

第 2 章 四个重要的线性偏微分方程

Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, Second Edition

目录

1	2.1. 输运方程	2
2	2.2. Laplace 方程	4
2.1	2.2.2. 平均值公式	9
2.2	2.2.3. 调和函数的性质	10
2.3	2.2.4. Green 函数	17
2.4	2.2.5. 能量方法	23
3	2.3. 热方程	25
3.1	2.3.1. 基本解	26
3.2	2.3.2. 平均值公式	31
3.3	2.3.3. 解的性质	33
3.4	2.3.4. 能量方法	38
4	2.4. 波方程	41
4.1	2.4.1. 由球面平均求解	42
4.2	2.4.2. 非齐次问题	53
4.3	2.4.3. 能量方法	55
5	2.5. 习题	57

在本章中，我们介绍四个基本的线性偏微分方程，对它们可以写出各种显式解公式。它们是

$$\text{输运方程} \quad u_t + b \cdot Du = 0 \quad (\S 2.1),$$

$$\text{Laplace 方程} \quad \Delta u = 0 \quad (\S 2.2),$$

$$\text{热方程} \quad u_t - \Delta u = 0 \quad (\S 2.3),$$

$$\text{波方程} \quad u_{tt} - \Delta u = 0 \quad (\S 2.4).$$

在继续之前，读者应先回顾附录 B 和 C 中关于不等式、分部积分、Green 公式、卷积等内容的讨论，并在需要时随时回查。

2.1. 输运方程

最简单的偏微分方程之一，是具有常系数的输运方程。它是偏微分方程

$$u_t + b \cdot Du = 0 \quad \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad (1)$$

其中 b 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个固定向量，

$$b = (b_1, \dots, b_n),$$

而 $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是未知函数， $u = u(x, t)$ 。这里 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 表示空间中的典型点， $t \geq 0$ 表示典型时间。我们记

$$Du = D_x u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

为 u 关于空间变量 x 的梯度。

哪些函数 u 求解 (1)? 为了回答这个问题，先暂时假定我们已经有一个光滑解 u ，并试图把它计算出来。首先要注意，偏微分方程 (1) 断言 u 的某个方向导数为零。固定任意点 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ，并定义

$$z(s) := u(x + sb, t + s) \quad (s \in \mathbb{R}).$$

于是

$$\dot{z}(s) = Du(x + sb, t + s) \cdot b + u_t(x + sb, t + s) = 0 \quad \left(\dot{z} = \frac{dz}{ds} \right),$$

其中第二个等号由 (1) 得出。因此 $z(\cdot)$ 是 s 的常数函数。于是，对每个点 (x, t) ，函数 u 在经过 (x, t) 且方向为 $(b, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 的直线上为常数。因此，只要知道每条这样的直线上任一点处 u 的值，就知道了 u 在整个 $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 中的值。

2.1.1. 初值问题

为确定起见, 考虑初值问题

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (2)$$

这里 $b \in \mathbb{R}^n$ 和 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 已知, 问题是求 u 。给定如上的 (x, t) , 经过 (x, t) 且方向为 $(b, 1)$ 的直线可参数化为

$$(x + sb, t + s) \quad (s \in \mathbb{R}).$$

当 $s = -t$ 时, 这条直线在点 $(x - tb, 0)$ 处与平面

$$\Gamma := \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$$

相交。由于 u 在该直线上为常数, 且

$$u(x - tb, 0) = g(x - tb),$$

我们推出

$$u(x, t) = g(x - tb) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0). \quad (3)$$

所以, 若 (2) 有足够正则的解 u , 它必定由 (3) 给出。反过来, 直接检验也很容易: 若 g 属于 C^1 , 则由 (3) 定义的 u 确实是 (2) 的解。

弱解. 若 g 不是 C^1 , 则 (2) 显然没有 C^1 解。但即便在这种情形下, 公式 (3) 仍然给出一个强有力的、事实上也是唯一合理的解候选。因此, 即使 g 不是 C^1 , 我们仍可以非正式地称

$$u(x, t) = g(x - tb) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)$$

为 (2) 的弱解。即使 g 以及 u 不连续, 这个说法仍有意义。一个非光滑、甚至不连续的函数有时也可以求解偏微分方程; 稍后在第 3.4 节研究非线性输运现象时, 我们还会再次遇到这一观念。

2.1.2. 非齐次问题

下面考察相应的非齐次问题

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = f, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (4)$$

像前面一样固定 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 。受上述计算启发, 令

$$z(s) := u(x + sb, t + s) \quad (s \in \mathbb{R}).$$

则

$$\dot{z}(s) = Du(x + sb, t + s) \cdot b + u_t(x + sb, t + s) = f(x + sb, t + s).$$

因此

$$\begin{aligned} u(x, t) - g(x - tb) &= z(0) - z(-t) \\ &= \int_{-t}^0 \dot{z}(s) ds \\ &= \int_{-t}^0 f(x + sb, t + s) ds \\ &= \int_0^t f(x + (s - t)b, s) ds. \end{aligned}$$

于是

$$u(x, t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (s - t)b, s) ds \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0) \quad (5)$$

求解初值问题 (4)。

稍后在第 2.4.1 节中, 我们将使用这个公式来求解一维波方程。

注. 注意, 我们推导 (3)、(5) 中的解, 实质上是把偏微分方程化成了常微分方程。这个过程是特征线方法的一个特例; 该方法将在第 3.2 节中展开。

2.2. Laplace 方程

在所有偏微分方程中, 最重要的无疑包括 Laplace 方程

$$\Delta u = 0 \quad (1)$$

和 Poisson 方程¹

$$-\Delta u = f. \quad (2)$$

在 (1) 和 (2) 中, $x \in U$, 未知函数为

$$u : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u = u(x),$$

其中 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是给定的开集。在 (2) 中, 函数 $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 也是给定的。回忆第 A.3 节中 u 的 Laplace 算子定义为

$$\Delta u := \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

定义. 满足 (1) 的 C^2 函数 u 称为调和函数。

¹我宁愿在 (2) 中写上负号, 以便同第 6 章中一般二阶椭圆算子的记号保持一致。

物理解释. Laplace 方程出现在各种各样的物理背景中。一个典型解释是, u 表示某种处于平衡状态的量 (例如化学浓度) 的密度。那么若 V 是 U 内任一光滑子区域, u 通过 ∂V 的净通量为零:

$$\int_{\partial V} F \cdot \nu \, dS = 0,$$

其中 F 表示通量密度, ν 表示单位外法向量场。由 Gauss–Green 定理 (第 C.2 节) 可知

$$\int_V \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial V} F \cdot \nu \, dS = 0,$$

于是

$$\operatorname{div} F = 0 \quad \text{于 } U, \quad (3)$$

因为 V 是任意的。在许多情形下, 从物理上说, 假设通量 F 与梯度 Du 成比例但方向相反是合理的 (因为流动从较高浓度区域流向较低浓度区域)。因此

$$F = -aDu \quad (a > 0). \quad (4)$$

代入 (3), 便得到 Laplace 方程

$$\operatorname{div}(Du) = \Delta u = 0.$$

若 u 表示

$$\begin{cases} \text{化学浓度,} \\ \text{温度,} \\ \text{静电势,} \end{cases}$$

则方程 (4) 分别是

$$\begin{cases} \text{Fick 扩散定律,} \\ \text{Fourier 热传导定律,} \\ \text{Ohm 电传导定律.} \end{cases}$$

关于 Laplace 方程在数学物理中的普遍性, 可参见 Feynman–Leighton–Sands [F–L–S, Chapter 12] 的讨论。Laplace 方程同样出现在解析函数研究以及 Brownian 运动的概率研究中。

2.2.1. 基本解

a. 基本解的推导. 研究任何偏微分方程的一个好策略, 是先找出若干显式解; 然后在偏微分方程是线性的前提下, 把较复杂的解由这些已经找到的特殊解组合出来。此外, 在寻找显式解时, 通常明智的做法是把注意力限制在具有某些对称性的函数类上。由于 Laplace 方程在旋转下不变 (问题 2), 因此似乎应当首先寻找径向解, 也就是 $r = |x|$ 的函数。

所以我们尝试在 $U = \mathbb{R}^n$ 中寻找 Laplace 方程 (1) 的一个解 u , 其形式为

$$u(x) = v(r),$$

其中

$$r = |x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2},$$

而 v 待选取, 使得 (若可能) $\Delta u = 0$ 成立。首先注意到, 对于 $i = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0).$$

因此

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right),$$

对 $i = 1, \dots, n$ 成立, 从而

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

于是 $\Delta u = 0$ 当且仅当

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0. \quad (5)$$

若 $v' \neq 0$, 则推出

$$(\log |v'|)' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r},$$

因而对于某个常数 a ,

$$v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}.$$

所以若 $r > 0$, 则

$$v(r) = \begin{cases} b \log r + c, & n = 2, \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c, & n \geq 3, \end{cases}$$

其中 b, c 为常数。

这些考察引出如下定义。

定义. 函数

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases} \quad (6)$$

定义在 $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ 上, 称为 Laplace 方程的基本解。

(6) 中常数的特殊选取, 马上就会显出其原因。(回忆第 A.2 节, $\alpha(n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积。) 有时我们会稍微滥用记号, 写作 $\Phi(x) = \Phi(|x|)$, 以强调基本解是径向的。还要注意, 对某个常数 $C > 0$, 有估计

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}, \quad |D^2\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^n} \quad (x \neq 0). \quad (7)$$

b. Poisson 方程. 按构造, 函数 $x \mapsto \Phi(x)$ 在 $x \neq 0$ 处是调和的。若把原点平移到一个新点 y , 偏微分方程 (1) 不变; 所以作为 x 的函数, $x \mapsto \Phi(x-y)$ 在 $x \neq y$ 处也调和。现在取 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 并注意到对每个点 $y \in \mathbb{R}^n$, 映射

$$x \mapsto \Phi(x-y)f(y) \quad (x \neq y)$$

是调和的; 因此, 由不同点 y 构造出的有限多个这样的表达式之和仍然调和。

这个推理可能暗示, 卷积

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) dy \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log(|x-y|)f(y) dy, & n=2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy, & n \geq 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

会求解 Laplace 方程 (1)。然而, 这是错误的。事实上, 如估计 (7) 所提示的, $D^2\Phi(x-y)$ 在奇点 $y=x$ 附近不可积, 因此朴素地在积分号下求导并没有根据 (而且是不正确的)。在计算 Δu 时, 我们必须更加小心。

为简单起见, 现在假设 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$; 也就是说, f 二阶连续可微并且具有紧支集。

定理 1 (Poisson 方程的求解). 由 (8) 定义 u 。那么

$$(i) u \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad (ii) -\Delta u = f \quad \text{于 } \mathbb{R}^n.$$

于是我们看到, (8) 给出了 $\mathbb{R}^n$ 中 Poisson 方程 (2) 的一个解的公式。

证明. 1. 我们有

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y) dy; \quad (9)$$

因此

$$\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \left[\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \right] dy,$$

其中 $h \neq 0$, 而 $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, 1 位于第 i 个分量。可是

$$\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \rightarrow f_{x_i}(x-y)$$

当 $h \rightarrow 0$ 时在 $\mathbb{R}^n$ 上一致成立, 于是

$$u_{x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f_{x_i}(x-y) dy \quad (i=1, \dots, n).$$

类似地,

$$u_{x_i x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f_{x_i x_j}(x-y) dy \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (10)$$

(10) 右端关于变量 x 连续, 因此 $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ 。

2. 由于 Φ 在 0 处发散, 后面的计算需要把这个奇点隔离在一个小球内。固定 $\varepsilon > 0$ 。那么

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \int_{B(0, \varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy + \int_{\mathbb{R}^n - B(0, \varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy \\ &:= I_\varepsilon + J_\varepsilon. \end{aligned} \quad (11)$$

现在

$$|I_\varepsilon| \leq C \|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0, \varepsilon)} |\Phi(y)| dy \leq \begin{cases} C\varepsilon^2 |\log \varepsilon|, & n = 2, \\ C\varepsilon^2, & n \geq 3. \end{cases} \quad (12)$$

一次分部积分 (见第 C.2 节) 给出

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n - B(0, \varepsilon)} \Phi(y) \Delta_y f(x-y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n - B(0, \varepsilon)} D\Phi(y) \cdot D_y f(x-y) dy + \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y) dS(y) \\ &:= K_\varepsilon + L_\varepsilon, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 ν 表示沿 $\partial B(0, \varepsilon)$ 指向内部的单位法向量。容易检查

$$|L_\varepsilon| \leq \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} |\Phi(y)| dS(y) \leq \begin{cases} C\varepsilon |\log \varepsilon|, & n = 2, \\ C\varepsilon, & n \geq 3. \end{cases} \quad (14)$$

3. 我们继续对 K_ε 再做一次分部积分, 得到

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n - B(0, \varepsilon)} \Delta\Phi(y) f(x-y) dy - \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x-y) dS(y) \\ &= - \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x-y) dS(y), \end{aligned}$$

因为 Φ 在远离原点处调和。又

$$D\Phi(y) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{y}{|y|^n} \quad (y \neq 0), \quad \nu = -\frac{y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon}$$

在 $\partial B(0, \varepsilon)$ 上成立。因此

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) = \nu \cdot D\Phi(y) = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \quad \text{于 } \partial B(0, \varepsilon).$$

由于 $n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}$ 正是球面 $\partial B(0, \varepsilon)$ 的面积, 我们有

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= -\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} f(x-y) dS(y) \\ &= - \oint_{\partial B(x, \varepsilon)} f(y) dS(y) \rightarrow -f(x) \quad \text{当 } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (15)$$

(回忆第 A.3 节, 积分号上的斜线表示平均值。)

4. 现在合并 (11)–(15), 并令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 便得到 $-\Delta u(x) = f(x)$, 如所断言。□

事实上, 定理 1 在远弱于上述假设的 f 的光滑性条件下仍然成立; 参见 Gilbarg–Trudinger [G–T]。

基本解的解释. 我们有时写

$$-\Delta \Phi = \delta_0 \quad \text{于 } \mathbb{R}^n,$$

其中 δ_0 表示 $\mathbb{R}^n$ 上在点 0 赋予单位质量的 Dirac 测度。采用这个记号, 可以形式地计算

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta_x \Phi(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta_x f(y) dy = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

这同定理 1 一致。

2.2.2. 平均值公式

现在考虑开集 $U \subset \mathbb{R}^n$, 并设 u 是 U 内的调和函数。下面我们推导重要的平均值公式, 它们断言: 只要 $B(x, r) \subset U$, 则 $u(x)$ 等于 u 在球面 $\partial B(x, r)$ 上的平均值, 也等于 u 在整个球 $B(x, r)$ 上的平均值。正如我们马上会看到的, 这些涉及 u 的隐式公式会产生大量后果。

定理 2 (Laplace 方程的平均值公式). 若 $u \in C^2(U)$ 是调和的, 那么

$$u(x) = \oint_{\partial B(x, r)} u dS = \oint_{B(x, r)} u dy \quad (16)$$

对每个球 $B(x, r) \subset U$ 成立。

证明. 1. 设

$$\phi(r) := \oint_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y) = \oint_{\partial B(0, 1)} u(x + rz) dS(z).$$

于是

$$\phi'(r) = \oint_{\partial B(0, 1)} Du(x + rz) \cdot z dS(z),$$

从而利用第 C.2 节中的 Green 公式, 我们计算得到

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \oint_{\partial B(x, r)} Du(y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \\ &= \oint_{\partial B(x, r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS(y) \\ &= \frac{r}{n} \oint_{B(x, r)} \Delta u(y) dy = 0. \end{aligned}$$

因此 ϕ 是常数, 所以

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \oint_{\partial B(x,t)} u(y) dS(y) = u(x).$$

2. 接着注意, 像第 C.3 节那样使用极坐标, 可得

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} u dy &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} u dS \right) ds \\ &= u(x) \int_0^r n\alpha(n)s^{n-1} ds \\ &= \alpha(n)r^n u(x). \end{aligned}$$

这就证明了第二个平均值公式。□

定理 3 (平均值性质的逆命题). 若 $u \in C^2(U)$ 满足

$$u(x) = \oint_{\partial B(x,r)} u dS$$

对每个球 $B(x,r) \subset U$ 成立, 那么 u 是调和的。

证明. 若 $\Delta u \not\equiv 0$, 则存在某个球 $B(x,r) \subset U$, 使得例如 $\Delta u > 0$ 于 $B(x,r)$ 内。可是对上面定义的 ϕ , 有

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} \oint_{\partial B(x,r)} \Delta u(y) dy > 0,$$

矛盾。□

2.2.3. 调和函数的性质

现在我们给出关于调和函数的一系列有趣推论, 它们都基于平均值公式。以下假设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集。

a. 强极大值原理, 唯一性. 我们首先断言: 调和函数必在边界上取得最大值; 并且, 除非它是常数, 否则不能在连通区域的内部取得最大值。

定理 4 (强极大值原理). 设 $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ 在 U 内调和。

(i) 那么

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u.$$

(ii) 进一步, 若 U 连通, 并且存在一点 $x_0 \in U$ 使得

$$u(x_0) = \max_{\bar{U}} u,$$

则

u 在 U 内为常数.

断言 (i) 是 Laplace 方程的极大值原理, (ii) 是强极大值原理. 把 u 换成 $-u$, 也可得到把 “max” 换成 “min” 的类似断言.

证明. 假设存在点 $x_0 \in U$, 使得

$$u(x_0) = M := \max_{\bar{U}} u.$$

那么对 $0 < r < \text{dist}(x_0, \partial U)$, 平均值性质断言

$$M = u(x_0) = \oint_{B(x_0, r)} u \, dy \leq M.$$

等号只有在 $u \equiv M$ 于 $B(x_0, r)$ 内成立时才可能成立, 因此对所有 $y \in B(x_0, r)$, 有 $u(y) = M$. 于是集合

$$\{x \in U \mid u(x) = M\}$$

在 U 中既是开集又是相对闭集; 若 U 连通, 它便等于 U . 这证明了断言 (ii), 而 (i) 随之成立. $\square$

正性. 强极大值原理特别断言: 若 U 连通, 且 $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{于 } U, \\ u = g, & \text{于 } \partial U, \end{cases}$$

其中 $g \geq 0$, 那么只要 g 在 ∂U 的某处为正, u 就在 U 的每一点为正.

极大值原理的一个重要应用, 是证明 Poisson 方程某些边值问题解的唯一性.

定理 5 (唯一性). 设 $g \in C(\partial U)$, $f \in C(U)$. 那么边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{于 } U, \\ u = g, & \text{于 } \partial U \end{cases} \quad (17)$$

至多有一个解 $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$.

证明. 若 u 和 $\tilde{u}$ 都满足 (17), 则把定理 4 应用于调和函数

$$w := \pm(u - \tilde{u}).$$

于是 $u - \tilde{u}$ 的最大值和最小值都只能为零, 故 $u = \tilde{u}$. $\square$

b. 正则性. 下面我们证明: 若 $u \in C^2$ 是调和的, 则必有 $u \in C^\infty$ 。因此调和函数自动无穷次可微。这类断言称为正则性定理。有趣之处在于, Laplace 方程

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0$$

的代数结构, 导出了一个解析上的结论: u 的所有偏导数都存在, 甚至包括那些没有出现在该偏微分方程中的偏导数。

定理 6 (光滑性). 若 $u \in C(U)$ 对每个球 $B(x, r) \subset U$ 都满足平均值性质 (16), 那么

$$u \in C^\infty(U).$$

请仔细注意, u 在 ∂U 上未必光滑, 甚至未必连续。

证明. 令 η 为第 C.5 节所述的标准磨光核, 并回忆 η 是径向函数。在

$$U_\varepsilon := \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$$

内设

$$u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u.$$

如第 C.5 节所示, $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ 。

我们将证明事实上 $u \equiv u^\varepsilon$ 于 U_ε 上, 从而证明 u 光滑。的确, 若 $x \in U_\varepsilon$, 则

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= \int_U \eta_\varepsilon(x-y)u(y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x, \varepsilon)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B(x, r)} u dS \right) dr \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} u(x) \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) n\alpha(n)r^{n-1} dr \quad \text{由(16)} \\ &= u(x) \int_{B(0, \varepsilon)} \eta_\varepsilon dy = u(x). \end{aligned}$$

因此 $u^\varepsilon \equiv u$ 于 U_ε 上, 所以对每个 $\varepsilon > 0$, 有 $u \in C^\infty(U_\varepsilon)$ 。□

c. 调和函数的局部估计. 现在我们使用平均值公式, 推导调和函数各阶偏导数的精细估计。稍后证明解析性时, 将需要这些估计的精确结构。

定理 7 (导数估计). 设 u 在 U 中调和. 那么对每个球 $B(x_0, r) \subset U$ 和每个阶数为 $|\alpha| = k$ 的多重指标 α , 有

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}. \quad (18)$$

这里

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}, \quad C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)} \quad (k = 1, \dots). \quad (19)$$

证明. 1. 我们对 k 归纳证明 (18)、(19). $k = 0$ 的情形直接来自平均值公式 (16). 当 $k = 1$ 时, 对 Laplace 方程求导可知 u_{x_i} ($i = 1, \dots, n$) 是调和函数. 因此

$$\begin{aligned} |u_{x_i}(x_0)| &= \left| \oint_{B(x_0, r/2)} u_{x_i} dx \right| \\ &= \left| \frac{2^n}{\alpha(n)r^n} \int_{\partial B(x_0, r/2)} u \nu_i dS \right| \\ &\leq \frac{2n}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r/2))}. \end{aligned} \quad (20)$$

现在若 $x \in \partial B(x_0, r/2)$, 则

$$B(x, r/2) \subset B(x_0, r) \subset U.$$

于是由 $k = 0$ 情形的 (18)、(19),

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}.$$

合并上述不等式可得, 当 $|\alpha| = 1$ 时,

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)} \frac{1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}.$$

这就验证了 $k = 1$ 时的 (18)、(19)。

2. 现在设 $k \geq 2$, 并假设 (18)、(19) 对 U 中所有球以及所有阶数小于或等于 $k - 1$ 的多重指标均成立. 固定球 $B(x_0, r) \subset U$, 并令 α 是满足 $|\alpha| = k$ 的多重指标. 那么对某个 $i \in \{1, \dots, n\}$ 和某个 $|\beta| = k - 1$ 的多重指标 β , 有

$$D^\alpha u = (D^\beta u)_{x_i}.$$

与 (20) 中类似的计算给出

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{nk}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r/k))}.$$

若 $x \in \partial B(x_0, r/k)$, 则

$$B\left(x, \frac{k-1}{k}r\right) \subset B(x_0, r) \subset U.$$

因此由 $k-1$ 情形的 (18)、(19) 推出

$$|D^\beta u(x)| \leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n) \left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}.$$

把前两个估计合并, 就得到

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}. \quad (21)$$

这证实了 $|\alpha| = k$ 时的 (18)、(19)。□

d. Liouville 定理. 现在我们断言, 在整个 $\mathbb{R}^n$ 上不存在非平凡的有界调和函数。

定理 8 (Liouville 定理). 设 $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 调和且有界。那么 u 是常数。

证明. 固定 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 、 $r > 0$, 并在 $B(x_0, r)$ 上应用定理 7:

$$|Du(x_0)| \leq \frac{\sqrt{n} C_1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))} \leq \frac{\sqrt{n} C_1 \alpha(n)}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0,$$

当 $r \rightarrow \infty$ 。于是 $Du \equiv 0$, 所以 u 是常数。□

定理 9 (表示公式). 设 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$ 。那么

$$-\Delta u = f \quad \text{于 } \mathbb{R}^n$$

的任一有界解都具有形式

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) dy + C \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

其中 C 是某个常数。

证明. 由于当 $n \geq 3$ 时 $\Phi(x) \rightarrow 0$ ($|x| \rightarrow \infty$),

$$\tilde{u}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) dy$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中 $-\Delta u = f$ 的一个有界解。若 u 是另一个解, 则 $w := u - \tilde{u}$ 调和且有界; 由 Liouville 定理, w 为常数。□

注. 若 $n = 2$, 则

$$\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \log |x|$$

在 $|x| \rightarrow \infty$ 时无界, 因而 $\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y)f(y) dy$ 也可能无界。

e. 解析性. 我们细化定理 6:

定理 10 (解析性). 若 u 在 U 中调和, 则 u 在 U 中解析。

证明. 1. 固定任意点 $x_0 \in U$. 我们必须证明 u 可在 x_0 的某个邻域内表示为收敛幂级数。令

$$r := \frac{1}{4} \text{dist}(x_0, \partial U), \quad M := \frac{1}{\alpha(n)r^n} \|u\|_{L^1(B(x_0, 2r))} < \infty.$$

2. 对每个 $x \in B(x_0, r)$, 有 $B(x, r) \subset B(x_0, 2r) \subset U$. 定理 7 因而给出

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B(x_0, r))} \leq M \left(\frac{2^{n+1}n}{r} \right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}.$$

现在对每个正整数 k 有 $k^k < e^k k!$, 所以

$$|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|} |\alpha|!.$$

另一方面, 由多项式定理,

$$n^k = (1 + \cdots + 1)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!},$$

故 $|\alpha|! \leq n^{|\alpha|} \alpha!$. 合并这些不等式, 得到

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B(x_0, r))} \leq M \left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r} \right)^{|\alpha|} \alpha!. \quad (22)$$

3. u 在 x_0 处的 Taylor 级数为

$$\sum_{\alpha} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha,$$

其中求和遍及所有多重指标。我们断言该幂级数在

$$|x - x_0| < \frac{r}{2^{n+2}n^3 e} \quad (23)$$

时收敛。为验证这一点, 对每个 N 写余项

$$R_N(x) := u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha.$$

把一元函数

$$g(t) := u(x_0 + t(x - x_0))$$

在 $t = 0$ 处展开到 $N - 1$ 阶并在 $t = 1$ 处取值, 可得对某个 $0 \leq t \leq 1$,

$$R_N(x) = \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)^\alpha}{\alpha!}.$$

利用 (22)、(23),

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\leq M \sum_{|\alpha|=N} \left(\frac{2^{n+1} n^2 e}{r} \right)^N \left(\frac{r}{2^{n+2} n^3 e} \right)^N \\ &\leq M n^N \left(\frac{1}{2n} \right)^N = \frac{M}{2^N} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

故 Taylor 级数确实收敛到 u 。□

关于解析函数与偏微分方程的更多内容, 参见第 4.6.2 节。

f. Harnack 不等式. 回忆第 A.2 节中的记号: $V \Subset U$ 表示 $V \subset \bar{V} \subset U$ 且 $\bar{V}$ 紧。

定理 11 (Harnack 不等式). 对每个连通开集 $V \Subset U$, 存在只依赖于 V 的正常数 C , 使得

$$\sup_V u \leq C \inf_V u$$

对 U 中所有非负调和函数 u 均成立。

于是特别地,

$$\frac{1}{C} u(y) \leq u(x) \leq C u(y)$$

对所有 $x, y \in V$ 成立。这些不等式说明, 非负调和函数在 V 内的各个值都是可比较的: 除非 u 在 V 中处处很小 (或很大), 否则它不能在 V 的某一点特别小 (或特别大)。直观地说, 这是因为 V 离 ∂U 有正距离, 因而 “Laplace 方程的平均作用有发生的空间”。

证明. 令

$$r := \frac{1}{4} \text{dist}(V, \partial U).$$

取 $x, y \in V$ 且 $|x - y| \leq r$ 。由平均值公式,

$$\begin{aligned} u(x) &= \oint_{B(x, 2r)} u \, dz \geq \frac{1}{\alpha(n) 2^n r^n} \int_{B(y, r)} u \, dz \\ &= \frac{1}{2^n} \oint_{B(y, r)} u \, dz = \frac{1}{2^n} u(y). \end{aligned}$$

交换 x, y , 得

$$2^{-n} u(y) \leq u(x) \leq 2^n u(y)$$

只要 $x, y \in V$ 且 $|x - y| \leq r$ 。

由于 V 连通且 $\bar{V}$ 紧, 可以用有限条相交的半径为 $r/2$ 的球链连接 V 中任意两点。于是存在整数 N , 使得对所有 $x, y \in V$,

$$u(x) \geq 2^{-n(N+1)} u(y).$$

这正是所需结论。□

2.2.4. Green 函数

现在设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 开、有界，并且 ∂U 为 C^1 。我们接下来要为 Poisson 方程

$$-\Delta u = f \quad \text{于 } U$$

在给定边界条件

$$u = g \quad \text{于 } \partial U$$

时的解，得到一个一般表示公式。

a. Green 函数的推导. 设 $u \in C^2(\bar{U})$ 为任意函数。固定 $x \in U$ ，选取 $\varepsilon > 0$ 足够小，使 $B(x, \varepsilon) \subset U$ ，并在

$$V_\varepsilon := U - B(x, \varepsilon)$$

上对 $u(y)$ 与 $\Phi(y-x)$ 使用第 C.2 节中的 Green 公式。于是

$$\begin{aligned} & \int_{V_\varepsilon} (u(y)\Delta\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\Delta u(y)) \, dy \\ &= \int_{\partial V_\varepsilon} \left[u(y) \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial\nu}(y) \right] dS(y), \end{aligned} \quad (24)$$

其中 ν 表示 ∂V_ε 上的单位外法向量。回忆当 $x \neq y$ 时 $\Delta\Phi(x-y) = 0$ 。还注意到

$$\left| \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial\nu}(y) \, dS(y) \right| \leq C\varepsilon^{n-1} \max_{\partial B(0, \varepsilon)} |\Phi| = o(1),$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。此外，定理 1 证明中的计算表明

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} u(y) \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) \, dS(y) = \oint_{\partial B(x, \varepsilon)} u(y) \, dS(y) \rightarrow u(x)$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。因此令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 于 (24)，得到公式

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial U} \left[\Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial\nu}(y) - u(y) \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) \right] dS(y) \\ &\quad - \int_U \Phi(y-x) \Delta u(y) \, dy. \end{aligned} \quad (25)$$

这个恒等式对每个 $x \in U$ 和每个 $u \in C^2(\bar{U})$ 都成立。

公式 (25) 表明，如果我们知道 U 内 Δu 的值，以及 ∂U 上 u 和 $\partial u/\partial\nu$ 的值，就能求出 $u(x)$ 。然而在 Poisson 方程的 Dirichlet 问题中，我们知道的是 u 的边界值， $\partial u/\partial\nu$ 并不知道。因此必须设法修改 (25)，去掉这个法向导数项。

其想法是：对固定的 x 引入校正函数 $\phi^x = \phi^x(y)$ ，使它求解边值问题

$$\begin{cases} \Delta\phi^x = 0, & \text{于 } U, \\ \phi^x = \Phi(y-x), & \text{于 } \partial U. \end{cases} \quad (26)$$

再应用一次 Green 公式, 得到

$$\begin{aligned} - \int_U \phi^x(y) \Delta u(y) dy &= \int_{\partial U} \left[u(y) \frac{\partial \phi^x}{\partial \nu}(y) - \phi^x(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] dS(y) \\ &= \int_{\partial U} \left[u(y) \frac{\partial \phi^x}{\partial \nu}(y) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] dS(y). \end{aligned} \quad (27)$$

定义. 区域 U 的 Green 函数为

$$G(x, y) := \Phi(y-x) - \phi^x(y) \quad (x, y \in U, x \neq y).$$

采用这一术语, 并把 (27) 加到 (25) 上, 得到

$$u(x) = - \int_{\partial U} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(y) - \int_U G(x, y) \Delta u(y) dy \quad (x \in U), \quad (28)$$

其中

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = D_y G(x, y) \cdot \nu(y)$$

表示 G 关于变量 y 的外法向导数。注意, $\partial u / \partial \nu$ 不再出现在 (28) 中: 我们正是为此引入校正函数 ϕ^x 。

现在设 $u \in C^2(\bar{U})$ 求解

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{于 } U, \\ u = g, & \text{于 } \partial U, \end{cases} \quad (29)$$

其中 f, g 为给定连续函数。代入 (28), 得到:

定理 12 (用 Green 函数表示的公式). 若 $u \in C^2(\bar{U})$ 求解问题 (29), 则

$$u(x) = - \int_{\partial U} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(y) + \int_U f(y) G(x, y) dy \quad (x \in U). \quad (30)$$

只要能为给定区域 U 构造 Green 函数 G , 这就是边值问题 (29) 的解公式。一般来说, 这是一件困难的事, 只有当 U 的几何形状简单时才可能完成。下面几个小节给出一些能够显式计算 G 的特殊情形。

Green 函数的解释. 固定 $x \in U$ 。把 G 看作 y 的函数时, 可以象征性地写为

$$\begin{cases} -\Delta G = \delta_x, & \text{于 } U, \\ G = 0, & \text{于 } \partial U, \end{cases}$$

其中 δ_x 表示在点 x 处具有单位质量的 Dirac 测度。

在进入具体例子之前, 先记录 G 关于变量 x, y 对称的一般结论:

定理 13 (Green 函数的对称性). 对所有 $x, y \in U$ 、 $x \neq y$, 有

$$G(y, x) = G(x, y).$$

证明. 固定 $x, y \in U$, $x \neq y$. 写

$$v(z) := G(x, z), \quad w(z) := G(y, z) \quad (z \in U).$$

则 $\Delta v(z) = 0$ ($z \neq x$), $\Delta w(z) = 0$ ($z \neq y$), 并且 $v = w = 0$ 于 ∂U . 在

$$V := U - [B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon)]$$

上应用 Green 恒等式, 其中 $\varepsilon > 0$ 足够小, 得到

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} \left(w \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) dS = \int_{\partial B(y, \varepsilon)} \left(v \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS, \quad (31)$$

其中 ν 表示 $\partial B(x, \varepsilon) \cup \partial B(y, \varepsilon)$ 上指向球内的单位向量场。

现在 w 在 x 附近光滑, 因此

$$\left| \int_{\partial B(x, \varepsilon)} v \frac{\partial w}{\partial \nu} dS \right| \leq C \varepsilon^{n-1} \sup_{\partial B(x, \varepsilon)} |v| = o(1).$$

另一方面, $v(z) = \Phi(z - x) - \phi^x(z)$, 而 ϕ^x 在 U 中光滑。由定理 1 证明中的同类计算,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} w \frac{\partial v}{\partial \nu} dS = w(x).$$

故 (31) 左端趋于 $w(x)$ 。同理右端趋于 $v(y)$ 。因此

$$G(y, x) = w(x) = v(y) = G(x, y).$$

□

b. 半空间的 Green 函数. 在本小节和下一小节中, 我们将为两个几何形状简单的区域构造 Green 函数, 即半空间 $\mathbb{R}_+^n$ 与单位球 $B(0, 1)$ 。一切都取决于在这些区域中显式求解校正问题 (26), 而这又依赖于一些巧妙的几何反射技巧。

首先考虑半空间

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}.$$

尽管该区域无界, 所以前一小节中的计算不能直接适用, 我们仍将尝试用前面的思想构造 Green 函数。当然, 稍后必须直接检验相应的表示公式确实成立。

定义. 若 $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, 它关于平面 $\partial\mathbb{R}_+^n$ 的反射点为

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n).$$

对半空间, 我们通过设

$$\phi^x(y) := \Phi(y - \tilde{x}) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n)$$

来求解问题 (26)。其思想是从 Φ 出发, 把奇点从 $x \in \mathbb{R}_+^n$ “反射”到 $\tilde{x} \notin \mathbb{R}_+^n$ 。注意当 $y \in \partial\mathbb{R}_+^n$ 时,

$$\phi^x(y) = \Phi(y - x),$$

因此

$$\begin{cases} \Delta\phi^x = 0, & \text{于 } \mathbb{R}_+^n, \\ \phi^x = \Phi(y - x), & \text{于 } \partial\mathbb{R}_+^n, \end{cases}$$

正如所需。

定义. 半空间 $\mathbb{R}_+^n$ 的 Green 函数为

$$G(x, y) := \Phi(y - x) - \Phi(y - \tilde{x}) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+^n, x \neq y).$$

于是

$$G_{y_n}(x, y) = \Phi_{y_n}(y - x) - \Phi_{y_n}(y - \tilde{x}) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \left[\frac{y_n - x_n}{|y - x|^n} - \frac{y_n + x_n}{|y - \tilde{x}|^n} \right].$$

因此若 $y \in \partial\mathbb{R}_+^n$, 则

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = -G_{y_n}(x, y) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^n}.$$

设现在 u 求解边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{于 } \mathbb{R}_+^n, \\ u = g, & \text{于 } \partial\mathbb{R}_+^n. \end{cases} \quad (32)$$

由 (30) 我们期待

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dy \quad (x \in \mathbb{R}_+^n) \quad (33)$$

是解的表示公式。函数

$$K(x, y) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^n} \quad (x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \partial\mathbb{R}_+^n)$$

称为 $\mathbb{R}_+^n$ 的 Poisson 核, (33) 称为 Poisson 公式。

现在必须直接检查公式 (33) 的确给出边值问题 (32) 的一个解。

定理 14 (半空间的 **Poisson** 公式). 设 $g \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, 并由 (33) 定义 u . 那么

- (i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$,
- (ii) $\Delta u = 0$ 于 $\mathbb{R}_+^n$,
- (iii) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{R}_+^n}} u(x) = g(x_0)$ 对每个 $x_0 \in \partial\mathbb{R}_+^n$.

证明. 1. 对每个固定 x , 映射 $y \mapsto G(x, y)$ 在 $y \neq x$ 处调和. 由于 $G(x, y) = G(y, x)$, 映射 $x \mapsto G(x, y)$ 在 $x \neq y$ 处调和. 因此

$$x \mapsto -\frac{\partial G}{\partial y_n}(x, y) = K(x, y)$$

对 $x \in \mathbb{R}_+^n$ 、 $y \in \partial\mathbb{R}_+^n$ 调和.

2. 直接计算 (细节略) 验证

$$1 = \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(x, y) dy \quad (34)$$

对每个 $x \in \mathbb{R}_+^n$ 成立. 由于 g 有界, 由 (33) 定义的 u 也有界. 又因 $x \mapsto K(x, y)$ 在 $x \neq y$ 时光滑, 容易验证

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n), \quad \Delta u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \Delta_x K(x, y) g(y) dy = 0.$$

3. 固定 $x_0 \in \partial\mathbb{R}_+^n$ 、 $\varepsilon > 0$. 选取 $\delta > 0$ 使得

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon \quad \text{若 } |y - x_0| < \delta, y \in \partial\mathbb{R}_+^n. \quad (35)$$

若 $|x - x_0| < \delta/2$ 且 $x \in \mathbb{R}_+^n$, 则由 (34),

$$\begin{aligned} |u(x) - g(x_0)| &\leq \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \cap B(x_0, \delta)} K(x, y) |g(y) - g(x_0)| dy \\ &\quad + \int_{\partial\mathbb{R}_+^n - B(x_0, \delta)} K(x, y) |g(y) - g(x_0)| dy =: I + J. \end{aligned} \quad (36)$$

由 (34)、(35), $I \leq \varepsilon$. 此外, 当 $|x - x_0| \leq \delta/2$ 且 $|y - x_0| \geq \delta$ 时,

$$|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x_0|.$$

所以

$$J \leq C \|g\|_{L^\infty} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n - B(x_0, \delta)} |y - x_0|^{-n} dy \rightarrow 0 \quad (x_n \rightarrow 0^+).$$

合并这个估计与 (36), 只要 $|x - x_0|$ 足够小, 就有 $|u(x) - g(x_0)| \leq 2\varepsilon$. $\square$

c. 球的 Green 函数. 为构造单位球 $B(0, 1)$ 的 Green 函数, 我们将再次使用一种反射, 不过这次是通过球面 $\partial B(0, 1)$ 反射.

定义. 若 $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, 点

$$\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$$

称为 x 关于 $\partial B(0, 1)$ 的对偶点。映射 $x \mapsto \tilde{x}$ 称为通过单位球面的反演。

现在用球面反演来计算单位球 $U = B^0(0, 1)$ 的 Green 函数。固定 $x \in B^0(0, 1)$ 。记住, 我们需要找校正函数 $\phi^x = \phi^x(y)$ 求解

$$\begin{cases} \Delta \phi^x = 0, & \text{于 } B^0(0, 1), \\ \phi^x = \Phi(y - x), & \text{于 } \partial B(0, 1); \end{cases} \quad (37)$$

于是 Green 函数为

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \phi^x(y). \quad (38)$$

现在的想法是把奇点从 $x \in B^0(0, 1)$ “反演”到 $\tilde{x} \notin B(0, 1)$ 。先假设 $n \geq 3$ 。映射 $y \mapsto \Phi(y - \tilde{x})$ 在 $y \neq \tilde{x}$ 时调和。因此

$$y \mapsto |x|^{2-n} \Phi(y - \tilde{x})$$

在 $y \neq \tilde{x}$ 时调和, 于是

$$\phi^x(y) := \Phi(|x|(y - \tilde{x})) \quad (39)$$

在 U 中调和。此外, 若 $y \in \partial B(0, 1)$ 且 $x \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} |x|^2 |y - \tilde{x}|^2 &= |x|^2 \left(|y|^2 - 2 \frac{y \cdot x}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} \right) \\ &= |x|^2 - 2y \cdot x + 1 = |x - y|^2. \end{aligned}$$

因此

$$(|x||y - \tilde{x}|)^{-(n-2)} = |x - y|^{-(n-2)}.$$

从而

$$\phi^x(y) = \Phi(y - x) \quad (y \in \partial B(0, 1)), \quad (40)$$

正合所需。

定义. 单位球的 Green 函数为

$$G(x, y) := \Phi(y - x) - \Phi(|x|(y - \tilde{x})) \quad (x, y \in B(0, 1), x \neq y). \quad (41)$$

同一公式在 $n = 2$ 时也成立。

现在设 u 求解

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{于 } B^0(0, 1), \\ u = g, & \text{于 } \partial B(0, 1). \end{cases} \quad (42)$$

由 (30),

$$u(x) = - \int_{\partial B(0,1)} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(y). \quad (43)$$

利用公式 (41), 若 $y \in \partial B(0, 1)$, 可算得

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n}.$$

因此 (43) 给出表示公式

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dS(y).$$

现在若 u 改为求解半径为 $r > 0$ 的球上的边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{于 } B^0(0, r), \\ u = g, & \text{于 } \partial B(0, r), \end{cases} \quad (44)$$

通过变量替换得到 Poisson 公式

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dS(y) \quad (x \in B^0(0, r)). \quad (45)$$

函数

$$K(x, y) := \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \frac{1}{|x - y|^n} \quad (x \in B^0(0, r), y \in \partial B(0, r))$$

称为球 $B(0, r)$ 的 Poisson 核。

我们在假定 (44) 的光滑解存在时推得了 (45)。下面断言该公式事实上给出一个解:

定理 15 (球的 Poisson 公式). 设 $g \in C(\partial B(0, r))$, 并由 (45) 定义 u 。则

- (i) $u \in C^\infty(B^0(0, r))$,
- (ii) $\Delta u = 0$ 于 $B^0(0, r)$,
- (iii) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in B^0(0, r)}} u(x) = g(x_0)$ 对每个 $x_0 \in \partial B(0, r)$.

证明与定理 14 的证明类似, 留作练习。

2.2.5. 能量方法

到目前为止, 我们对调和函数的大部分分析依赖于相当显式的表示公式, 其中涉及基本解、Green 函数等。在这个收尾小节中, 我们说明一些“能量”方法, 也就是涉及各种表达式的 L^2 范数的技术。这些思想预示第二、三部分后续理论的发展。

a. 唯一性. 先考虑边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{于 } U, \\ u = g, & \text{于 } \partial U. \end{cases} \quad (46)$$

我们已经在第 2.2.3 节中用极大值原理证明了唯一性; 现在给出一个简单的替代证明。假设 U 开、有界, 且 ∂U 为 C^1 。

定理 16 (唯一性). (46) 至多有一个解 $u \in C^2(\overline{U})$ 。

证明. 设 $\tilde{u}$ 是另一个解, 并令 $w := u - \tilde{u}$ 。则 $\Delta w = 0$ 于 U , 于是分部积分给出

$$0 = - \int_U w \Delta w \, dx = \int_U |Dw|^2 \, dx.$$

因此 $Dw \equiv 0$ 于 U 。又因 $w = 0$ 于 ∂U , 推出 $w = u - \tilde{u} \equiv 0$ 于 U 。□

b. Dirichlet 原理. 接下来说明, Poisson 方程边值问题 (46) 的解可以刻画为适当泛函的极小元。为此定义能量泛函

$$I[w] := \int_U \frac{1}{2} |Dw|^2 - wf \, dx,$$

其中 w 属于可容许集

$$\mathcal{A} := \{w \in C^2(\overline{U}) \mid w = g \text{ 于 } \partial U\}.$$

定理 17 (Dirichlet 原理). 若 $u \in C^2(\overline{U})$ 求解 (46), 则

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w]. \quad (47)$$

反过来, 若 $u \in \mathcal{A}$ 满足 (47), 则 u 求解边值问题 (46)。

换言之, 若 $u \in \mathcal{A}$, 则偏微分方程 $-\Delta u = f$ 等价于说 u 在 $\mathcal{A}$ 中使能量 $I[\cdot]$ 取最小。

证明. 1. 取 $w \in \mathcal{A}$ 。由 (46),

$$0 = \int_U (-\Delta u - f)(u - w) \, dx.$$

分部积分得到

$$0 = \int_U Du \cdot D(u - w) - f(u - w) \, dx,$$

没有边界项, 因为 $u - w = g - g \equiv 0$ 于 ∂U 。于是

$$\begin{aligned} \int_U |Du|^2 - uf \, dx &= \int_U Du \cdot Dw - wf \, dx \\ &\leq \int_U \frac{1}{2} |Du|^2 \, dx + \int_U \frac{1}{2} |Dw|^2 - wf \, dx, \end{aligned}$$

其中使用了由 Cauchy–Schwarz 不等式和 Cauchy 不等式推出的估计

$$|Du \cdot Dw| \leq |Du||Dw| \leq \frac{1}{2}|Du|^2 + \frac{1}{2}|Dw|^2.$$

整理即得

$$I[u] \leq I[w] \quad (w \in \mathcal{A}). \quad (48)$$

由于 $u \in \mathcal{A}$, (47) 由 (48) 得出。

2. 反过来, 设 (47) 成立。固定任意 $v \in C_c^\infty(U)$, 并写

$$i(\tau) := I[u + \tau v] \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

由于对每个 τ 都有 $u + \tau v \in \mathcal{A}$, 一元函数 $i(\cdot)$ 在 0 处取最小, 因此

$$i'(0) = 0.$$

而

$$\begin{aligned} i(\tau) &= \int_U \frac{1}{2} |Du + \tau Dv|^2 - (u + \tau v)f \, dx \\ &= \int_U \frac{1}{2} |Du|^2 + \tau Du \cdot Dv + \frac{\tau^2}{2} |Dv|^2 - (u + \tau v)f \, dx. \end{aligned}$$

故

$$0 = i'(0) = \int_U Du \cdot Dv - v f \, dx = \int_U (-\Delta u - f)v \, dx.$$

该恒等式对每个 $v \in C_c^\infty(U)$ 成立, 因此 $-\Delta u = f$ 于 U 。□

Dirichlet 原理是变分法应用于 Laplace 方程的一个例子。更多内容见第 8 章。

2.3. 热方程

接下来研究热方程

$$u_t - \Delta u = 0 \quad (1)$$

以及非齐次热方程

$$u_t - \Delta u = f, \quad (2)$$

并配以适当的初始条件和边界条件。这里 $t > 0$ 且 $x \in U$, 其中 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为开集。未知函数为

$$u : \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad u = u(x, t),$$

而 Laplace 算子 Δ 是关于空间变量 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 取的:

$$\Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

在 (2) 中, 函数 $f : U \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 为给定函数。

一个指导原则是: 关于调和函数的任何论断, 都会给出关于热方程解的类似 (但更复杂) 论断。因此下面的发展基本上与 Laplace 方程的相应理论平行。

物理解释. 热方程也称扩散方程；在典型应用中，它描述热量、化学浓度等某种量的密度 u 随时间的演化。若 $V \subset U$ 是任意光滑子区域，则 V 内总量的变化率等于穿过 ∂V 的净通量的负值：

$$\frac{d}{dt} \int_V u \, dx = - \int_{\partial V} F \cdot \nu \, dS,$$

其中 F 是通量密度。因此

$$u_t = -\operatorname{div} F, \quad (3)$$

因为 V 是任意的。在许多情形中， F 与 u 的梯度成比例但方向相反（因为流动从较高浓度区域流向较低浓度区域）：

$$F = -aDu \quad (a > 0).$$

代入 (3)，得到偏微分方程

$$u_t = a \operatorname{div}(Du) = a\Delta u,$$

当 $a = 1$ 时，这就是热方程。

热方程也出现在布朗运动的研究中。

2.3.1. 基本解

a. 基本解的推导. 如第 2.2.1 节所指出的，研究任何偏微分方程时，一个重要的第一步常常是找出一些具体解。

注意热方程对时间变量 t 含有一阶导数，而对空间变量 x_i ($i = 1, \dots, n$) 含有二阶导数。因此，若 u 求解 (1)，则 $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ 也求解 (1)。这一缩放表明比值 r^2/t ($r = |x|$) 对热方程很重要，并提示我们寻找形如

$$u(x, t) = v\left(\frac{r^2}{t}\right) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^n)$$

的解，其中 v 尚待确定。

虽然这种方法最终会导向我们所需的结果（见习题 13），但更快的做法是寻找具有特殊结构

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \quad (4)$$

的解，其中常数 α, β 和函数 $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 待定。若寻找在伸缩变换

$$u(x, t) \mapsto \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$$

下不变的热方程解，就会得到 (4)。也就是说，我们要求

$$u(x, t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$$

对所有 $\lambda > 0$ 、 $x \in \mathbb{R}^n$ 、 $t > 0$ 成立。取 $\lambda = t^{-1}$ ，并令 $v(y) := u(y, 1)$ ，即得 (4)。

把 (4) 代入 (1)，对

$$y := t^{-\beta}x$$

计算，得到

$$\alpha t^{-(\alpha+1)}v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)}y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)}\Delta v(y) = 0. \quad (5)$$

为了把 (5) 化为只含变量 y 的表达式，取 $\beta = 1/2$ 。于是各项中 t 的幂相同，(5) 化为

$$\alpha v + \frac{1}{2}y \cdot Dv + \Delta v = 0. \quad (6)$$

进一步猜测 v 是径向的，即 $v(y) = w(|y|)$ 。于是 (6) 变为

$$\alpha w + \frac{1}{2}rw' + w'' + \frac{n-1}{r}w' = 0 \quad (r = |y|).$$

若取 $\alpha = n/2$ ，这可化为

$$(r^{n-1}w')' + \frac{1}{2}(r^n w)' = 0.$$

因此

$$r^{n-1}w' + \frac{1}{2}r^n w = a$$

对某个常数 a 成立。假设 $w, w' \rightarrow 0$ 足够快 ($r \rightarrow \infty$)，则 $a = 0$ ，从而

$$w' = -\frac{1}{2}rw.$$

于是对某个常数 b ，

$$w = be^{-r^2/4}. \quad (7)$$

把 (4)、(7) 以及 $\alpha = n/2$ 、 $\beta = 1/2$ 合并，可知

$$\frac{b}{t^{n/2}}e^{-|x|^2/(4t)}$$

求解热方程 (1)。

这一计算引出如下定义。

定义. 函数

$$\Phi(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-|x|^2/(4t)}, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n, t < 0, \end{cases}$$

称为热方程的基本解。

注意 Φ 在点 $(0, 0)$ 奇异。我们有时写 $\Phi(x, t) = \Phi(|x|, t)$ ，以强调基本解关于空间变量 x 是径向的。归一化常数 $(4\pi)^{-n/2}$ 的选择由下面引理决定。

引理（基本解的积分）. 对每个 $t > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1.$$

证明. 计算得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/(4t)} dx \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz = \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2} dz_i = 1. \end{aligned}$$

□

第 4.3.1 节给出了热方程基本解的另一种推导。

b. 初值问题. 现在用 Φ 构造初值问题（或 Cauchy 问题）

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (8)$$

的解。注意函数 $(x, t) \mapsto \Phi(x, t)$ 在奇点 $(0, 0)$ 之外求解热方程，因此对每个固定的 $y \in \mathbb{R}^n$, $(x, t) \mapsto \Phi(x - y, t)$ 也求解热方程。于是卷积

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/(4t)} g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \end{aligned} \quad (9)$$

也应当是一个解。

定理 1（初值问题的解）. 设 $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 并由 (9) 定义 u 。那么

- (i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$,
- (ii) $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$,
- (iii) $\lim_{\substack{(x, t) \rightarrow (x_0, 0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = g(x_0) \quad \text{对每个 } x_0 \in \mathbb{R}^n$.

证明. 1. 函数 $t^{-n/2} e^{-|x|^2/(4t)}$ 在 $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$ 上对每个 $\delta > 0$ 都无穷可微，且各阶导数一致有界，所以 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ 。此外

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} [(\Phi_t - \Delta_x \Phi)(x - y, t)] g(y) dy \\ &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0), \end{aligned} \quad (10)$$

因为 Φ 本身求解热方程。

2. 固定 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 、 $\varepsilon > 0$ 。选取 $\delta > 0$ 使得

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon \quad \text{若 } |y - x_0| < \delta, y \in \mathbb{R}^n. \quad (11)$$

若 $|x - x_0| < \delta/2$ ，由上面的引理，

$$\begin{aligned} |u(x, t) - g(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) [g(y) - g(x_0)] dy \right| \\ &\leq \int_{B(x_0, \delta)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x_0)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n - B(x_0, \delta)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x_0)| dy =: I + J. \end{aligned}$$

由 (11) 和引理， $I \leq \varepsilon$ 。另一方面，若 $|x - x_0| \leq \delta/2$ 且 $|y - x_0| \geq \delta$ ，则

$$|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x_0|.$$

因此

$$\begin{aligned} J &\leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n - B(x_0, \delta)} \Phi(x - y, t) dy \\ &\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x_0, \delta)} e^{-|y - x_0|^2/(16t)} dy \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n - B(0, \delta/\sqrt{t})} e^{-|z|^2/16} dz \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0^+). \end{aligned}$$

因此当 $|x - x_0| < \delta/2$ 且 $t > 0$ 足够小时， $|u(x, t) - g(x_0)| < 2\varepsilon$ 。□

基本解的解释。 由定理 1，我们有时写

$$\begin{cases} \Phi_t - \Delta \Phi = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \Phi = \delta_0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

其中 δ_0 表示 $\mathbb{R}^n$ 上在点 0 处具有单位质量的 Dirac 测度。

无限传播速度。 注意若 g 有界、连续， $g \geq 0$ 且 $g \not\equiv 0$ ，则

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/(4t)} g(y) dy$$

事实上对所有点 $x \in \mathbb{R}^n$ 和所有时间 $t > 0$ 都为正。我们把这一观察解释为：热方程迫使扰动具有无限传播速度。若初始温度非负且在某处为正，那么任意稍后的时刻温度处处为正。（第 2.4.3 节会看到，相比之下波方程支持扰动的有限传播速度。）

c. 非齐次问题. 现在转向非齐次初值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (12)$$

怎样给出解公式? 回忆导出 (9) 的动机, 还应注意: 对给定的 $y \in \mathbb{R}^n$ 、 $0 < s < t$, 映射

$$(x, t) \mapsto \Phi(x - y, t - s)$$

求解热方程。对固定 s , 函数

$$u = u(x, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy$$

求解

$$\begin{cases} u_t(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (s, \infty), \\ u(\cdot; s) = f(\cdot, s), & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = s\}. \end{cases}$$

这只是 (8) 形式的初值问题, 其中起始时间 $t = 0$ 被 $t = s$ 替代, g 被 $f(\cdot, s)$ 替代。因此 $u(\cdot; s)$ 本身当然不是 (12) 的解。

然而 Duhamel 原理断言, 可以通过对 s 积分, 从这些问题的解构造出 (12) 的解。其想法是考虑

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0).$$

也就是

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/[4(t-s)]} f(y, s) dy ds, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 、 $t > 0$ 。

Duhamel 原理广泛适用于线性 ODE 和 PDE, 并不依赖热方程的特殊结构。例如它也给出第 2.1.2 节用另一种方法得到的非齐次输运方程的解。第 2.4.2 节中我们还会对波方程使用 Duhamel 原理。

为了确认公式 (13) 有效, 为简单起见假设 $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, 并且 f 关于变量 x 有紧支集。

定理 2 (非齐次问题的解). 由 (13) 定义 u 。那么

- (i) $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$,
- (ii) $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$,
- (iii) $\lim_{\substack{(x, t) \rightarrow (x_0, 0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = 0$ 对每个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

证明. 1. 因为 Φ 在 $(0,0)$ 有奇性, 不能直接把积分号下求导合理化。我们改用与第 2.2.1 节定理 1 证明中类似的办法。

先换元, 写成

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds.$$

由于 $f \in C_1^2$ 且关于 x 有紧支集, 而 $\Phi = \Phi(y, s)$ 在 $s = t > 0$ 附近光滑, 可以计算

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f_t(x - y, t - s) dy ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy, \end{aligned}$$

以及

$$u_{x_i x_j}(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f_{x_i x_j}(x - y, t - s) dy ds.$$

因此 u_t 、 $D_x^2 u$, 以及 $u, D_x u$ 都属于 $C(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ 。

2. 接着计算。对 $0 < \varepsilon < t$, 把 $[0, t]$ 中的积分分成 $[0, \varepsilon]$ 与 $[\varepsilon, t]$, 并对后一部分分部积分。利用 $\Phi_s - \Delta_y \Phi = 0$, 得到

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \varepsilon) f(x - y, t - \varepsilon) dy \\ &= f(x, t), \end{aligned}$$

其中最后的极限同定理 1 证明中的计算。最后注意

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq t \|f\|_{L^\infty} \rightarrow 0.$$

□

一般初值下非齐次问题的解. 当然可以把定理 1 和定理 2 合并, 得到在上述关于 g 与 f 的假设下,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds \end{aligned} \tag{17}$$

求解

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{18}$$

2.3.2. 平均值公式

先回忆第 A.2 节中的一些有用记号。设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 开且有界, 并固定时间 $T > 0$ 。

定义.

$$U_T := U \times (0, T]$$

称为抛物柱体, 而

$$\Gamma_T := \bar{U}_T - U_T$$

称为 U_T 的抛物边界。

我们把 U_T 看作 $\bar{U} \times [0, T]$ 的抛物内部: 注意 U_T 包含顶部 $U \times \{t = T\}$ 。抛物边界 Γ_T 由 $U \times [0, T]$ 的底部和垂直侧面组成, 但不包含顶部。

下面要推导一种热方程版本的平均值性质, 类似于第 2.2.2 节中调和函数的平均值性质。但这里没有那么简单的公式。不过要观察到: 对固定 x , 球面 $\partial B(x, r)$ 是 Laplace 方程基本解 $\Phi(x-y)$ 的水平集。这提示我们, 对固定的 (x, t) , 热方程基本解 $\Phi(x-y, t-s)$ 的水平集也许相关。

定义. 对固定的 $x \in \mathbb{R}^n$ 、 $t \in \mathbb{R}$ 、 $r > 0$, 定义

$$E(x, t; r) := \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(x-y, t-s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}.$$

这是时空中的一个区域, 其边界是 $\Phi(x-y, t-s)$ 的水平集。点 (x, t) 是其顶部中心。 $E(x, t; r)$ 有时称为“热球”。

定理 3 (热方程的平均值性质). 设 $u \in C_1^2(U_T)$ 求解热方程。则

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x, t; r)} u(y, s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dy ds \quad (19)$$

对每个 $E(x, t; r) \subset U_T$ 成立。

公式 (19) 是热方程关于 Laplace 方程平均值公式的一种类比。注意右端只涉及 $s \leq t$ 时刻的 $u(y, s)$ 。这是合理的, 因为 $u(x, t)$ 的值不应依赖未来时刻。

证明. 平移空间和时间坐标, 可设 $x = 0$ 、 $t = 0$ 。必要时先磨光, 从而假设 u 光滑。写 $E(r) = E(0, 0; r)$, 并令

$$\begin{aligned} \phi(r) &:= \frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \\ &= \iint_{E(1)} u(r y, r^2 s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds. \end{aligned} \quad (20)$$

计算得到

$$\phi'(r) = \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \sum_{i=1}^n u_{y_i y_i} \frac{|y|^2}{s^2} + 2r u_s \frac{|y|^2}{s} dy ds =: A + B.$$

引入函数

$$\psi := -\frac{n}{2} \log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n \log r. \quad (21)$$

由于在 $\partial E(r) - \{(0,0)\}$ 上 $\Phi(y, -s) = r^{-n}$, 故 $\psi = 0$ 于该边界。利用 (21) 并分部积分; 边界项因 $\psi = 0$ 消失。再在 s 方向分部积分, 并使用 $u_s = \Delta u$, 可得 $B = -A$ 。因此 $\phi'(r) = 0$, 所以 ϕ 为常数。令 $r \rightarrow 0$, 由连续性得

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = 4u(0,0),$$

从而 (19) 成立。□

2.3.3. 解的性质

本小节记录热方程解的若干基本性质, 它们与调和函数的性质平行。

a. 极大值原理. 由于热方程中的时间具有方向性, 极大值原理也必须相应改变: 最大值发生在抛物边界, 而不是顶部。

定理 4 (热方程的极大值原理). 设 $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ 求解

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{于 } U_T.$$

则

$$\max_{\overline{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

证明. 先设 $u_t - \Delta u < 0$ 于 U_T 。若 u 在某点 $(x_0, t_0) \in U_T$ 取得 $\overline{U}_T$ 上最大值, 且该点不在 Γ_T 上, 则 $t_0 > 0$ 。在空间变量上有 $Du(x_0, t_0) = 0$ 、 $\Delta u(x_0, t_0) \leq 0$, 并且由时间方向可得 $u_t(x_0, t_0) \geq 0$ 。于是

$$u_t - \Delta u \geq 0,$$

矛盾。一般情形令 $u^\varepsilon(x, t) := u(x, t) - \varepsilon t$, 则 $u_t^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = -\varepsilon < 0$ 。对 u^ε 应用已证情形, 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即得。□

把 u 换成 $-u$, 也得到相应的最小值原理。

极大值原理的一个重要应用是下面的唯一性结论。

定理 5 (有界区域上的唯一性). 设 $g \in C(\Gamma_T)$ 、 $f \in C(U_T)$ 。则初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{于 } U_T, \\ u = g, & \text{于 } \Gamma_T \end{cases} \quad (22)$$

至多有一个解 $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ 。

证明. 若 u 与 $\bar{u}$ 是 (22) 的两个解, 对 $w = \pm(u - \bar{u})$ 应用定理 4. $\square$

接下来把唯一性结论推广到 Cauchy 问题, 即 $U = \mathbb{R}^n$ 的初值问题. 由于不再处于有界区域上, 必须对 $|x|$ 很大时解的行为加以控制.

定理 6 (Cauchy 问题的极大值原理). 设

$$u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$$

求解

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u = g, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (23)$$

并满足增长估计

$$u(x, t) \leq Ae^{a|x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T) \quad (24)$$

其中 $A, a > 0$ 为常数. 那么

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

证明. 1. 先假设

$$4aT < 1. \quad (25)$$

于是可取 $\varepsilon > 0$ 使

$$4a(T + \varepsilon) < 1. \quad (26)$$

固定 $y \in \mathbb{R}^n$ 、 $\mu > 0$, 定义

$$v(x, t) := u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} e^{|x-y|^2/[4(T+\varepsilon-t)]} \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0).$$

直接计算 (参见第 2.3.1 节) 表明

$$v_t - \Delta v = 0 \quad \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, T].$$

固定 $r > 0$, 令 $U = B^0(y, r)$ 、 $U_T = B^0(y, r) \times (0, T]$. 由定理 4,

$$\max_{\bar{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v. \quad (27)$$

2. 若 $x \in \mathbb{R}^n$, 则

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{n/2}} e^{|x-y|^2/[4(T+\varepsilon)]} \leq g(x). \quad (28)$$

若 $|x - y| = r$ 、 $0 \leq t \leq T$, 则由 (24)、(26), 当 r 取得足够大时,

$$v(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g. \quad (29)$$

因此 (27)–(29) 推出

$$v(y, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

对所有 $y \in \mathbb{R}^n$ 、 $0 \leq t \leq T$ 成立，只要 (25) 有效。令 $\mu \rightarrow 0$ 。

3. 若一般情形下 (25) 不成立，就把上面的结果反复应用到时间区间

$$[0, T_1], [T_1, 2T_1], \dots, \quad T_1 = \frac{1}{8a}.$$

□

定理 7 (Cauchy 问题的唯一性)。设 $g \in C(\mathbb{R}^n)$ 、 $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ 。则初值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u = g, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (30)$$

在满足增长估计

$$|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T) \quad (31)$$

的函数类中至多有一个解

$$u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T]).$$

证明。 若 u 与 $\tilde{u}$ 都满足 (30)、(31)，对 $w = \pm(u - \tilde{u})$ 应用定理 6。□

非物理解。 事实上，问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (32)$$

有无穷多个解；例如见 John [J2, Chapter 7]。除 $u \equiv 0$ 外，这些解中的每一个在 $|x| \rightarrow \infty$ 时都增长得非常快。

这里有一个有趣之处：虽然 $u \equiv 0$ 无疑是 (32) 的“物理上正确”的解，这个初值问题事实上还有其他“非物理”解。定理 7 给出了排除这些“错误”解的准则。我们在第 3、10、11 章研究 Hamilton–Jacobi 方程和守恒律时，还会遇到某些类似情形。

b. 正则性。 下面说明热方程的解自动光滑。

定理 8 (光滑性)。设 $u \in C_1^2(U_T)$ 在 U_T 中求解热方程。则

$$u \in C^\infty(U_T).$$

即使 u 在 Γ_T 上取得非光滑边界值，这个正则性断言仍然成立。

证明. 1. 回忆第 A.2 节中记号

$$C(x, t; r) := \{(y, s) \mid |x - y| \leq r, t - r^2 \leq s \leq t\}$$

表示半径为 r 、高度为 r^2 、顶部中心为 (x, t) 的闭圆柱。固定 $(x_0, t_0) \in U_T$ ，取 $r > 0$ 足够小，使

$$C := C(x_0, t_0; r) \subset U_T.$$

再定义同一顶部中心的较小圆柱

$$C' := C(x_0, t_0; 3r/4), \quad C'' := C(x_0, t_0; r/2).$$

取光滑截断函数 $\zeta = \zeta(x, t)$ ，使

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta \leq 1, & \zeta \equiv 1 \text{ 于 } C', \\ \zeta \equiv 0 \text{ 于 } C \text{ 的抛物边界附近.} \end{cases}$$

并把 ζ 在 $(\mathbb{R}^n \times [0, t_0]) - C$ 中延拓为 0。

2. 暂且假设 $u \in C^\infty(U_T)$ ，并令

$$v(x, t) := \zeta(x, t)u(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq t_0).$$

则

$$v_t = \zeta u_t + \zeta_t u, \quad \Delta v = \zeta \Delta u + 2D\zeta \cdot Du + u\Delta\zeta.$$

因此

$$v = 0 \quad \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \quad (33)$$

并且

$$v_t - \Delta v = \zeta_t u - 2D\zeta \cdot Du - u\Delta\zeta =: \tilde{f} \quad (34)$$

于 $\mathbb{R}^n \times (0, t_0)$ 。设

$$\tilde{v}(x, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) \tilde{f}(y, s) dy ds.$$

由定理 2,

$$\begin{cases} \tilde{v}_t - \Delta \tilde{v} = \tilde{f}, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, t_0), \\ \tilde{v} = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (35)$$

由于 $|v|, |\tilde{v}| \leq A$ 对某个常数 A 成立，定理 7 推出 $v \equiv \tilde{v}$ ，即

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) \tilde{f}(y, s) dy ds. \quad (36)$$

若 $(x, t) \in C''$, 因 $\zeta \equiv 0$ 于 C 外, 由 (34)、(36) 得

$$u(x, t) = \iint_C \Phi(x - y, t - s) [(\zeta_s(y, s) - \Delta \zeta(y, s))u(y, s) - 2D\zeta(y, s) \cdot Du(y, s)] dy ds.$$

注意此式方括号中的表达式在 Φ 的奇点附近的某个区域中为零。对最后一项分部积分, 得到

$$u(x, t) = \iint_C [\Phi(x - y, t - s)(\zeta_s(y, s) + \Delta \zeta(y, s)) + 2D_y \Phi(x - y, t - s) \cdot D\zeta(y, s)] u(y, s) dy ds. \quad (37)$$

上面是在假设 $u \in C^\infty$ 下证明的。若 u 只满足定理假设, 则用空间和时间变量中的标准磨光核 η_ε , 对 $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ 推导 (37), 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 。

3. 公式 (37) 具有形式

$$u(x, t) = \iint_C K(x, t, y, s) u(y, s) dy ds \quad ((x, t) \in C''), \quad (38)$$

其中由于 $\zeta \equiv 1$ 于 C' , 对所有 $(y, s) \in C'$ 有 $K(x, t, y, s) = 0$ 。还注意 K 在 $C - C'$ 上光滑。由表达式 (38) 可见, u 在 $C'' = C(x_0, t_0; r/2)$ 内为 C^∞ 。□

c. 热方程解的局部估计。 现在记录热方程解的导数估计, 特别注意关于 $x_i (i = 1, \dots, n)$ 的导数与关于 t 的导数之间的差异。

定理 9 (导数估计)。 对每对整数 $k, l = 0, 1, \dots$, 存在常数 C_{kl} , 使得

$$\max_{C(x, t; r/2)} |D_x^k D_t^l u| \leq \frac{C_{kl}}{r^{k+2l+n+2}} \|u\|_{L^1(C(x, t; r))}$$

对所有圆柱

$$C(x, t; r/2) \subset C(x, t; r) \subset U_T$$

以及 U_T 中所有热方程解 u 成立。

证明。 1. 固定 U_T 中某点。平移坐标后, 不妨设该点为 $(0, 0)$ 。先设圆柱

$$C(1) := C(0, 0; 1)$$

包含于 U_T , 并令 $C(1/2) := C(0, 0; 1/2)$ 。如定理 8 证明中那样, 对某个光滑函数 K ,

$$u(x, t) = \iint_{C(1)} K(x, t, y, s) u(y, s) dy ds \quad ((x, t) \in C(1/2)).$$

因此

$$|D_x^k D_t^l u(x, t)| \leq \iint_{C(1)} |D_t^l D_x^k K(x, t, y, s)| |u(y, s)| dy ds \leq C_{kl} \|u\|_{L^1(C(1))}. \quad (39)$$

2. 现在设 $C(r) := C(0, 0; r) \subset U_T$, $C(r/2) = C(0, 0; r/2)$ 。通过

$$v(x, t) := u(rx, r^2t)$$

缩放。则 $v_t - \Delta v = 0$ 于 $C(1)$ 。由 (39),

$$|D_x^k D_t^l v(x, t)| \leq C_{kl} \|v\|_{L^1(C(1))} \quad ((x, t) \in C(1/2)).$$

但

$$D_x^k D_t^l v(x, t) = r^{k+2l} D_x^k D_t^l u(rx, r^2t),$$

且

$$\|v\|_{L^1(C(1))} = r^{-(n+2)} \|u\|_{L^1(C(r))}.$$

于是

$$\max_{C(r/2)} |D_x^k D_t^l u| \leq \frac{C_{kl}}{r^{k+2l+n+2}} \|u\|_{L^1(C(r))}.$$

□

若 u 在 U_T 内求解热方程, 则对每个时间 $0 < t \leq T$, 映射 $x \mapsto u(x, t)$ 是解析的 (见 Mikhailov [M])。然而映射 $t \mapsto u(x, t)$ 一般并非解析。

2.3.4. 能量方法

a. 唯一性. 再次考察初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{于 } U_T, \\ u = g, & \text{于 } \Gamma_T. \end{cases} \quad (40)$$

我们先前调用极大值原理证明了唯一性; 现在仿照第 2.2.5 节, 给出一个基于分部积分的替代论证。照常假设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 开、有界, 且 ∂U 为 C^1 。终止时间 $T > 0$ 给定。

定理 10 (唯一性). 初边值问题 (40) 只有一个解 $u \in C_1^2(\overline{U}_T)$ 。

证明. 1. 若 $\tilde{u}$ 是另一个解, 则 $w := u - \tilde{u}$ 求解

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0, & \text{于 } U_T, \\ w = 0, & \text{于 } \Gamma_T. \end{cases} \quad (41)$$

2. 令

$$e(t) := \int_U w^2(x, t) \, dx \quad (0 \leq t \leq T).$$

则

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= 2 \int_U w w_t \, dx = 2 \int_U w \Delta w \, dx \\ &= -2 \int_U |Dw|^2 \, dx \leq 0.\end{aligned}$$

所以

$$e(t) \leq e(0) = 0 \quad (0 \leq t \leq T).$$

因此 $w = u - \tilde{u} \equiv 0$ 于 U_T 。□

注意，以上是第 2.2.5 节定理 16 证明的含时版本。

b. 反向唯一性. 一个更微妙的问题是热方程关于时间反向的唯一性。为此，设 u 与 $\tilde{u}$ 都是 U_T 中热方程的光滑解，并在 ∂U 上具有相同边界条件：

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{于 } U_T, \\ u = g, & \text{于 } \partial U \times [0, T], \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = 0, & \text{于 } U_T, \\ \tilde{u} = g, & \text{于 } \partial U \times [0, T], \end{cases} \quad (43)$$

其中 g 为某个函数。请特别注意，我们并未假设 $u = \tilde{u}$ 于时间 $t = 0$ 。

定理 11（反向唯一性）. 设 $u, \tilde{u} \in C^2(\overline{U_T})$ 求解 (42)、(43)。若

$$u(x, T) = \tilde{u}(x, T) \quad (x \in U),$$

则

$$u \equiv \tilde{u} \quad \text{于 } U_T.$$

换言之，若 U 上的两个温度分布在某一时刻 $T > 0$ 相同，并且在所有时间 $0 \leq t \leq T$ 具有相同边界值，那么这些温度在 U 中所有更早时刻必定完全相同。这一点并不显然。

证明. 1. 写 $w := u - \tilde{u}$ ，并如定理 10 的证明中那样令

$$e(t) := \int_U w^2(x, t) \, dx \quad (0 \leq t \leq T).$$

同前，

$$\dot{e}(t) = -2 \int_U |Dw|^2 \, dx. \quad (44)$$

此外

$$\begin{aligned}
 \ddot{e}(t) &= -4 \int_U Dw \cdot Dw_t \, dx \\
 &= 4 \int_U \Delta w \, w_t \, dx \\
 &= 4 \int_U (\Delta w)^2 \, dx,
 \end{aligned} \tag{45}$$

其中最后一步用到 (41)。又因 $w = 0$ 于 ∂U ,

$$\int_U |Dw|^2 \, dx = - \int_U w \Delta w \, dx \leq \left(\int_U w^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_U (\Delta w)^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

于是由 (44)、(45),

$$(\dot{e}(t))^2 = 4 \left(\int_U |Dw|^2 \, dx \right)^2 \leq \left(\int_U w^2 \, dx \right) \left(4 \int_U (\Delta w)^2 \, dx \right) = e(t) \ddot{e}(t).$$

因此

$$e(t) \ddot{e}(t) \geq (\dot{e}(t))^2 \quad (0 \leq t \leq T). \tag{46}$$

2. 若 $e(t) = 0$ 对所有 $0 \leq t \leq T$ 成立, 则证明完成。否则存在区间 $[t_1, t_2] \subset [0, T]$, 使

$$e(t) > 0 \quad (t_1 \leq t < t_2), \quad e(t_2) = 0. \tag{47}$$

3. 写

$$h(t) := \log e(t) \quad (t_1 \leq t < t_2). \tag{48}$$

则

$$\ddot{h}(t) = \frac{\ddot{e}(t)e(t) - (\dot{e}(t))^2}{e(t)^2} \geq 0$$

由 (46)。因此 h 在区间 (t_1, t_2) 上凸。于是若 $0 < \tau < 1$ 、 $t_1 < t < t_2$, 有

$$h((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq (1-\tau)h(t_1) + \tau h(t).$$

由 (48) 推出

$$e((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq e(t_1)^{1-\tau} e(t)^\tau.$$

令 $t = t_2$, 得到

$$0 \leq e((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \leq e(t_1)^{1-\tau} e(t_2)^\tau \quad (0 < \tau < 1).$$

但结合 (47), 这个不等式意味着 $e(t) = 0$ 对所有 $t_1 \leq t \leq t_2$ 成立, 矛盾。□

2.4. 波方程

本节研究波方程

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad (1)$$

以及非齐次波方程

$$u_{tt} - \Delta u = f, \quad (2)$$

并配以适当的初始条件和边界条件。这里 $t > 0$ 且 $x \in U$, 其中 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是开集。未知函数为

$$u : \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad u = u(x, t),$$

而 Laplace 算子 Δ 是关于空间变量 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 取的。在 (2) 中, 函数 $f : U \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 为给定函数。常用缩写是

$$\square u := u_{tt} - \Delta u.$$

我们将发现, 波方程解的行为同 Laplace 方程或热方程的解很不一样。例如, 这些解一般并非 C^∞ , 并且表现出有限传播速度等现象。

物理解释. 波方程是振动弦 ($n = 1$)、振动膜 ($n = 2$) 或弹性固体 ($n = 3$) 的简化模型。在这些物理解释中, $u(x, t)$ 表示点 x 在时刻 $t \geq 0$ 沿某一方向的位移。

令 V 表示 U 的任一光滑子区域。则 V 内的加速度为

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_V u \, dx = \int_V u_{tt} \, dx,$$

而净接触力为

$$- \int_{\partial V} F \cdot \nu \, dS,$$

其中 F 表示通过 ∂V 作用于 V 的力, 质量密度取为 1。Newton 定律断言质量乘以加速度等于净力:

$$\int_V u_{tt} \, dx = - \int_{\partial V} F \cdot \nu \, dS.$$

该恒等式对每个子区域 V 都成立, 因此

$$u_{tt} = -\operatorname{div} F.$$

对弹性体, F 是位移梯度 Du 的函数, 于是

$$u_{tt} + \operatorname{div} F(Du) = 0.$$

当 Du 很小时, 线性化 $F(Du) \approx -aDu$ 常常是合适的; 因而

$$u_{tt} - a\Delta u = 0.$$

若 $a = 1$ ，这就是波方程。

这个物理解释强烈提示，在数学上指定两个初始条件是合适的，即在时刻 $t = 0$ 指定位移 u 和速度 u_t 。

2.4.1. 由球面平均求解

我们在第 2.2.1 节和第 2.3.1 节中，分别从寻找 Laplace 方程和热方程的某些缩放不变解开始。对于波方程，我们改为介绍一个（相当）优美的方法：先直接求解 $n = 1$ 的情形，再用球面平均方法处理 $n \geq 2$ 。

a. $n = 1$ 的解：d'Alembert 公式。 先考虑整条实线上一维波方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{于 } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = g, \quad u_t = h, & \text{于 } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (3)$$

其中 g, h 为给定函数。我们希望推导出用 g, h 表示 u 的公式。

首先注意 (3) 中的偏微分方程可以“分解”为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u = u_{tt} - u_{xx} = 0. \quad (4)$$

写

$$v(x, t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t). \quad (5)$$

则 (4) 表明

$$v_t(x, t) + v_x(x, t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0).$$

这是常系数输运方程。应用第 2.1.1 节公式 (3)（取 $n = 1$ 、 $b = 1$ ），得

$$v(x, t) = a(x - t), \quad (6)$$

其中 $a(x) := v(x, 0)$ 。结合 (4)–(6)，得到

$$u_t(x, t) - u_x(x, t) = a(x - t) \quad \text{于 } \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

这是一个非齐次输运方程；故第 2.1.2 节公式 (5)（取 $n = 1$ 、 $b = -1$ 、 $f(x, t) = a(x - t)$ ）推出，对 $b(x) := u(x, 0)$ 有

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t a(x + (t - s) - s) ds + b(x + t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + b(x + t). \end{aligned} \quad (7)$$

最后用 (3) 中的初始条件计算 a, b 。第一个初始条件给出

$$b(x) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

而第二个初始条件和 (5) 蕴含

$$a(x) = v(x, 0) = u_t(x, 0) - u_x(x, 0) = h(x) - g'(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

代入 (7), 得到

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (h(y) - g'(y)) dy + g(x+t).$$

因此

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}, t \geq 0). \quad (8)$$

这就是 d'Alembert 公式。

上面的推导假设 u 是 (3) 的 (足够光滑的) 解。还需要检查这个公式确实给出一个解。

定理 1 (波方程的解, $n = 1$). 设 $g \in C^2(\mathbb{R})$ 、 $h \in C^1(\mathbb{R})$, 并由 d'Alembert 公式 (8) 定义 u 。则

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$,
- (ii) $u_{tt} - u_{xx} = 0$ 于 $\mathbb{R} \times (0, \infty)$,
- (iii) $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,0) \\ t>0}} u(x, t) = g(x_0), \quad \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,0) \\ t>0}} u_t(x, t) = h(x_0)$

对每个点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 成立。

证明是直接计算。

注. 1. 由 (8) 可见, 解 u 具有形式

$$u(x, t) = F(x+t) + G(x-t)$$

对适当函数 F, G 成立。反过来, 任何这种形式的函数都求解 $u_{tt} - u_{xx} = 0$ 。因此一维波方程的一般解, 是 $u_t - u_x = 0$ 的一般解与 $u_t + u_x = 0$ 的一般解之和。这是分解式 (4) 的结果。见习题 19。

2. 由 (8) 还可见, 若 $g \in C^k$ 且 $h \in C^{k-1}$, 则 $u \in C^k$, 但一般不会更光滑。因此波方程不像热方程那样使初始数据瞬时光滑化。

反射方法. 作为 d'Alembert 公式的另一个应用, 考虑半直线

$$\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$$

上的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{于 } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ u = g, \quad u_t = h, & \text{于 } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ u = 0, & \text{于 } \{x = 0\} \times (0, \infty), \end{cases} \quad (9)$$

其中 g, h 给定, 并且 $g(0) = h(0) = 0$ 。

把 u, g, h 奇延拓到整个 $\mathbb{R}$, 就可把 (9) 化为 (3) 的形式。也就是说, 令

$$\tilde{u}(x, t) := \begin{cases} u(x, t), & x \geq 0, t \geq 0, \\ -u(-x, t), & x \leq 0, t \geq 0, \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x), & x \geq 0, \\ -g(-x), & x \leq 0, \end{cases} \quad \tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x), & x \geq 0, \\ -h(-x), & x \leq 0. \end{cases}$$

于是 (9) 变为

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx}, & \text{于 } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ \tilde{u} = \tilde{g}, \quad \tilde{u}_t = \tilde{h}, & \text{于 } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

d'Alembert 公式 (8) 因而给出

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy.$$

回忆上面对 $\tilde{u}, \tilde{g}, \tilde{h}$ 的定义, 可以把这个表达式化成对 $x \geq 0, t \geq 0$ 的公式

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy, & x \geq t \geq 0, \\ \frac{1}{2} [g(x+t) - g(t-x)] + \frac{1}{2} \int_{-x+t}^{x+t} h(y) dy, & 0 \leq x \leq t. \end{cases} \quad (10)$$

若 $h \equiv 0$, 可以把公式 (10) 理解为: 初始位移 g 分裂成两部分, 一部分以速度 1 向右运动, 另一部分以速度 1 向左运动; 后者随后在点 $x = 0$ 处反射, 该点是振动弦的固定端。

注意, 除非 $g''(0) = 0$, 否则我们的解不属于 C^2 。

b. 球面平均. 现在设 $n \geq 2, m \geq 2$, 并设 $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ 求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, \quad u_t = h, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (11)$$

我们要推导 u 关于 g, h 的显式公式。计划是先研究 u 在某些球面上的平均。把这些平均看作时间 t 和半径 r 的函数，它们将满足 Euler–Poisson–Darboux 方程；当 n 为奇数时，我们能把该方程化为普通一维波方程。应用 d'Alembert 公式，或者更准确地说应用其变体 (10)，最终得到解的公式。

记号. 1. 令 $x \in \mathbb{R}^n$ 、 $t > 0$ 、 $r > 0$ 。定义

$$U(x; r, t) := \oint_{\partial B(x, r)} u(y, t) dS(y), \quad (12)$$

即 $u(\cdot, t)$ 在球面 $\partial B(x, r)$ 上的平均。

2. 类似地，

$$\begin{cases} G(x; r) := \oint_{\partial B(x, r)} g(y) dS(y), \\ H(x; r) := \oint_{\partial B(x, r)} h(y) dS(y). \end{cases} \quad (13)$$

固定 x 后，以下把 U 看作 r, t 的函数，并找出它所满足的偏微分方程。

引理 1 (Euler–Poisson–Darboux 方程). 固定 $x \in \mathbb{R}^n$ ，并令 u 满足 (11)。则 $U \in C^m(\overline{\mathbb{R}_+} \times [0, \infty))$ ，并且

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0, & \text{于 } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ U = G, \quad U_t = H, & \text{于 } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (14)$$

式 (14) 中的偏微分方程就是 Euler–Poisson–Darboux 方程。（注意 $U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r$ 是极坐标中 Laplace 算子的径向部分。）

证明. 1. 如第 2.2.2 节定理 2 的证明中那样，对 $r > 0$ 计算得

$$U_r(x; r, t) = \frac{r}{n} \oint_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy. \quad (15)$$

由此推出 $\lim_{r \rightarrow 0^+} U_r(x; r, t) = 0$ 。再对 (15) 求导，经过一些计算得到

$$U_{rr}(x; r, t) = \oint_{\partial B(x, r)} \Delta u dS + \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \oint_{B(x, r)} \Delta u dy. \quad (16)$$

所以

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} U_{rr}(x; r, t) = \frac{1}{n} \Delta u(x, t).$$

用公式 (16) 同样可计算 U_{rrr} 等，从而验证 $U \in C^m(\overline{\mathbb{R}_+} \times [0, \infty))$ 。

2. 继续上面的计算，由 (15) 及 (11) 得

$$U_r = \frac{r}{n} \oint_{B(x, r)} u_{tt} dy = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x, r)} u_{tt} dy.$$

因此

$$r^{n-1}U_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(x,r)} u_{tt} dy,$$

故

$$(r^{n-1}U_r)_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1} \oint_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1}U_{tt}.$$

这正是 (14)。□

c. $n = 3, 2$ 的解: Kirchhoff 公式和 Poisson 公式. 接下来的小节要把 Euler–Poisson–Darboux 方程 (14) 化为通常的一维波方程。完整过程相当复杂, 因此先停下来按 $n = 3, 2$ 的顺序处理较简单的情形。

$n = 3$ 的解. 以下令 $n = 3$, 并设 $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ 求解初值问题 (11)。回忆 (12)、(13) 中 U, G, H 的定义, 并设

$$\tilde{U} := rU, \quad \tilde{G} := rG, \quad \tilde{H} := rH. \quad (17-18)$$

现在断言 $\tilde{U}$ 求解

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0, & \text{于 } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ \tilde{U} = \tilde{G}, \quad \tilde{U}_t = \tilde{H}, & \text{于 } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ \tilde{U} = 0, & \text{于 } \{r = 0\} \times (0, \infty). \end{cases} \quad (19)$$

事实上,

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r \left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r \right) = rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr}.$$

还注意到 $\tilde{G}(0) = 0$ 。对 (19) 应用公式 (10), 当 $0 \leq r \leq t$ 时得到

$$\tilde{U}(x; r, t) = \frac{1}{2} [\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)] + \frac{1}{2} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y) dy. \quad (20)$$

由于 (12) 蕴含

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} U(x; r, t),$$

故由 (17)–(20) 推出

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{U}(x; r, t)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[\frac{\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y) dy \right] \\ &= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t). \end{aligned}$$

由 (13) 得

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t \oint_{\partial B(x,t)} g dS \right) + t \oint_{\partial B(x,t)} h dS. \quad (21)$$

而

$$\oint_{\partial B(x,t)} g(y) dS(y) = \oint_{\partial B(0,1)} g(x + tz) dS(z),$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\oint_{\partial B(x,t)} g dS \right) &= \oint_{\partial B(0,1)} Dg(x + tz) \cdot z dS(z) \\ &= \oint_{\partial B(x,t)} Dg(y) \cdot \frac{y-x}{t} dS(y). \end{aligned}$$

回到 (21), 得

$$u(x, t) = \oint_{\partial B(x,t)} [t h(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y-x)] dS(y) \quad (x \in \mathbb{R}^3, t > 0). \quad (22)$$

这就是三维初值问题 (11) 的 Kirchhoff 公式。

$n = 2$ 的解. 当 $n = 2$ 时, 没有类似 (17) 的变换能把 Euler–Poisson–Darboux 方程化为一维波方程。我们转而把 $n = 2$ 的初值问题 (11) 视为 $n = 3$ 的问题, 只是第三个空间变量 x_3 不出现。

设 $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ 求解 $n = 2$ 时的 (11), 定义

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t). \quad (23)$$

则 (11) 蕴含

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \Delta \bar{u} = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ \bar{u} = \bar{g}, \quad \bar{u}_t = \bar{h}, & \text{于 } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (24)$$

其中

$$\bar{g}(x_1, x_2, x_3) := g(x_1, x_2), \quad \bar{h}(x_1, x_2, x_3) := h(x_1, x_2).$$

若写 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\bar{x} = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$, 则 (24) 与 Kirchhoff 公式 (以 (21) 的形式) 给出

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \bar{u}(\bar{x}, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(t \oint_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{g} d\bar{S} \right) + t \oint_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{h} d\bar{S}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $B(\bar{x}, t)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中以 $\bar{x}$ 为中心、半径为 t 的球, $d\bar{S}$ 表示 $\partial B(\bar{x}, t)$ 上的二维面积元。

化简 (25)。令

$$\gamma(y) := (t^2 - |y - x|^2)^{1/2} \quad (y \in B(x, t) \subset \mathbb{R}^2).$$

球面 $\partial B(\bar{x}, t)$ 由两个半球组成, 它们分别是 γ 与 $-\gamma$ 的图像, 且

$$(1 + |D\gamma|^2)^{1/2} = t(t^2 - |y - x|^2)^{-1/2}.$$

因此

$$\oint_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{g} \, d\bar{S} = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy = \frac{t}{2} \oint_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy.$$

把这个公式以及 g 换成 h 的类似公式代入 (25), 得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(t^2 \oint_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy \right) \\ &\quad + \frac{t^2}{2} \oint_{B(x, t)} \frac{h(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy. \end{aligned} \quad (26)$$

又

$$t^2 \oint_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy = t \oint_{B(0, 1)} \frac{g(x + tz)}{(1 - |z|^2)^{1/2}} dz,$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(t^2 \oint_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy \right) &= t \oint_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy \\ &\quad + t \oint_{B(x, t)} \frac{Dg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy. \end{aligned}$$

于是 (26) 可写为

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \oint_{B(x, t)} \frac{t g(y) + t^2 h(y) + t Dg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy \quad (x \in \mathbb{R}^2, t > 0). \quad (27)$$

这就是二维初值问题 (11) 的 Poisson 公式。

先求解 $n = 3$, 再降到 $n = 2$ 的技巧称为降维法。

d. 奇数维的解. 本小节求解奇数 $n \geq 3$ 时的 Euler–Poisson–Darboux 方程。先记录一些技术事实。

引理 2 (若干有用恒等式). 设 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 属于 C^{k+1} 。则对 $k = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \left(\frac{d^2}{dr^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} (r^{2k-1} \phi(r)) = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^k \left(r^{2k} \frac{d\phi}{dr}(r) \right), \\ \text{(ii)} \quad & \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} (r^{2k-1} \phi(r)) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{jk} r^{j+1} \frac{d^j \phi}{dr^j}(r), \end{aligned}$$

其中常数 β_{jk} ($j = 0, \dots, k-1$) 与 ϕ 无关。此外

$$\text{(iii)} \quad \beta_{0k} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1).$$

证明由归纳完成, 留作练习。

现在假设

$$n \geq 3 \quad \text{为奇整数,}$$

并写

$$n = 2k + 1 \quad (k \geq 1).$$

以下设 $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ 求解初值问题 (11)。则由 (12) 定义的函数 U 属于 C^{k+1} 。

记号. 写

$$\begin{cases} \tilde{U}(r, t) := \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} (r^{2k-1} U(x; r, t)), \\ \tilde{G}(r) := \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} (r^{2k-1} G(x; r)), \\ \tilde{H}(r) := \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} (r^{2k-1} H(x; r)), \end{cases} \quad (28)$$

其中 $r > 0$ 、 $t \geq 0$ 。则

$$\tilde{U}(r, 0) = \tilde{G}(r), \quad \tilde{U}_t(r, 0) = \tilde{H}(r). \quad (29)$$

引理 3 ($\tilde{U}$ 求解一维波方程)。我们有

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0, & \text{于 } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ \tilde{U} = \tilde{G}, \quad \tilde{U}_t = \tilde{H}, & \text{于 } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ \tilde{U} = 0, & \text{于 } \{r = 0\} \times (0, \infty). \end{cases}$$

证明. 若 $r > 0$, 则

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{rr} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} (r^{2k-1} U) \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^k (r^{2k} U_r) \quad \text{由引理 2(i)} \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} [r^{2k-1} U_{rr} + 2kr^{2k-2} U_r] \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left[r^{2k-1} \left(U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} (r^{2k-1} U_{tt}) = \tilde{U}_{tt}, \end{aligned}$$

其中倒数第二个等号由 (14) 得出。由引理 2(ii) 还可推出 $\tilde{U} = 0$ 于 $\{r = 0\}$ 。□

由引理 3、(29) 和公式 (10)，当 $0 \leq r \leq t$ 时，

$$\tilde{U}(r, t) = \frac{1}{2} [\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)] + \frac{1}{2} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y) dy. \quad (30)$$

但回忆 $u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U(x; r, t)$ 。又引理 2(ii) 断言

$$\tilde{U}(r, t) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{jk} r^{j+1} \frac{\partial^j}{\partial r^j} U(x; r, t),$$

所以

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{U}(r, t)}{\beta_{0k} r} = \lim_{r \rightarrow 0} U(x; r, t) = u(x, t).$$

于是 (30) 蕴含

$$u(x, t) = \frac{1}{\beta_{0k}} \left[\tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t) \right].$$

最后, 由于 $n = 2k + 1$, (30) 与引理 2(iii) 给出如下表示公式:

$$\begin{aligned} u(x, t) = \frac{1}{\gamma_n} & \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-3)/2} \left(t^{n-2} \oint_{\partial B(x, t)} g \, dS \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-3)/2} \left(t^{n-2} \oint_{\partial B(x, t)} h \, dS \right) \right], \end{aligned} \quad (31)$$

其中 n 为奇数,

$$\gamma_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2),$$

并且 $x \in \mathbb{R}^n$ 、 $t > 0$ 。

注意 $\gamma_3 = 1$, 因此 $n = 3$ 时 (31) 与 (21), 从而与 Kirchhoff 公式 (22) 一致。

还剩下检查公式 (31) 确实给出 (11) 的一个解。

定理 2 (奇数维波方程的解). 设 n 为奇整数, $n \geq 3$, 并设

$$g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n), \quad h \in C^m(\mathbb{R}^n), \quad m = \frac{n+1}{2}.$$

由 (31) 定义 u 。则

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$,
- (ii) $u_{tt} - \Delta u = 0$ 于 $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$,
- (iii) $\lim_{\substack{(x, t) \rightarrow (x_0, 0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = g(x_0), \quad \lim_{\substack{(x, t) \rightarrow (x_0, 0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u_t(x, t) = h(x_0)$

对每个点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 成立。

证明. 1. 先设 $g \equiv 0$, 于是

$$u(x, t) = \frac{1}{\gamma_n} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-3)/2} (t^{n-2} H(x; t)). \quad (32)$$

由引理 2(i) 可算得

$$u_{tt} = \frac{1}{\gamma_n} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-1)/2} (t^{n-1} H_t).$$

由第 2.2.2 节定理 2 证明中的计算, 还知道

$$H_t = \frac{t}{n} \oint_{B(x,t)} \Delta h \, dy.$$

因此

$$u_{tt} = \frac{1}{n\alpha(n)\gamma_n} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-1)/2} \left(\int_{B(x,t)} \Delta h \, dy \right) = \Delta u.$$

另一方面,

$$\Delta H(x; t) = \Delta_x \oint_{\partial B(0,t)} h(x+y) \, dS(y) = \oint_{\partial B(x,t)} \Delta h \, dS.$$

于是 (32) 与上述计算推出 $u_{tt} = \Delta u$ 于 $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 。若 $h \equiv 0$, 同样的计算也成立。

2. 利用引理 2(ii)–(iii) 可以确认 u 取得正确的初始条件; 此细节留作练习。□

注. 1. 注意, 为计算 $u(x, t)$, 只需要知道 g, h 及其导数在球面 $\partial B(x, t)$ 上的信息, 而不需要知道整个球 $B(x, t)$ 上的信息。

2. 把公式 (31) 与 d'Alembert 公式 (8) ($n = 1$) 比较, 可以看到后者不含 g 的导数。这提示我们, 当 $n > 1$ 时, 波方程 (11) 的解在 $t > 0$ 时未必像初值 g 那样光滑: g 中的不规则性可能在 $t > 0$ 时聚焦, 从而导致 u 正则性降低。(稍后第 2.4.3 节会看到, u 的“能量范数”在 $t > 0$ 时不会变坏。)

3. 再一次 (如 $n = 1$ 的情形) 看到初始扰动的有限传播速度现象。

4. 第 4.3.3 节给出了公式 (31) 的一种完全不同的推导 (使用热方程!)。

e. 偶数维的解. 现在假设

n 为偶整数.

设 u 是 (11) 的一个 C^m 解, 其中 $m = (n+2)/2$ 。我们要为 u 构造类似 (31) 的表示公式。技巧同上面对 $n = 2$ 的处理: 注意

$$\bar{u}(x_1, \dots, x_{n+1}, t) := u(x_1, \dots, x_n, t) \quad (33)$$

在 $\mathbb{R}^{n+1} \times (0, \infty)$ 中求解波方程, 初始条件为

$$\bar{u} = \bar{g}, \quad \bar{u}_t = \bar{h} \quad \text{于 } \mathbb{R}^{n+1} \times \{t = 0\},$$

其中

$$\begin{cases} \bar{g}(x_1, \dots, x_{n+1}) := g(x_1, \dots, x_n), \\ \bar{h}(x_1, \dots, x_{n+1}) := h(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (34)$$

由于 $n+1$ 是奇数, 可以使用 (31) (把其中 n 换成 $n+1$) 来获得 $\bar{u}$ 关于 $\bar{g}, \bar{h}$ 的表示公式。然后 (33)、(34) 立即给出 u 关于 g, h 的公式。这仍然是降维法。

具体而言, 固定 $x \in \mathbb{R}^n$ 、 $t > 0$, 并写

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

由 (31) (把 n 换成 $n+1$) 得

$$u(x, t) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-2)/2} \left(t^{n-1} \oint_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{g} d\bar{S} \right) + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-2)/2} \left(t^{n-1} \oint_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{h} d\bar{S} \right) \right], \quad (35)$$

其中 $B(\bar{x}, t)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中以 $\bar{x}$ 为中心、半径为 t 的球, $d\bar{S}$ 表示 $\partial B(\bar{x}, t)$ 上的 n 维面积元。

现在

$$\oint_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{g} d\bar{S} = \frac{1}{(n+1)\alpha(n+1)t^n} \int_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{g} d\bar{S}. \quad (36)$$

注意 $\partial B(\bar{x}, t) \cap \{y_{n+1} \geq 0\}$ 是函数

$$\gamma(y) := (t^2 - |y - x|^2)^{1/2} \quad (y \in B(x, t) \subset \mathbb{R}^n)$$

的图像; 同样, $\partial B(\bar{x}, t) \cap \{y_{n+1} \leq 0\}$ 是 $-\gamma$ 的图像。故 (36) 蕴含

$$\oint_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{g} d\bar{S} = \frac{2}{(n+1)\alpha(n+1)t^n} \int_{B(x, t)} g(y)(1 + |D\gamma(y)|^2)^{1/2} dy. \quad (37)$$

因子 2 的出现, 是因为 $\partial B(\bar{x}, t)$ 由两个半球组成。又

$$(1 + |D\gamma(y)|^2)^{1/2} = t(t^2 - |y - x|^2)^{-1/2}.$$

代入 (37), 得到

$$\oint_{\partial B(\bar{x}, t)} \bar{g} d\bar{S} = \frac{2t\alpha(n)}{(n+1)\alpha(n+1)} \oint_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy.$$

把这个公式以及 h 代替 g 的类似公式代入 (35), 并利用

$$\gamma_{n+1} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1),$$

得到偶数维的表示公式:

$$u(x, t) = \frac{1}{\gamma_n} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-2)/2} \left(t^n \oint_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy \right) + \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-2)/2} \left(t^n \oint_{B(x, t)} \frac{h(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy \right) \right], \quad (38)$$

其中 n 为偶数,

$$\gamma_n = 2 \cdot 4 \cdots (n-2) \cdot n,$$

并且 $x \in \mathbb{R}^n$ 、 $t > 0$ 。

由于 $\gamma_2 = 2$, 当 $n = 2$ 时, 这与 Poisson 公式 (27) 一致。

定理 3 (偶数维波方程的解). 设 n 为偶整数, $n \geq 2$, 并设

$$g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n), \quad h \in C^m(\mathbb{R}^n), \quad m = \frac{n+2}{2}.$$

由 (38) 定义 u 。则

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)), \\ \text{(ii)} \quad & u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \text{(iii)} \quad & \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x,t) = g(x_0), \quad \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u_t(x,t) = h(x_0) \end{aligned}$$

对每个点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 成立。

这由定理 2 推出。注意, 与公式 (31) 不同, 偶数维中为了计算 $u(x,t)$, 需要知道 $u = g$ 、 $u_t = h$ 在整个 $B(x,t)$ 上的信息, 而不仅是 $\partial B(x,t)$ 上的信息。

Huygens 原理. 比较 (31) 与 (38), 可以看到: 若 n 为奇数且 $n \geq 3$, 给定点 $x \in \mathbb{R}^n$ 处的数据 g, h 只在锥面

$$\{(y,t) \mid t > 0, |x - y| = t\}$$

上影响解 u , 该锥面是

$$C = \{(y,t) \mid t > 0, |x - y| < t\}$$

的边界。另一方面, 若 n 为偶数, 则数据 g, h 会影响整个 C 内的 u 。换言之, 源自 x 的“扰动”在奇数维中沿一个清晰的波前传播, 而在偶数维中, 即使波前的前沿已经经过, 它仍会继续产生影响。这就是 Huygens 原理。

2.4.2. 非齐次问题

接下来研究非齐次波方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = 0, \quad u_t = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (39)$$

受前面第 2.3.1 节引入的 Duhamel 原理启发, 定义 $u = u(x,t;s)$ 为下列问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt}(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (s, \infty), \\ u(\cdot; s) = 0, \quad u_t(\cdot; s) = f(\cdot, s), & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = s\}. \end{cases} \quad (40_s)$$

现在令

$$u(x,t) := \int_0^t u(x,t;s) ds \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0). \quad (41)$$

Duhamel 原理断言, 这就是

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = 0, \quad u_t = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (42)$$

的解。

定理 4 (非齐次波方程的解). 设 $n \geq 2$ 且

$$f \in C^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)).$$

由 (41) 定义 u 。则

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)), \\ \text{(ii)} \quad & u_{tt} - \Delta u = f \quad \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \text{(iii)} \quad & \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = 0, \quad \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u_t(x, t) = 0 \end{aligned}$$

对每个点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 成立。

证明. 1. 若 n 为奇数, 则 $[n/2] + 1 = (n+1)/2$ 。由定理 2, 对每个 $s \geq 0$, $u(\cdot, \cdot; s) \in C^2(\mathbb{R}^n \times [s, \infty))$, 故 $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ 。若 n 为偶数, 则 $[n/2] + 1 = (n+2)/2$, 由定理 3 同样得到 $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ 。

2. 计算得

$$u_t(x, t) = u_t(x, t; t) + \int_0^t u_{tt}(x, t; s) ds = \int_0^t u_{tt}(x, t; s) ds,$$

并且

$$u_{tt}(x, t) = u_{tt}(x, t; t) + \int_0^t u_{ttt}(x, t; s) ds = f(x, t) + \int_0^t u_{ttt}(x, t; s) ds.$$

又

$$\Delta u(x, t) = \int_0^t \Delta u(x, t; s) ds = \int_0^t u_{tt}(x, t; s) ds.$$

因此

$$u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0),$$

并且显然 $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ 。□

于是一般非齐次问题的解, 是 (11) 的解 (由公式 (8)、(31) 或 (38) 给出) 与 (42) 的解 (由 (41) 给出) 之和。

例. 1. 先显式写出 $n = 1$ 时 (42) 的解。此时 d'Alembert 公式 (8) 给出

$$u(x, t; s) = \frac{1}{2} \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y, s) dy,$$

因而

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y, s) dy ds.$$

也就是说

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-s}^{x+s} f(y, t-s) dy ds \quad (x \in \mathbb{R}, t \geq 0). \quad (43)$$

2. 当 $n = 3$ 时, Kirchhoff 公式 (22) 蕴含

$$u(x, t; s) = (t-s) \oint_{\partial B(x, t-s)} f(y, s) dS,$$

于是

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t (t-s) \left(\oint_{\partial B(x, t-s)} f(y, s) dS \right) ds \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{\partial B(x, t-s)} \frac{f(y, s)}{t-s} dS ds \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{\partial B(x, r)} \frac{f(y, t-r)}{r} dS dr. \end{aligned}$$

因此

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B(x, t)} \frac{f(y, t-|y-x|)}{|y-x|} dy \quad (x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0) \quad (44)$$

求解 $n = 3$ 时的 (42)。右端的被积函数称为推迟势。

2.4.3. 能量方法

显式公式 (31) 和 (38) 表明, 随着维数 n 越来越大, 为保证波方程存在 C^2 解, 需要对数据 g, h 作越来越高的光滑性假设。这提示我们, 也许用另外一种方式度量函数的大小和光滑性更合适。事实上, 本小节会看到, 波方程关于某些积分“能量”范数表现良好 (对所有 n 都如此)。

a. 唯一性. 令 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为有光滑边界 ∂U 的有界开集, 并照常记

$$U_T = U \times (0, T], \quad \Gamma_T = \overline{U}_T - U_T,$$

其中 $T > 0$ 。

考虑初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & \text{于 } U_T, \\ u = g, & \text{于 } \Gamma_T, \\ u_t = h, & \text{于 } U \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (45)$$

定理 5 (波方程的唯一性). 至多存在一个函数 $u \in C^2(\overline{U}_T)$ 求解 (45)。

证明. 若 $\tilde{u}$ 是另一个这样的解, 则 $w := u - \tilde{u}$ 求解

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0, & \text{于 } U_T, \\ w = 0, & \text{于 } \Gamma_T, \\ w_t = 0, & \text{于 } U \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

定义“能量”

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_U (w_t^2(x, t) + |Dw(x, t)|^2) dx \quad (0 \leq t \leq T).$$

计算

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= \int_U w_t w_{tt} + Dw \cdot Dw_t dx \\ &= \int_U w_t (w_{tt} - \Delta w) dx = 0. \end{aligned}$$

没有边界项, 因为 $w = 0$, 因而 $w_t = 0$ 于 $\partial U \times [0, T]$ 。因此对所有 $0 \leq t \leq T$,

$$E(t) = E(0) = 0.$$

于是 $w_t, Dw \equiv 0$ 于 U_T 。又因 $w \equiv 0$ 于 $U \times \{t = 0\}$, 推出 $w = u - \tilde{u} \equiv 0$ 于 U_T 。□

b. 依赖区域. 作为能量方法的另一个说明, 再来考察整空间中波方程解的依赖区域。设 $u \in C^2$ 求解

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

固定 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 、 $t_0 > 0$, 并考虑顶点为 (x_0, t_0) 的向后波锥

$$K(x_0, t_0) := \{(x, t) \mid 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq t_0 - t\}.$$

定理 6 (有限传播速度). 若

$$u \equiv u_t \equiv 0 \quad \text{于 } B(x_0, t_0) \times \{t = 0\},$$

则 $u \equiv 0$ 于锥 $K(x_0, t_0)$ 内。

特别地, 可见任何源自 $B(x_0, t_0)$ 外部的“扰动”都不会影响 $K(x_0, t_0)$ 内的解, 因此扰动具有有限传播速度。在 $g = u$ 、 $h = u_t$ 于 $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ 足够光滑的假设下, 我们已经能从表示公式 (31) 和 (38) 看出这一点。这里的要点是, 能量方法给出了简单得多的证明。

证明. 定义局部能量

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0-t)} (u_t^2(x, t) + |Du(x, t)|^2) dx \quad (0 \leq t \leq t_0).$$

则

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \int_{B(x_0, t_0-t)} (u_t u_{tt} + Du \cdot Du_t) dx - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} (u_t^2 + |Du|^2) dS \\ &= \int_{B(x_0, t_0-t)} u_t (u_{tt} - \Delta u) dx + \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t dS \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} (u_t^2 + |Du|^2) dS \\ &= \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} u_t - \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} |Du|^2 \right) dS. \end{aligned} \quad (46)$$

由 Cauchy–Schwarz 不等式和 Cauchy 不等式 (第 B.2 节),

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t \right| \leq |u_t| |Du| \leq \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} |Du|^2. \quad (47)$$

把 (47) 代入 (46), 得到 $\dot{e}(t) \leq 0$. 故

$$e(t) \leq e(0) = 0 \quad (0 \leq t \leq t_0).$$

于是 $u_t, Du \equiv 0$, 从而 $u \equiv 0$ 于锥 $K(x_0, t_0)$ 内。□

第 7.2.4 节给出了把这个证明推广到更复杂几何情形的方法。第 12.1 节也有非线性波方程的类似计算。

2.5. 习题

以下习题中, 除非另有说明, 所有给定函数均假设为光滑函数。

1. 写出一个求解初值问题

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du + cu = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

的函数 u 的显式公式。这里 $c \in \mathbb{R}$ 与 $b \in \mathbb{R}^n$ 为常数。

2. 证明 Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 在旋转下不变; 也就是说, 若 O 是正交 $n \times n$ 矩阵, 并定义

$$v(x) := u(Ox) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

则 $\Delta v = 0$ 。

3. 修改平均值公式的证明, 说明当 $n \geq 3$ 时, 若

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{于 } B^0(0, r), \\ u = g, & \text{于 } \partial B(0, r), \end{cases}$$

则

$$u(0) = \int_{\partial B(0, r)} g \, dS + \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{B(0, r)} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) f \, dx.$$

4. 直接证明: 若 $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ 在有界开集 U 内调和, 则

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u.$$

提示: 对 $\varepsilon > 0$ 定义 $u^\varepsilon := u + \varepsilon|x|^2$, 并证明 u^ε 不可能在内部点取得 $\bar{U}$ 上的最大值。

5. 若 $v \in C^2(\bar{U})$ 且

$$-\Delta v \leq 0 \quad \text{于 } U,$$

则称 v 为次调和函数。

(a) 证明对次调和函数 v 有

$$v(x) \leq \int_{B(x, r)} v \, dy \quad \text{对所有 } B(x, r) \subset U.$$

(b) 由此证明, 若 U 有界, 则

$$\max_{\bar{U}} v = \max_{\partial U} v.$$

(c) 设 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 光滑且凸。若 u 调和且 $v := \phi(u)$, 证明 v 次调和。

(d) 证明只要 u 调和, $v := |Du|^2$ 就次调和。

6. 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界开子集。证明存在只依赖于 U 的常数 C , 使得只要 u 是

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{于 } U, \\ u = g, & \text{于 } \partial U \end{cases}$$

的光滑解, 就有

$$\max_{\bar{U}} |u| \leq C \left(\max_{\partial U} |g| + \max_{\bar{U}} |f| \right).$$

提示: 令 $\lambda := \max_{\bar{U}} |f|$, 则 $-\Delta(u + \lambda|x|^2/(2n)) \leq 0$ 。

7. 用球的 Poisson 公式证明: 若 u 在 $B^0(0, r)$ 中正且调和, 则

$$r^{n-2} \frac{r - |x|}{(r + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq r^{n-2} \frac{r + |x|}{(r - |x|)^{n-1}} u(0).$$

这是 Harnack 不等式的一个显式形式。

8. 证明第 2.2.4 节中的定理 15。提示：由于 $u \equiv 1$ 在 $g \equiv 1$ 时求解 (44)，理论自动推出

$$\int_{\partial B(0,1)} K(x, y) dS(y) = 1$$

对每个 $x \in B^0(0, 1)$ 成立。

9. 设 u 是由半空间 Poisson 公式给出的

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{于 } \mathbb{R}_+^n, \\ u = g, & \text{于 } \partial \mathbb{R}_+^n \end{cases}$$

的解。假设 g 有界，且当 $x \in \partial \mathbb{R}_+^n$ 、 $|x| \leq 1$ 时 $g(x) = |x|$ 。证明 Du 在 $x = 0$ 附近无界。提示：估计

$$\frac{u(\lambda e_n) - u(0)}{\lambda}.$$

10. (反射原理)

- (a) 令 U^+ 表示开半球 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1, x_n > 0\}$ 。设 $u \in C^2(U^+)$ 在 U^+ 中调和，且 $u = 0$ 于 $\partial U^+ \cap \{x_n = 0\}$ 。对 $x \in U = B^0(0, 1)$ ，令

$$v(x) := \begin{cases} u(x), & x_n \geq 0, \\ -u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

证明 $v \in C^2(U)$ ，从而 v 在 U 内调和。

- (b) 现在仅假设 $u \in C^2(U^+) \cap C(\overline{U^+})$ 。证明 v 在 U 内调和。提示：使用球的 Poisson 公式。

11. (Laplace 方程的 Kelvin 变换) 函数 $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的 Kelvin 变换 $\mathcal{K}u = \bar{u}$ 为

$$\bar{u}(x) := u(\bar{x})|\bar{x}|^{n-2} = u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)|x|^{2-n} \quad (x \neq 0),$$

其中 $\bar{x} = x/|x|^2$ 。证明若 u 调和，则 $\bar{u}$ 也调和。提示：先证明

$$D_x \bar{x} (D_x \bar{x})^T = |\bar{x}|^4 I.$$

映射 $x \mapsto \bar{x}$ 是保角的，即保持角度。

12. 设 u 光滑且在 $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ 中求解 $u_t - \Delta u = 0$ 。

- (a) 证明对每个 $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u^\lambda(x, t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$$

也求解热方程。

(b) 用 (a) 证明

$$v(x, t) := x \cdot Du(x, t) + 2tu_t(x, t)$$

也求解热方程。

13. 设 $n = 1$ 且

$$u(x, t) = v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

(a) 证明

$$u_t = u_{xx}$$

当且仅当

$$v'' + \frac{z}{2}v' = 0. \quad (*)$$

证明 (*) 的通解为

$$v(z) = c \int_0^z e^{-s^2/4} ds + d.$$

(b) 对 $u(x, t) = v(x/\sqrt{t})$ 关于 x 求导, 并适当选择常数 c , 以得到 $n = 1$ 时的基本解 Φ 。解释为什么这个过程会产生基本解。提示: u 的初始条件是什么?

14. 写出

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

的一个解的显式公式, 其中 $c \in \mathbb{R}$ 。

15. 给定 $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 且 $g(0) = 0$, 推导公式

$$u(x, t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{e^{-x^2/[4(t-s)]}}{(t-s)^{3/2}} g(s) ds$$

作为初边值问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{于 } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{于 } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ u = g, & \text{于 } \{x = 0\} \times [0, \infty) \end{cases}$$

的一个解。提示: 令 $v(x, t) := u(x, t) - g(t)$, 并把 v 奇延拓到 $\{x < 0\}$ 。

16. 直接证明: 若 U 有界且 $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ 求解热方程, 则

$$\max_{\overline{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

提示: 对 $\varepsilon > 0$ 定义 $u^\varepsilon := u - \varepsilon t$, 并证明 u^ε 不可能在 U_T 中的点取得 $\overline{U}_T$ 上的最大值。

17. 若 $v \in C_1^2(U_T)$ 且

$$v_t - \Delta v \leq 0 \quad \text{于 } U_T,$$

则称 v 为热方程的次解。

(a) 证明对次解 v 有

$$v(x, t) \leq \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x, t; r)} v(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds$$

对所有 $E(x, t; r) \subset U_T$ 成立。

(b) 由此证明

$$\max_{\bar{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v.$$

(c) 设 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 光滑且凸。若 u 求解热方程且 $v := \phi(u)$, 证明 v 是次解。

(d) 证明只要 u 求解热方程,

$$v := |Du|^2 + u_t^2$$

就是次解。

18. 设 u 求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = 0, \quad u_t = h, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

证明 $v := u_t$ 求解

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ v = h, \quad v_t = 0, & \text{于 } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

这就是 Stokes 规则。

19. (a) 证明偏微分方程 $u_{xy} = 0$ 的通解为

$$u(x, y) = F(x) + G(y),$$

其中 F, G 为任意函数。

(b) 使用变量替换

$$\xi = x + t, \quad \eta = x - t,$$

证明 $u_{tt} - u_{xx} = 0$ 当且仅当 $u_{\xi\eta} = 0$ 。

(c) 用 (a) 和 (b) 重新推导 d'Alembert 公式。

(d) 对初始数据 g, h 施加什么条件时, 解 u 是右行波? 又在什么条件下是左行波?

20. 假设对于某个衰减函数 $\alpha = \alpha(r)$ 和延迟函数 $\beta = \beta(r) \geq 0$, 对所有波形 ϕ , 在 $(\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}$ 中都存在形如

$$u(x, t) = \alpha(r)\phi(t - \beta(r))$$

的波方程解。这里 $r = |x|$, 并假设 $\beta(0) = 0$ 。证明这只有在 $n = 1$ 或 $n = 3$ 时才可能, 并计算函数 α, β 的形式。

(T. Morley, *SIAM Review* 27 (1985), 69–71)

21. (a) 假设 $E = (E_1, E_2, E_3)$ 和 $B = (B_1, B_2, B_3)$ 求解 Maxwell 方程

$$\begin{cases} E_t = \text{curl } B, \\ B_t = -\text{curl } E, \\ \text{div } B = \text{div } E = 0. \end{cases}$$

证明

$$E_{tt} - \Delta E = 0, \quad B_{tt} - \Delta B = 0.$$

- (b) 假设 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 求解线性弹性力学的演化方程

$$\mathbf{u}_{tt} - \mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) D(\text{div } \mathbf{u}) = 0 \quad \text{于 } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty).$$

证明 $w := \text{div } \mathbf{u}$ 和 $\mathbf{w} := \text{curl } \mathbf{u}$ 各自求解波方程, 但传播速度不同。