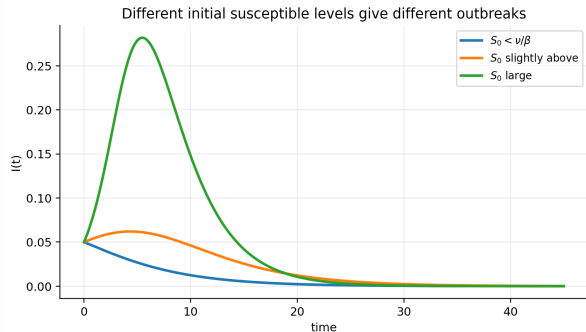
因此核心相图可以降到 S - I 平面。



一句话解释感染项

新感染来自“易感者遇到感染者”，所以在均匀混合假设下自然出现乘积项 βSI 。

阈值：什么时候感染人数开始下降？



关键只在一行

$$I' = I(\beta S - \nu).$$

当 $I > 0$ 时,

$$S > \frac{\nu}{\beta} \Rightarrow I' > 0, \quad S < \frac{\nu}{\beta} \Rightarrow I' < 0.$$

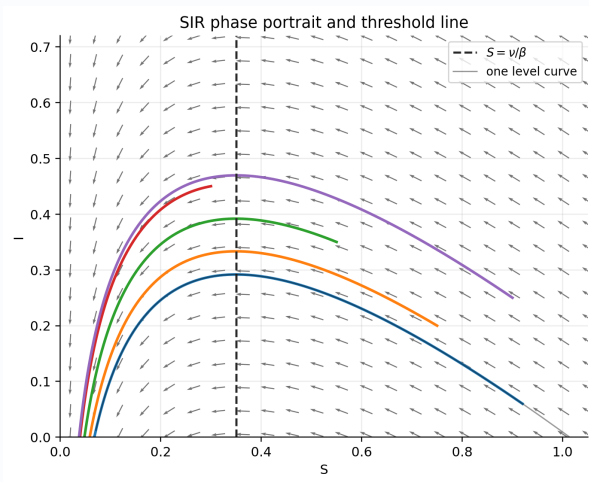
容易讲错的点

阈值不是“感染者人数超过某个数”，
而是易感者 S 是否还高于

$$S_c = \frac{\nu}{\beta}.$$

相平面：不用显式求解也能看懂轨道

SIR 传染病模型



轨道方程

在 $S > 0, I > 0$ 中,

$$\frac{dI}{dS} = \frac{I'}{S'} = -1 + \frac{\nu}{\beta S}.$$

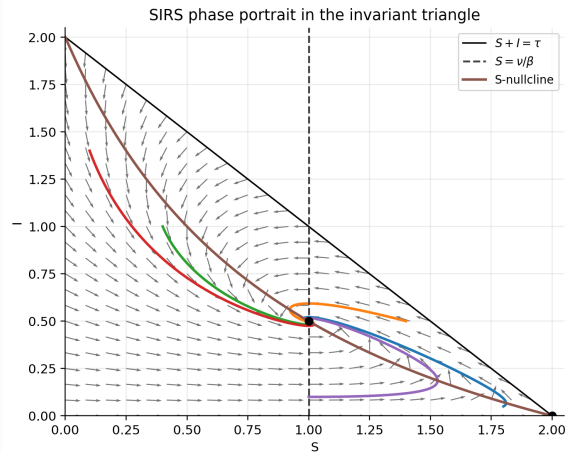
积分得到第一积分

$$I + S - \frac{\nu}{\beta} \ln S = C.$$

图像读法

轨道整体向左走；穿过直线 $S = \nu/\beta$ 后，感染人数从上升转为下降。

SIRS 扩展：免疫失效后会怎样？



把 R 重新送回 S

$$S' = -\beta SI + \mu R, \quad I' = \beta SI - \nu I, \quad R' = \nu I - \mu R$$

仍有 $S + I + R = \tau$ ，所以可降到二维。

地方病平衡

若 $\tau > \nu/\beta$ ，除无病平衡外，还出现

$$(S^*, I^*) = \left(\frac{\nu}{\beta}, \frac{\mu(\tau - \nu/\beta)}{\nu + \mu} \right).$$

它在局部是渐近稳定的。

守恒降维

$$S + I + R = N$$

把三维模型压缩成二维分析。

阈值判据

$$S_c = \nu/\beta$$

决定感染人数此刻上升还是下降。

相轨道

$$I + S - \frac{\nu}{\beta} \ln S = C$$

给出整体几何图像。

下一步：系统并不总是走向平衡点，非线性也能制造稳定振荡。

Chapter 12

van der Pol: 振荡如何诞生

从具体模型读出长期行为

van der Pol 方程：自激振荡的原型

van der Pol 与 Hopf 分岔

Lienard 形式

教材中常写成

$$x' = y - F(x), \quad y' = -x,$$

其中对 van der Pol 型方程可取

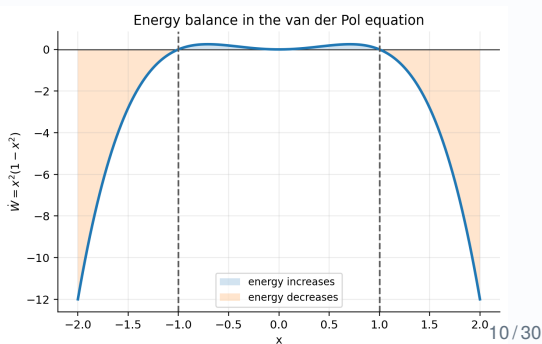
$$F(x) = x^3 - \mu x.$$

于是

$$x' = y - x^3 + \mu x, \quad y' = -x.$$

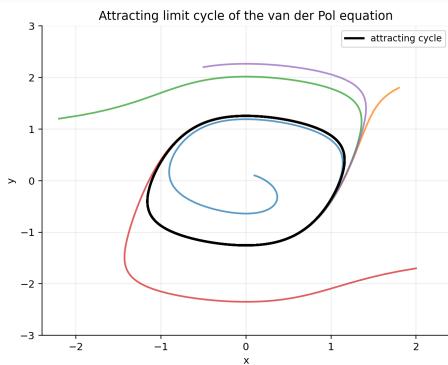
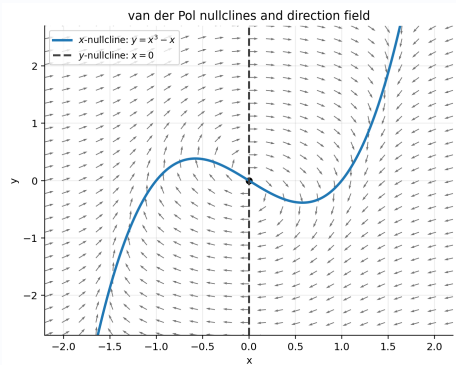
直觉

小振幅时系统“补能”，大振幅时系统“耗能”。
两种作用平衡后，轨道不落到原点，而是稳定地绕圈。



零线与极限环：从相图先看结构

van der Pol 与 Hopf 分岔



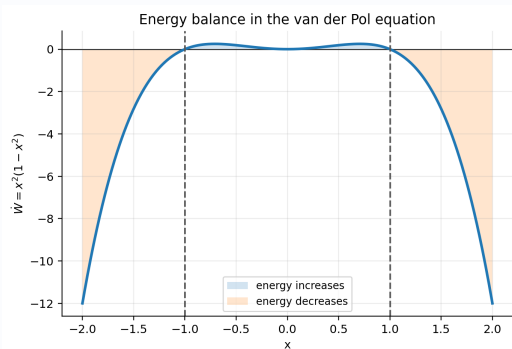
零线与方向场

吸引极限环

二维非线性系统的长期行为也可能是一条吸引的周期轨道。

能量图像：为什么会有稳定振荡？

van der Pol 与 Hopf 分岔



取能量函数

$$W(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

沿轨道计算可得到类似

$$\dot{W} = x^2(1-x^2)$$

的符号结构。

符号解释

$$|x| < 1: \dot{W} > 0, \quad |x| > 1: \dot{W} < 0.$$

小圈被推大，大圈被压小，于是中间形成稳定振荡。

Hopf 分岔：平衡点附近生出周期轨道

van der Pol 与 Hopf 分岔

典型局部模型

$$x' = y + x(\mu - r^2), \quad y' = -x + y(\mu - r^2),$$

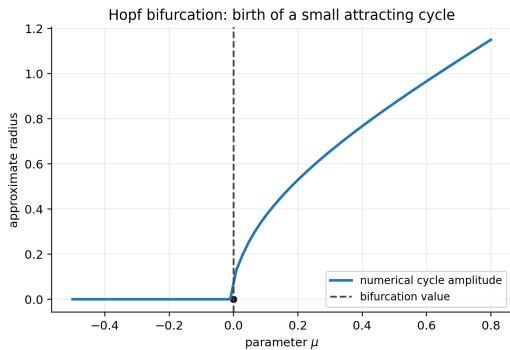
其中 $r^2 = x^2 + y^2$.

$$\dot{r} = r(\mu - r^2), \quad \dot{\theta} = -1.$$

分岔结论

$\mu < 0$: $r = 0$ 稳定; $\mu > 0$: $r = \sqrt{\mu}$ 稳定.

参数穿过 0 时, 小的稳定周期轨道出现.



Hopf 的相图变化

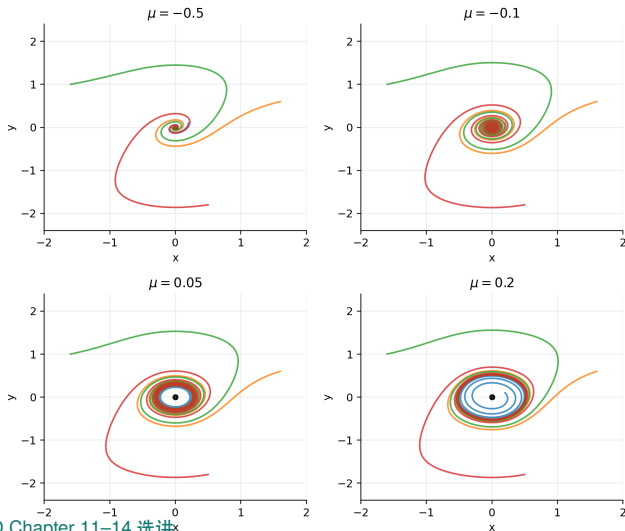
van der Pol 与 Hopf 分岔

从静止到振荡

分岔前后，方程没有突然变复杂；
变的是平衡点附近的稳定结构。

和 van der Pol 的联系

van der Pol 展示“已经形成”的稳定周期轨道；Hopf 分岔解释这种周期轨道怎样从平衡点附近诞生。



Chapter 13

Kepler: 守恒量决定轨道

从具体模型读出长期行为

牛顿中心力系统

质点在平面中满足

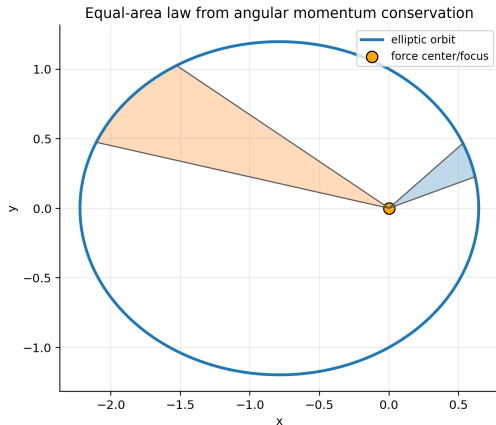
$$\mathbf{r}'' = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}, \quad r = \|\mathbf{r}\|.$$

力总是指向中心，大小与 $1/r^2$ 成正比。

两个守恒量

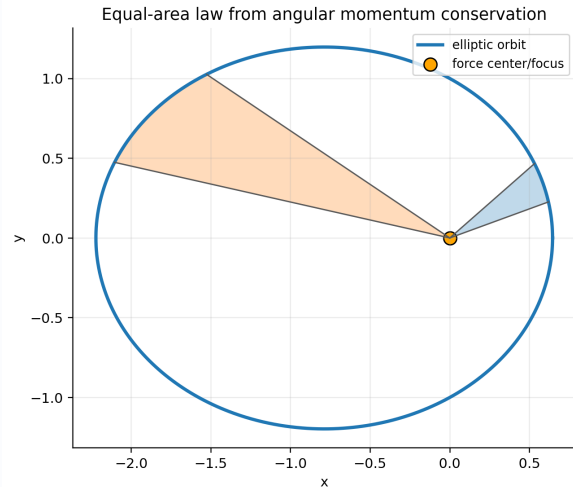
$$E = \frac{1}{2}\|\mathbf{r}'\|^2 - \frac{k}{r}, \quad \ell = xy' - yx'.$$

能量 E 控制轨道类型，角动量 ℓ 控制面积速度。



角动量守恒：等面积定律

Kepler 第一定律



极坐标表达

$$\ell = r^2 \theta'.$$

扇形面积速度为

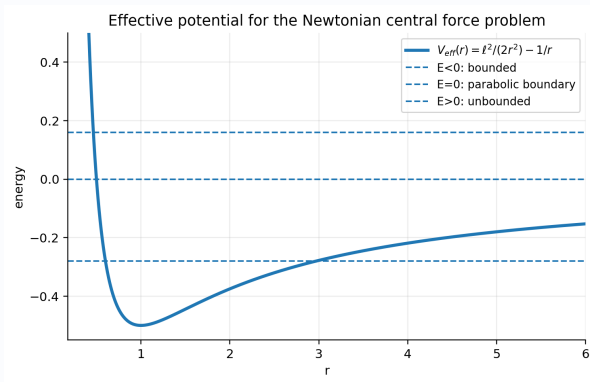
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \theta' = \frac{\ell}{2}.$$

解释

相等时间扫过相等面积，不是另加的天文假设，而是中心力场角动量守恒的直接后果。

有效势：把径向运动看成一维问题

Kepler 第一定律



能量分解

$$E = \frac{1}{2}r'^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{k}{r}}_{V_{\text{eff}}(r)}$$

读图

$E < 0$: 有界轨道, $E = 0$: 临界逃逸,

$E > 0$: 无界轨道.

Binet 变换：轨道方程变成线性方程

Kepler 第一定律

核心代换

令

$$W = \frac{1}{r}.$$

用角度 θ 代替时间作为自变量，可得到

$$\frac{d^2 W}{d\theta^2} + W = \frac{k}{\ell^2}.$$

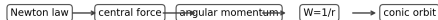
线性方程的解为

$$W(\theta) = \frac{k}{\ell^2} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)).$$

于是轨道方程为

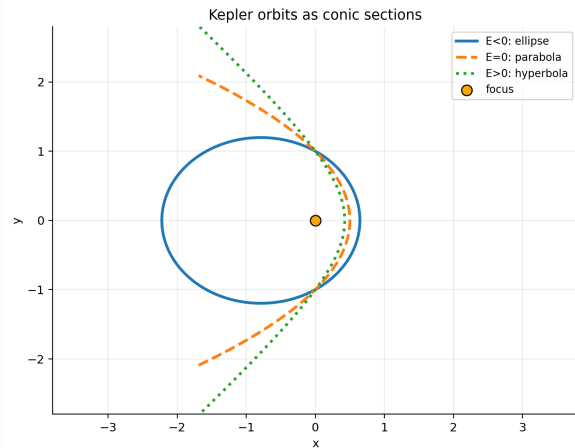
$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}.$$

Logical chain of the Kepler derivation



Kepler 第一定律：轨道是圆锥曲线

Kepler 第一定律



偏心率分类

$0 \leq e < 1$: 椭圆, $e = 1$: 抛物线,

$e > 1$: 双曲线.

本节收束

Newton 方程 $\Rightarrow$ 守恒量 $\Rightarrow$ Binet 线性方程 $\Rightarrow$ 圆锥曲线。

Chapter 14

Lorenz: 确定性中的混沌

从具体模型读出长期行为

为什么进入三维？

二维系统的限制

Poincare–Bendixson 理论告诉我们：平面自治系统的极限行为受到很强约束。若极限集非空、紧且不含平衡点，则它是一条周期轨道。

所以混沌需要更高维

要出现持续的拉伸、折叠和复杂返回，三维是最小舞台之一。

Lorenz 系统

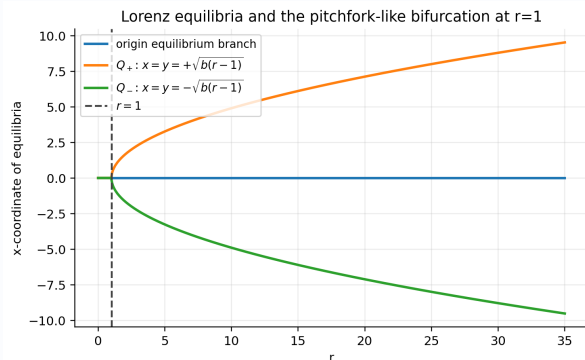
$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x), \\ y' = rx - y - xz, \\ z' = xy - bz. \end{cases}$$

经典参数：

$$\sigma = 10, \quad b = \frac{8}{3}, \quad r = 28.$$

这一页的作用

先说明为什么二维理论不够，下一页再展示参数变化带来的平衡点结构。



平衡点

总有原点 $O = (0, 0, 0)$ 。当 $r > 1$ 时，还出现

$$C_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

读图

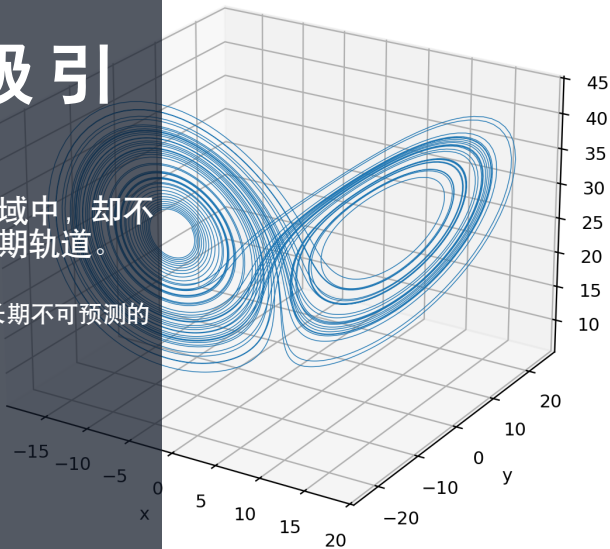
参数 r 不是只改变数值大小，它改变平衡点数量和稳定性，给复杂行为打开口。

Lorenz attractor, $\sigma=10$, $b=8/3$, $r=28$

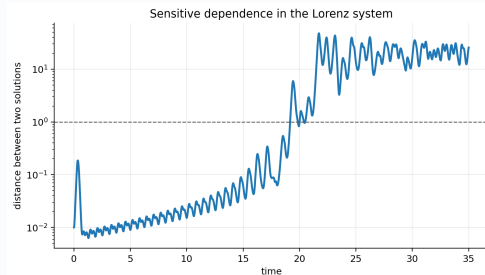
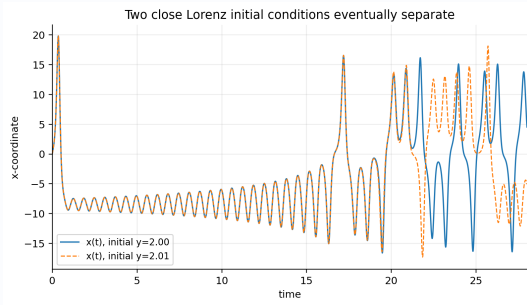
Lorenz 吸引子

轨道被困在有界区域中，却不收敛到平衡点或周期轨道。

确定性方程也可以产生长期不可预测的行为。

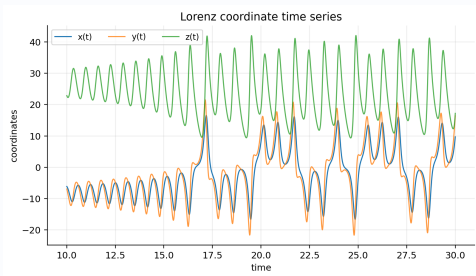


敏感依赖：初值差一点，长期差很多

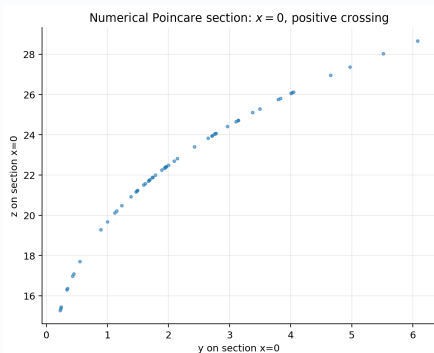


混沌的核心观感

两条轨道起初几乎重合，随后距离快速放大。
短期可预测，长期预测会被初值误差吞没。



确定性方程给出的不规则时间序列



用截面把连续流降成返回映射

教材视角

严谨混沌证明通常借助几何模型或 Poincare 映射；汇报中强调思想和图像即可。

有界吸引

轨道不会逃到无穷远，而是被吸引到有限区域。

敏感依赖

任意小的初值误差，会在长期演化中造成可观差异。

非周期复杂性

轨道反复返回，却不简单重复；这正是吸引子“奇异”的地方。

确定性 $\neq$ 长期可预测

主题	方程来自哪里	关键工具	长期行为图像
SIR	传染病传播	守恒量、零线、第一积分	阈值控制感染峰值，趋向无病线或地方病平衡
van der Pol / Hopf Kepler Lorenz	非线性电路与振荡 牛顿中心力场 热对流简化模型	能量估计、极限环、分岔 能量、角动量、Binet 变换 平衡点、截面、敏感依赖	平衡点附近诞生稳定周期轨道 有界或无界的圆锥曲线轨道 有界但非周期的奇异吸引子

收束句

这四个例子把 Chapter 11–14 串成一条线：从二维应用模型，到周期运动与分岔，再到守恒力学，最后进入三维混沌。

SIR

$$I' = I(\beta S - \nu), \quad I + S - \frac{\nu}{\beta} \ln S = C.$$

Kepler

$$E = \frac{1}{2}r'^2 + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{k}{r}, \quad W'' + W = \frac{k}{\ell^2}.$$

van der Pol / Hopf

$$\begin{aligned} x' &= y - x^3 + \mu x, & y' &= -x, \\ \dot{r} &= r(\mu - r^2). \end{aligned}$$

Lorenz

$$x' = \sigma(y - x), \quad y' = rx - y - xz, \quad z' = xy - bz.$$



Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney.

Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos.

Third Edition, Academic Press.



本汇报配套讲稿:

`ch11_14_selected_lecture_notes_revised.pdf.`



图像由配套 MATLAB 文件生成:

`selected_ch11_14_figures_revised.m.`

谢谢大家