

常微分方程解的存在唯一性与延伸理论

详细证明与核心思路

目录

1 皮卡存在唯一性定理

1.1 利普希茨条件

定义 1.1 (利普希茨条件). 设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内满足不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

其中常数 $L > 0$, 则称 $f(x, y)$ 在 D 内对 y 满足利普希茨条件。

若 $f(x, y)$ 在凸区域 D 内对 y 有连续的偏微商, 且 D 有界闭, 则 f 满足利普希茨条件; 反之不一定成立, 例如 $f(x, y) = |y|$ 满足利普希茨条件但在 $y = 0$ 处不可微。

1.2 皮卡定理的陈述

定理 1.2 (皮卡存在唯一性定理). 设初值问题

$$(E): \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

其中 $f(x, y)$ 在矩形区域

$$R: |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b$$

内连续, 且对 y 满足利普希茨条件 (常数 L)。令 $M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|$, 并取

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\},$$

则 (E) 在区间 $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ 上有且只有一个解。

1.3 证明的核心思想

皮卡定理的证明采用逐次逼近法 (Picard 迭代), 核心思想是:

1. 将微分方程转化为等价的积分方程;
2. 构造一个函数序列 (Picard 序列), 使其在某个闭区间上一致收敛;
3. 证明极限函数满足积分方程, 从而为原问题的解;
4. 利用利普希茨条件证明解的唯一性。

1.4 详细证明

1.4.1 第一步：转化为积分方程

若 $y = y(x)$ 是 (E) 的解, 则对 $x \in I$ 积分得

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

反之, 若 y 满足此积分方程且连续, 则 y 可微且满足微分方程。因此, 问题等价于求解积分方程。

1.4.2 第二步：构造 Picard 序列

定义序列 $\{y_n(x)\}$ 如下:

$$y_0(x) \equiv y_0, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

我们需要证明每个 y_n 都在 I 上有定义, 且取值在 R 内。

首先, 当 $n = 0$ 时, $y_0(x) \equiv y_0$, 显然 $|y_0(x) - y_0| = 0 \leq b$, 所以 $(x, y_0(x)) \in R$ 。由 f 的连续性, $f(x, y_0(x))$ 连续, 因此 $y_1(x)$ 可微且

$$|y_1(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0(t))| dt \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b,$$

故 $y_1(x)$ 的值也在 R 内。归纳假设 $y_n(x)$ 在 I 上连续且 $|y_n(x) - y_0| \leq b$, 则 $f(x, y_n(x))$ 连续, 从而 $y_{n+1}(x)$ 定义且

$$|y_{n+1}(x) - y_0| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b.$$

因此, 所有 y_n 都在 I 上有定义, 且值域在 R 内。

1.4.3 第三步：一致收敛性

考虑级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+1}(x) - y_n(x))$ 。我们证明其在 I 上一致收敛。

利用利普希茨条件, 对 $x \geq x_0$ 情形 ($x \leq x_0$ 对称):

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq M|x - x_0|.$$

假设

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq \frac{M(L|x - x_0|)^{k+1}}{L(k+1)!},$$

则

$$\begin{aligned}
 |y_{k+2}(x) - y_{k+1}(x)| &\leq \int_{x_0}^x L |y_{k+1}(t) - y_k(t)| dt \\
 &\leq \int_{x_0}^x L \cdot \frac{M (L|t - x_0|)^{k+1}}{(k+1)!} dt \\
 &= M \int_{x_0}^x \frac{(L(t - x_0))^{k+1}}{(k+1)!} dt \\
 &= \frac{M (L(x - x_0))^{k+2}}{L (k+2)!}.
 \end{aligned}$$

对 $x < x_0$ 类似可得

$$|y_{k+2}(x) - y_{k+1}(x)| \leq \frac{M (L|x - x_0|)^{k+2}}{L (k+2)!}.$$

因此, 对一切 n ,

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{M (Lh)^n}{L n!}, \quad x \in I.$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Lh)^n}{n!} = e^{Lh}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+1} - y_n)$ 在 I 上一致收敛, 从而 $\{y_n\}$ 一致收敛到某个函数 $\varphi(x)$, 且 φ 在 I 上连续。

1.4.4 第四步: 极限函数是解

在积分方程

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt$$

中令 $n \rightarrow \infty$ 。由于 y_n 一致收敛到 φ , 且 f 连续, 故 $f(t, y_n(t))$ 一致收敛到 $f(t, \varphi(t))$ (注意 y_n 在 R 内, f 在 R 上一致连续, 因此可以交换极限与积分)。于是

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt,$$

即 φ 满足积分方程, 从而为原方程的解。

1.4.5 第五步: 唯一性

设 $u(x), v(x)$ 均为解, 则

$$u(x) - v(x) = \int_{x_0}^x [f(t, u(t)) - f(t, v(t))] dt.$$

利用利普希茨条件,

$$|u(x) - v(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^x |u(t) - v(t)| dt \right|.$$

记 $w(x) = |u(x) - v(x)|$, 则 $w(x) \leq L \int_{x_0}^x w(t) dt$ (对 $x \geq x_0$)。由 Gronwall 不等式, $w(x) \equiv 0$ 。对 $x \leq x_0$ 类似。因此 $u \equiv v$ 。

1.5 关于区间 h 的说明

常数 $h = \min\{a, b/M\}$ 保证了积分曲线不会在 x 方向到达 R 的左右边界之前先跑出上下边界。若 $b/M \leq a$, 则解在 $|x - x_0| \leq b/M$ 内满足 $|y - y_0| \leq M|x - x_0| \leq b$, 从而解始终留在 R 内; 若 $a < b/M$, 则解在 $|x - x_0| \leq a$ 内自动满足 $|y - y_0| \leq M|x - x_0| \leq Ma \leq b$, 故仍留在 R 内。因此 h 是保证解不离开 R 的最大半区间长度。

2 佩亚诺存在定理

2.1 定理陈述

定理 2.1 (佩亚诺存在定理). 设 $f(x, y)$ 在矩形区域 $R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 内连续, 则初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上至少有一个解, 其中 $h = \min\{a, b/M\}$, $M = \max_R |f|$ 。

佩亚诺定理只要求 f 连续, 不要求利普希茨条件, 因此解可能不唯一, 但至少存在一个解。

2.2 欧拉折线法

欧拉折线是构造近似解的基本方法。将区间 $[x_0, x_0 + h]$ 分成 n 等份, 步长 $\Delta x = h/n$, 分点 $x_k = x_0 + k\Delta x$ 。从 (x_0, y_0) 出发, 依次构造:

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})\Delta x, \quad k = 1, \dots, n.$$

用折线连接各点 (x_k, y_k) , 得到函数 $\varphi_n(x)$ 。向左同理。所有折线都位于角形区域 $|y - y_0| \leq M|x - x_0|$ 内。

2.3 阿斯科利引理

引理 2.2 (阿斯科利-阿尔泽拉). 设 $\{f_n\}$ 是定义在有限闭区间 I 上的函数列, 满足:

1. 一致有界: 存在 $K > 0$ 使 $|f_n(x)| \leq K$ 对所有 n, x 成立;
2. 等度连续: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, $|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon$ 对所有 n 成立。

则存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 I 上一致收敛。

2.4 欧拉序列的性质

对于欧拉折线 $\varphi_n(x)$ ，由于每段斜率的绝对值不超过 M ，故

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(x')| \leq M|x - x'|,$$

从而 $\{\varphi_n\}$ 在 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上一致有界且等度连续。由阿斯科利引理，存在子列 $\{\varphi_{n_k}\}$ 一致收敛到某个连续函数 $\varphi(x)$ 。

2.5 证明极限函数是解

需要验证 φ 满足积分方程。为此，我们证明欧拉折线满足近似积分方程：

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t)) dt + \delta_n(x),$$

其中 $\delta_n(x) \rightarrow 0$ 当 $n \rightarrow \infty$ 。此式由欧拉折线的构造和 f 的连续性可得。然后取子列极限，得到

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt.$$

因此 φ 是解。

2.6 关于唯一性的注记

佩亚诺定理只保证存在性。若不假设利普希茨条件，解可能不唯一。例如，方程 $y' = 3y^{2/3}$ ， $y(0) = 0$ 有无穷多解： $y \equiv 0$ 和 $y = (x - c)^3$ （适当平移）。这说明了唯一性需要额外条件。

3 解的延伸

3.1 延伸定理的陈述

定理 3.1 (解的延伸定理). 设 $f(x, y)$ 在开区域 $G \subset \mathbb{R}^2$ 内连续， $(x_0, y_0) \in G$ 。设 $y = \varphi(x)$ 是初值问题

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

的一个解，其最大存在区间为 $J = (\alpha, \beta)$ （可能无限）。则当 $x \rightarrow \beta^-$ 时， $(x, \varphi(x))$ 趋于 G 的边界；即对任意有界闭集 $G_1 \subset G$ ，存在 $x_1 < \beta$ 使得 $(x, \varphi(x)) \notin G_1$ 对所有 $x > x_1$ 成立。类似地，当 $x \rightarrow \alpha^+$ 时也趋于边界。

3.2 核心思想

延伸定理的证明基于局部存在定理和反证法。若解不能延伸到边界，即存在有界闭区域 G_1 使解始终留在其中，则由 f 在 G_1 上的有界性可得 φ 满足 Lipschitz 条件，从而当 x 趋于右端点时 $\varphi(x)$ 有极限，于是可局部延拓，与最大存在性矛盾。

3.3 详细证明

只证明右侧情形。设 β 为最大存在区间的右端点。若 $\beta = \infty$ ，则结论自然成立（解延伸到无穷远，但无穷远不在 G 内，视为边界）。若 $\beta < \infty$ ，我们要证当 $x \rightarrow \beta^-$ 时， $(x, \varphi(x))$ 不可能始终停留在某个有界闭子集内。

假设存在有界闭集 $G_1 \subset G$ ，使得 $(x, \varphi(x)) \in G_1$ 对所有 $x \in [x_0, \beta)$ 成立。由于 f 在 G_1 上连续，存在常数 $K > 0$ 使 $|f(x, y)| \leq K$ 在 G_1 上成立。于是对任意 $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$ ，

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|.$$

因此 $\varphi(x)$ 在 $x \rightarrow \beta^-$ 时满足 Cauchy 收敛准则，故极限 $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \varphi(x) = y_1$ 存在。由 G_1 的闭性， $(\beta, y_1) \in G_1 \subset G$ 。

现在考虑以 (β, y_1) 为初值的局部存在定理。存在 $\delta > 0$ ，使得解在 $[\beta, \beta + \delta]$ 上存在。将此解与原来的 φ 在 $x = \beta$ 处拼接，得到 $[x_0, \beta + \delta]$ 上的解，与 β 是最大存在区间右端点矛盾。因此假设不成立，解必须跑出任何有界闭子集，即趋于 G 的边界。

3.4 勘误说明

在课堂讲述中，曾误将延伸定理表述为“ $T^* < \infty$ 当且仅当 $\lim_{t \rightarrow T^*} |y(t)| = \infty$ ”。正确的逻辑是：

- 若 $T^* < \infty$ ，则必有 $\lim_{t \rightarrow T^*} |y(t)| = \infty$ （有限时间爆破）。
- 若 $\lim_{t \rightarrow T} |y(t)| = \infty$ ，则 $T = T^*$ （即该 T 必为最大存在区间的端点）。

但反之不成立，因为解可能全局存在（ $T^* = \infty$ ）而 $|y(t)| \rightarrow \infty$ （例如 $y' = y$ ， $y(t) = e^t$ ， $t \rightarrow \infty$ 时 $|y| \rightarrow \infty$ 但 $T^* = \infty$ ）。因此，“有限时间爆破”等价于“最大存在区间有界”，而“解趋于无穷”可以是有限时间也可以是无限时间。

另外，若 f 只在有限区域上有定义，解无法延伸的原因还可能是自变量或函数值碰到定义域的边界，而不一定是 $|y| \rightarrow \infty$ 。这要求我们在应用延伸定理时注意区域边界。

3.5 全局存在定理

定理 3.2 (线性增长条件下的全局存在). 设 $f(x, y)$ 在条形区域 $S: \alpha < x < \beta, -\infty < y < \infty$ 内连续, 且满足

$$|f(x, y)| \leq A(x)|y| + B(x),$$

其中 $A(x) \geq 0, B(x) \geq 0$ 在 (α, β) 上连续. 则微分方程 $y' = f(x, y)$ 的任何解的最大存在区间都是 (α, β) 。

证明思路: 若右侧最大存在区间为 $[x_0, \beta_0)$ 且 $\beta_0 < \beta$, 则利用线性增长估计和比较定理, 可证明解在 β_0 附近有界, 从而可延拓, 矛盾。

3.6 应用举例

例 3.3 (有限时间爆破). 方程 $y' = x^2 + y^2$ 的任何解的最大存在区间都是有限的。

例 3.4 (全局存在). 方程 $y' = (x - y)e^{xy}$, 过任意点的右行解全局存在 (区间 $[x_0, \infty)$)。

4 奇解与包络

4.1 Clairaut 方程

考虑一类特殊的隐式方程——Clairaut 方程:

$$y = xp + f(p), \quad p = \frac{dy}{dx}. \quad (1)$$

这类方程的通解可直接获得: 令 $p = C$ (常数), 代入即得

$$y = Cx + f(C), \quad C \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

4.2 奇解的求法

为寻找可能的不包含在通解中的奇解, 对方程 (??) 两边关于 x 求导 (注意 p 依赖于 x):

$$p = p + xp' + f'(p)p' \implies p'(x + f'(p)) = 0.$$

由此得到两种情形:

- $p' = 0$, 即 $p = \text{常数}$, 对应通解;
- $x + f'(p) = 0$, 此时若将 p 看作参数, 联立原方程可消去 p 得到一条曲线。

后一种情形给出的曲线若满足原方程, 且不与通解重合, 则称为奇解。

4.3 几何解释：包络

奇解在几何上表现为通解族的**包络线**，即与族中每条曲线均相切的曲线。在包络线上，初值问题的解不唯一（通解与奇解同时经过同一点且在该点相切）。

例 4.1 (Clairaut 方程的奇解). 取 $f(p) = -\frac{p^2}{4}$, 则方程化为

$$y = xp - \frac{p^2}{4}.$$

通解为 $y = Cx - \frac{C^2}{4}$ 。由 $x + f'(p) = 0$ 得 $x - \frac{p}{2} = 0$, 即 $p = 2x$ 。代入原方程:

$$y = x \cdot 2x - \frac{(2x)^2}{4} = 2x^2 - x^2 = x^2.$$

因此奇解为 $y = x^2$ 。容易验证, 在点 $\left(\frac{C}{2}, \frac{C^2}{4}\right)$ 处, 奇解与通解相切, 且该点处解不唯一。

4.4 唯一性条件

根据 Picard 定理, 若 $f(x, y)$ 在区域上连续且关于 y 满足 Lipschitz 条件, 则初值问题的解唯一。奇解的存在表明在包络线附近 Lipschitz 条件被破坏。例如, 对于 $y' = \sqrt{y}$, 其解在 $y = 0$ 处不唯一, 而 $y = 0$ 恰是包络线。

5 Bootstrap 方法：从局部存在到全局存在

5.1 局部存在性的局限

Picard 存在唯一性定理仅保证解在某个小区间上存在。为了将解延拓到更大范围, 需要借助**延拓定理**, 而 Bootstrap 方法（自举法）是一种常用的技巧, 通过先验估计不断改进解的界, 从而延拓存在区间。

5.2 基本思想

设初值问题

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

其中 f 连续。Bootstrap 的核心步骤:

1. 假设在区间 $[x_0, T]$ 上解 $y(x)$ 存在且满足一个先验界 $|y(x)| \leq A$ 。

2. 利用微分方程和已知的估计 (例如 Gronwall 不等式), 推出更强的界 $|y(x)| \leq \tilde{A} < A$ 。
3. 于是解可以延拓到更大的区间, 同时保持更紧的界, 如此反复, 直至达到目标区间。

5.3 Gronwall 不等式

引理 5.1 (Gronwall 不等式). 设 $u(t)$ 为非负连续函数, 满足

$$u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t \beta(s)u(s) ds, \quad t \geq t_0,$$

其中 $\alpha \geq 0$, $\beta(s) \geq 0$ 可积。则

$$u(t) \leq \alpha \exp \left(\int_{t_0}^t \beta(s) ds \right).$$

5.4 一个典型应用：线性增长条件

假设 $|f(x, y)| \leq A|y| + B(x)$, 其中 $B(x)$ 在 $[x_0, T]$ 上可积。则对任意解 $y(x)$ 有

$$|y(x)| \leq |y_0| + \int_{x_0}^x (A|y(s)| + B(s)) ds.$$

由 Gronwall 不等式得

$$|y(x)| \leq (|y_0| + \int_{x_0}^x B(s) ds) e^{A|x-x_0|}.$$

记 $B_T = \sup_{[x_0, T]} B(x)$, 则

$$|y(x)| \leq (|y_0| + TB_T) e^{AT}, \quad x \in [x_0, T].$$

这个界是全局的, 但并未直接给出延拓。Bootstrap 方法用于处理那些仅有局部先验估计的情形。

5.5 Bootstrap 的抽象形式

设 $f(t)$ 是定义在某区间上的连续函数, 且存在常数 $0 < \tilde{A} < A$ 使得:

1. $|f(0)| < A$;
2. 若在某个区间 $[0, \tilde{T}]$ 上 $|f(t)| \leq A$, 则可推出 $|f(t)| \leq \tilde{A}$ 。

则最终可得 $|f(t)| \leq \tilde{A} < A$ 对所有 t 成立。这一逻辑常用于证明解的延拓性。

5.6 例： $y' = x^2 + y^2$ 的爆破

考虑方程

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0.$$

通过变量变换 $u = \frac{1}{y}$ 可化为 Riccati 方程，其解在有限时间爆破（即存在 x^* 使得 $\lim_{x \rightarrow x^*} |y(x)| = \infty$ ），因此无法全局存在。这启发我们：当非线性增长过快时，Bootstrap 无法提供全局一致界。

6 解对初值的光滑依赖性

6.1 问题设定

设 $f(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ，考虑带参数 λ 的初值问题

$$\begin{cases} y'_\lambda = f(x, y_\lambda), \\ y_\lambda(0) = \lambda. \end{cases}$$

记解为 $y(x, \lambda)$ 。我们关心当 λ 变化时，解如何变化。

6.2 变分方程

固定 $\lambda^* = 0$ ，记 $\phi(x) = y(x, 0)$ ，即初值为零的解。对 λ 求偏导，令

$$h(x) = \frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, 0).$$

形式上对原方程关于 λ 求导得

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial \lambda},$$

在 $\lambda = 0$ 处取值得到 $h(x)$ 满足的线性方程：

$$\begin{cases} h'(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) h(x), \\ h(0) = 1. \end{cases} \quad (3)$$

这是一个一阶线性齐次方程，其解为

$$h(x) = \exp \left(\int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(s, \phi(s)) ds \right).$$

6.3 解的展开

设想将 $y(x, \lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 附近展开：

$$y(x, \lambda) = \phi(x) + \lambda h(x) + G(x, \lambda),$$

其中 $G(x, \lambda)$ 为余项，满足 $G(0, \lambda) = 0$ 。

6.4 余项估计

将展开式代入原方程：

$$\phi'(x) + \lambda h'(x) + G_x(x, \lambda) = f(x, \phi(x) + \lambda h(x) + G(x, \lambda)).$$

利用 $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$ 和 $h'(x) = f_y(x, \phi(x))h(x)$ ，可得

$$G_x(x, \lambda) = f(x, \phi + \lambda h + G) - f(x, \phi) - \lambda f_y(x, \phi)h.$$

对右边使用 Taylor 展开（或中值定理）：

$$f(x, \phi + \lambda h + G) = f(x, \phi) + f_y(x, \phi)(\lambda h + G) + \frac{1}{2}f_{yy}(x, \xi)(\lambda h + G)^2,$$

其中 ξ 介于 ϕ 与 $\phi + \lambda h + G$ 之间。于是

$$G_x = f_y(x, \phi)G + \frac{1}{2}f_{yy}(x, \xi)(\lambda h + G)^2.$$

对 x 积分，并利用 $G(0, \lambda) = 0$ ，得积分方程

$$G(x, \lambda) = \int_0^x f_y(s, \phi(s))G(s, \lambda) ds + \int_0^x \frac{1}{2}f_{yy}(s, \xi(s))(\lambda h(s) + G(s, \lambda))^2 ds.$$

设 $M_2 = \max_{[0, T]} |f_{yy}|$ ， $H = \max_{[0, T]} |h(s)|$ ，则存在常数 C 使得

$$|G(x, \lambda)| \leq \int_0^x C|G(s, \lambda)| ds + C\lambda^2.$$

由 Gronwall 不等式得

$$|G(x, \lambda)| \leq C\lambda^2 e^{CT}, \quad \forall x \in [0, T].$$

因此，当 $f \in C^2$ 时，余项是 $O(\lambda^2)$ 的，这证明了 $y(x, \lambda)$ 关于 λ 至少是 C^1 的，且一阶导数就是 $h(x)$ 。

6.5 更一般的结论

若 $f \in C^1$ ，则只能得到 $|G(x, \lambda)| \leq o(\lambda)$ （即 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{G}{\lambda} = 0$ ），此时解关于初值可微。若 $f \in C^k$ ，则解关于初值 k 次可微。

6.6 误差估计的严格表述

设 $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, 则对任意 $T > 0$, 存在 $\varepsilon > 0$ 和常数 $C(T)$, 使得当 $|\lambda| < \varepsilon$ 时,

$$|y(x, \lambda) - \phi(x) - \lambda h(x)| \leq C(T)\lambda^2, \quad \forall x \in [0, T].$$

这一定理是常微分方程解对初值光滑依赖性的基本结果。

7 解的可微性性质

7.1 对初始条件的依赖性

在上一节中, 我们证明了流 $\varphi(t, \mathbf{b})$ 关于 $\mathbf{b}$ 是 Lipschitz 连续的。在本节中, 我们将证明 φ 实际上是 C^1 的, 当然前提是 $\mathbf{F}$ 是 C^1 的。

上述表述是对本节结果的简洁总结。然而, 让我们用更冗长的微扰理论语言重新表述结论, 因为我们认为这会使讨论更直观。我们假设 $\mathbf{x}_0(t)$, $0 \leq t < \beta_0$, 是系统 $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ 在正向时间内的一个解, 其初始条件为 $\mathbf{x}_0(0) = \mathbf{b}_0$ 。

¹

我们询问如果初始条件受到扰动, 解会如何变化。具体地, 令 $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ 是方程

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0, \varepsilon) = \mathbf{b}_0 + \varepsilon \mathbf{b}_1. \quad (4.51)$$

的解。我们寻找该解按 ε 的幂次展开式²,

$$\mathbf{x}(t, \varepsilon) = \mathbf{x}_0(t) + \varepsilon \mathbf{x}_1(t) + \dots \quad (4.52)$$

被省略项 (用点表示) 的大小将在定理 4.6.1 中估计。目前我们先形式地进行推导。将 (4.52) 代入 (4.51), 我们得到

$$\mathbf{x}_0'(t) + \varepsilon \mathbf{x}_1'(t) + \dots = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0(t) + \varepsilon \mathbf{x}_1(t) + \dots).$$

使用泰勒级数将等式右端按 ε 的幂次展开³, 我们计算得

$$\mathbf{x}_0'(t) + \varepsilon \mathbf{x}_1'(t) + \dots = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0(t)) + \varepsilon \mathbf{DF}(\mathbf{x}_0(t)) \cdot \mathbf{x}_1 + \dots \quad (4.53)$$

¹一个满足 (4.49) 的函数 φ 有时被称为一个动力系统。

²我们可以将 (4.52) 描述为一个 *ansatz*, 即问题解的假设形式。这个术语源自德语, 是一个有用的数学词汇。

³幸运的是, 我们只需展开到一次幂就足够了。尽管多变量泰勒级数的高阶项可以用多重指标记号高效处理 (参见 [?] 的第 10.2 节), 但在此引入它会分散注意力。

方程 (4.53) 必须对所有 ε 成立, 即等式两边的两个幂级数定义了相同的 ε 的函数。因此, ε 的各次幂系数必须相等。匹配 (4.53) 中 ε 的对应幂次, 我们得到

$$\begin{aligned} (a) \quad \mathcal{O}(\varepsilon^0): \quad \mathbf{x}'_0 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_0), \\ (b) \quad \mathcal{O}(\varepsilon^1): \quad \mathbf{x}'_1 &= \mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0(t)) \cdot \mathbf{x}_1. \end{aligned} \quad (4.54)$$

(字母 $\mathcal{O}$ 是“阶”的助记符。) $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ 方程只是重复了原解满足的 ODE。 $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ 方程给出了新信息, 即一个关于 $\mathbf{x}_1$ 的 ODE, 这是一个带时变系数的线性齐次系统

$$\mathbf{x}'_1 = A(t)\mathbf{x}_1, \quad (4.55)$$

其中系数矩阵由 (4.54b) 给出。类似地, 匹配初始条件 (4.51) 中 ε 的幂次, 得到

$$\begin{aligned} (a) \quad \mathcal{O}(\varepsilon^0): \quad \mathbf{x}_0(0) &= \mathbf{b}_0, \\ (b) \quad \mathcal{O}(\varepsilon^1): \quad \mathbf{x}_1(0) &= \mathbf{b}_1. \end{aligned} \quad (4.56)$$

这里的 $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ 方程同样没有新内容, 但 $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ 方程为 ODE (4.55) 提供了一个初始条件。定理 3.4.1 保证了初值问题 (4.55), (4.56b) 在 x_0 定义的同区间 $[0, \beta_0)$ 上有唯一解 $x_1(t)$ 。

以下是第 4.6 节的主要结果。当然, 对于负时间也有类似的结果。

定理 7.1 (4.6.1). 设 $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ 是 C^1 的。在上述记号下, 对每个 $t \in [0, \beta_0)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|x(t, \varepsilon) - x_0(t) - \varepsilon x_1(t)|}{\varepsilon} = 0. \quad (4.57)$$

此外, 若 $T < \beta_0$, 则极限对 $0 \leq t \leq T$ 一致成立。

你可能觉得这个定理的证明很困难。我们把证明推迟到第 4.6.5 节, 先探讨一些相关的思想, 这些思想能使证明更易读。

7.2 可微性的视角

考虑将流映射 $\varphi: \Omega \rightarrow U$ 关于初始条件 b 求导; 即考虑

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_j}(t, b_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(t, b_0 + \varepsilon e_j) - \varphi(t, b_0)}{\varepsilon}. \quad (4.58)$$

在我们上面的记号中, 有 $\varphi(t, b_0) = x_0(t)$, 如果在 (4.51) 中令 $b_1 = e_j$, 则 $\varphi(t, b_0 + \varepsilon e_j) = x(t, \varepsilon)$ 。定理 4.6.1 表明 (4.58) 中的极限存在, 因此 $\varphi(t, b)$ 实际上关于 b_j 是可微的; 事实上, $\partial \varphi / \partial b_j(t, b_0)$ 等于相应初值问题 (4.55), (4.56b) 的解, 我们将其重复为

$$w'_j = A(t)w_j, \quad w_j(0) = e_j, \quad (4.59)$$

其中 $A(t) = DF(x_0(t))$ 。值得注意的是, φ 关于各个分量 b_j 的偏导数满足相同的 ODE; 它们仅在初始条件上有所不同。

让我们来阐明初值问题 (4.59) 是如何自然产生的。关于初始条件, 在零时刻, (4.58) 简化为平凡式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_j}(0, b_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(b_0 + \varepsilon e_j) - (b_0)}{\varepsilon} = e_j. \quad (4.60)$$

对于 $t > 0$, 流 $\varphi(t, b)$ 满足 ODE

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, b) = F(\varphi(t, b)). \quad (4.61)$$

我们不对合理性进行论证直接对这个方程求导; 这将在定理 4.6.1 的证明中得以保证。具体地, 使用链式法则将 (4.61) 对 b_j 求导,

$$\frac{\partial}{\partial b_j} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \mathbf{b}) = \mathbf{DF}(\varphi(t, \mathbf{b})) \frac{\partial \varphi}{\partial b_j}(t, \mathbf{b}), \quad (4.62)$$

交换 t 和 b 偏导数的次序得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial b_j}(t, \mathbf{b}) = \mathbf{DF}(\varphi(t, \mathbf{b})) \frac{\partial \varphi}{\partial b_j}(t, \mathbf{b}),$$

并令 $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0$, 从而说明 $\partial \varphi / \partial b_j(t, \mathbf{b}_0)$ 应该满足 (4.59) 中的 ODE。

7.3 例子

初值问题 (4.59) 提供了 $\partial \varphi / \partial b_j$ 的一个优美的刻画, 常用于 ODE 的理论分析。遗憾的是, 能显式求解 (4.59) 的情况是例外而非规律。

一个重要的特例是当 $\mathbf{b}_0$ 是 $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ 的平衡点时。此时 $\varphi(t, \mathbf{b}_0) \equiv \mathbf{b}_0$, 因此 (4.59) 中的系数矩阵与时间无关, $A = \mathbf{DF}(\mathbf{b}_0)$ 。换句话说, 系统 (4.59) 具有常系数。顺便提一下, 这个近似被称为 $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ 在平衡点处的线性化, 在 ODE 的定性理论中占有重要地位。

如果你希望看到定理在实际中的应用, 这里有一个不那么平凡的例子, 其中 (4.59) 可以显式求解。考虑 Lotka-Volterra 方程的初值问题,

$$(a) \quad x' = x - xy, \quad x(0) = b_1, \quad (b) \quad y' = \rho(xy - y), \quad y(0) = b_2. \quad (4.63)$$

如果 $b_2 = 0$, 则 (4.63) 有显式解 $\varphi(t, (b_1, 0)) = (b_1 e^t, 0)$; 即没有捕食者时, 猎物呈指数增长。如果引入一小群捕食者, 其数量将如何演变? 对于小的 b_2 , 我们有近似 (对捕食者种群)

$$\varphi_2(t, (b_1, b_2)) \approx b_2 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_2}(t, (b_1, 0)).$$

在练习 12 中, 我们请你求解 (4.59) 的适当形式以证明

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial b_2}(t, (b_1, 0)) = \exp \{ \rho [b_1(e^t - 1) - t] \}. \quad (4.64)$$

因此, 到最低阶近似, 捕食者的数量随着 t 的增长而非常迅速地增长, 是指数的指数。快速增长并不令人惊讶, 因为捕食者的食物供应正在无界增长。当然, 随着 t 的增加, 上述近似必然会变得不准确。事实上, 我们从第 1 章的练习 3 中知道, 如果 $b_2 > 0$, 则 (4.63) 的解是周期性的, 因此种群必须保持有界。用定理 4.6.1 的语言来解释这一讨论, 你希望 T 取得越大, 就必须在极限 (4.57) 中取得越小的 ε 。

关于对初始条件求导的其他例子, 包括在上述例子中计算捕食者对猎物的影响, 都在练习中给出。

7.4 阶的记号

为了准备定理 4.6.1 的证明, 我们引入阶记号⁴, 即大 $\mathcal{O}$ 和小 o 。这个记号使得原本可能很繁琐的证明变得相对清晰。

大 $\mathcal{O}$ 的严格使用 (较简单的概念) 如下: 给定一个依赖于参数的量, 例如 $f(\varepsilon)$, 其中 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, f 可以是向量或标量, 我们称 f 是 ε 阶的, 记作 $f(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, 如果

$$(\exists C)(\exists \varepsilon_1 > 0) \text{ 使得 } 0 < \varepsilon < \varepsilon_1 \implies |f(\varepsilon)| \leq C\varepsilon.$$

(公式 $f(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ 也可读作 “ f 是大 $\mathcal{O}$ of ε ”。) 同样的记号也用于若干更复杂的情形。如果 ε 可取正负, 即 $f(\varepsilon)$ 定义在 $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$ 上, 我们写 $f(\varepsilon) = \mathcal{O}(|\varepsilon|)$ 表示当 $|\varepsilon|$ 足够小时有 $|f(\varepsilon)| \leq C|\varepsilon|$ 。更一般地, 如果 $\phi(\varepsilon) > 0$ 是某个当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时趋于零的函数, 例如 $\phi(\varepsilon) = |\varepsilon|^p$, 我们将公式 $f(\varepsilon) = \mathcal{O}(\phi(\varepsilon))$ 理解为相应的不等式。另外, 该记号可以推广到估计依赖于多个参数的量。例如, 在定理 4.5.1 中, 解 $x(t) = \varphi(t, \mathbf{b})$ 依赖于初始数据的 d 个参数 $b_1, \dots, b_d$, 我们可以将定理的结论重述为

$$|\varphi(t, \mathbf{b}) - \varphi(t, \mathbf{b}_0)| = \mathcal{O}(|\mathbf{b} - \mathbf{b}_0|). \quad (4.65)$$

在定理 4.6.1 的记号下, 由定理 4.5.1 可得

$$|x(t, \varepsilon) - x_0(t)| = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.66)$$

⁴符号 $\mathcal{O}$ 的使用存在一个不幸的歧义。在 (4.54) 和 (4.56) 中, 符号 $\mathcal{O}(\varepsilon^p)$ 仅仅是一个占位符, 用于表示幂级数中正比于 ε^p 的项。这可以称为非正式用法。相比之下, 我们现在要描述的是该符号的严格技术含义。两种用法在文献中都有出现。尽管有些作者引入不同的符号来区分这两种含义, 但我们更倾向于避免符号的泛滥。我们相信一旦你注意到这个问题, 你就能根据上下文判断出哪种用法被使用。

实际上, 我们说 (4.66) 对 $t \in [0, T]$ 一致成立, 因为不等式

$$|x(t, \varepsilon) - x_0(t)| \leq e^{LT} |b_1| \varepsilon \quad (4.67)$$

在该区间上对所有 t 都成立, 且常数 $C = e^{LT} |b_1|$ 相同。或者, 我们可以隐藏 (4.67) 中的显式常数, 将此不等式改写为

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon). \quad (4.68)$$

小 o 是一个更精细的概念。如果 f 定义在 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 上, 我们说 f 是 ε 的小 o , 记作 $f = o(\varepsilon)$, 如果

$$(\forall \eta > 0)(\exists \varepsilon_1 > 0) \text{ 使得 } 0 < \varepsilon < \varepsilon_1 \implies |f(\varepsilon)| \leq \eta \varepsilon.$$

当然, 这个定义等价于⁵

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|f(\varepsilon)|}{\varepsilon} = 0.$$

小 o 记号也像大 O 一样用于更复杂的情形。例如, 如果向量值函数 $F(x)$ 连续可微, 则对 z 接近 z_0 可以写⁶

$$F(z) = F(z_0) + DF(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|). \quad (4.69)$$

以下是阶记号中的一些基本事实:

- (a) 若 $f(\varepsilon) = o(\varepsilon)$, 则对任意常数 C , $Cf(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ 。
- (b) 若 $f(\varepsilon) = o(\phi(\varepsilon))$ 且 $\phi(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, 则 $f(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ 。

我们请在练习 10 中推导 (4.70)。尽管这些事实可能只是极限基本性质的重新表述, 但在阅读定理 4.6.1 的证明之前做这个练习是值得的。阶记号让你能够将注意力集中在证明中更高层次的问题上, 而不必反复推导极限的性质。顺便提一句, (4.70) 可以以多种方式推广, 但这个有限版本就足以满足我们的需要。

回到定理 4.6.1, 注意我们期望的结论简单地断言

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{x}(t, \varepsilon) - \mathbf{x}_0(t) - \varepsilon \mathbf{x}_1(t)| = o(\varepsilon). \quad (4.71)$$

⁵顺便提一下, 大 O 也可以类似地刻画:

$$f(\varepsilon) = O(\varepsilon) \iff \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} |f(\varepsilon)/\varepsilon| < \infty.$$

⁶这里使用 z 而不是 x , 是为了将 x 保留给由 (4.54), (4.56) 定义的函数。

7.5 定理 4.6.1 的证明

给定 $T < \beta_0$, 选择 $\delta > 0$ 和一个紧集 $\mathcal{K} \subset U$ 使得 (4.40) 成立, 并令 L 由 (4.45) 给出。对所有足够小的 ε , 扰动初始条件 $\mathbf{b}_0 + \varepsilon \mathbf{b}_1$ 属于 $B(\mathbf{b}_0, e^{-LT} \delta)$, 因此由推论 4.5.2,

$$\mathbf{x}(t, \varepsilon) \in B(\mathbf{x}_0(t), \delta) \subset \mathcal{K}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.72)$$

将积分关系

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t, \varepsilon) &= \mathbf{b}_0 + \varepsilon \mathbf{b}_1 + \int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{x}(s, \varepsilon)) ds, \\ \mathbf{x}_0(t) &= \mathbf{b}_0 + \int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{x}_0(s)) ds, \\ \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{b}_1 + \int_0^t A(s) \mathbf{x}_1(s) ds, \end{aligned}$$

进行线性组合, 我们推出 $g(t, \varepsilon) = |\mathbf{x}(t, \varepsilon) - \mathbf{x}_0(t) - \varepsilon \mathbf{x}_1(t)|$ 满足

$$g(t, \varepsilon) \leq \int_0^t |\mathbf{F}(\mathbf{x}(s, \varepsilon)) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0(s)) - \varepsilon A(s) \mathbf{x}_1(s)| ds.$$

在积分中加上并减去 $A(s)\{\mathbf{x}(s, \varepsilon) - \mathbf{x}_0(s)\}$, 并使用三角不等式, 得到

$$g(t, \varepsilon) \leq \mathcal{I}_1(t, \varepsilon) + \mathcal{I}_2(t, \varepsilon), \quad (4.73)$$

其中

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathcal{I}_1(t, \varepsilon) &= \int_0^t |\mathbf{F}(\mathbf{x}(s, \varepsilon)) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0(s)) - A(s)\{\mathbf{x}(s, \varepsilon) - \mathbf{x}_0(s)\}| ds \\ \text{(b)} \quad \mathcal{I}_2(t, \varepsilon) &= \int_0^t |A(s)\{\mathbf{x}(s, \varepsilon) - \mathbf{x}_0(s) - \varepsilon \mathbf{x}_1(s)\}| ds. \end{aligned}$$

$\mathcal{I}_2(t, \varepsilon)$ 中的被积函数受限于 $\|A(s)\|g(s, \varepsilon)$, 由于 $\mathbf{x}_0(s) \in \mathcal{K}$, 有 $\|A(s)\| = \|\mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0(s))\| \leq L$ 。因此,

$$g(t, \varepsilon) \leq \mathcal{I}_1(t, \varepsilon) + L \int_0^t g(s, \varepsilon) ds.$$

于是, 由 Gronwall 不等式,

$$g(t, \varepsilon) \leq e^{LT} \sup_{0 \leq s \leq T} \mathcal{I}_1(s, \varepsilon),$$

对上确界取遍 t 得

$$\sup_{0 \leq t \leq T} g(t, \varepsilon) \leq e^{LT} \sup_{0 \leq s \leq T} \mathcal{I}_1(s, \varepsilon). \quad (4.75)$$

下面的引理给出了 (4.75) 右端的控制。(在练习 25 中, 我们要求你证明该引理, 其基础是证明点态估计 (4.69) 在某个适当紧集上是一致的。)

引理 7.2 (4.6.2). 当 ε 趋于零时,

$$\sup_{0 \leq s \leq T} \mathcal{I}_1(s, \varepsilon) = o(\varepsilon). \quad (4.76)$$

将引理应用于 (4.75), 我们可以将此方程改写为

$$\sup_{0 \leq t \leq T} g(t, \varepsilon) = Co(\varepsilon),$$

其中 $C = e^{LT}$. 因此, 我们期望的结论 (4.71) 由 (4.70a) 得出. 证明完成。

7.6 收尾工作

我们声称流映射 $\varphi(t, \mathbf{b})$ 是 C^1 的. 由定理 4.6.1, 偏导数 $\partial\varphi/\partial b_j$ 存在, 当然 $\partial\varphi/\partial t$ 也存在. 我们需要证明这些偏导数是连续的. 由 ODE $\partial\varphi/\partial t = \mathbf{F}(\varphi(t, \mathbf{b}))$ 易知 t -导数是连续的. 关于 b_j 的导数由初值问题 (4.59) 刻画, 我们通过指示系数矩阵对 $\mathbf{b}$ 的依赖将其重写为:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\varphi}{\partial b_j} = \mathbf{D}\mathbf{F}(\varphi(t, \mathbf{b})) \frac{\partial\varphi}{\partial b_j}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial b_j}(0) = \mathbf{e}_j. \quad (4.77)$$

由定理 4.5.4 可知 $\partial\varphi/\partial b_j$ 是连续的. 这就证明了论断。

在第 4.6.2 节中, 我们直观地推导了 $\partial\varphi/\partial b_j$ 的公式 (4.59), 但需要证明求导次序的交换是合理的. 根据附录 B 中的定理 B.3.2, 只要证明其中一个混合偏导数存在且连续即可. 由 (4.77) 可知 $\partial^2\varphi/\partial t\partial b_j$ 是连续的, 因为该 ODE 的右端是连续函数的乘积。

7.7 推广

关于初值问题解的可微性, 还有更多的结果, 我们不想 (你也不想) 全面探讨, 但有几个要点值得一提. 我们避免给出这些结果的形式化陈述, 以期使文本更具可读性. 关于这些结果更仔细的处理可参见 [?] 的第 1.7 节。

首先, 我们将定理 4.6.1 推广到非自治初值问题. 可以证明, 通过求解

$$x' = G(x, t), \quad x(t_0) = \mathbf{b} \quad (4.78)$$

得到的流算子 $\varphi(t, t_0, \mathbf{b})$ 关于所有变量是 C^1 的, 前提是 G 是 C^1 的. 此外, $\partial\varphi/\partial b_j(t, t_0, \mathbf{b})$ 满足线性齐次初值问题

$$\frac{dw}{dt} = DG(\varphi(t, t_0, \mathbf{b}), t)w, \quad w(t_0) = \mathbf{e}_j, \quad (4.79)$$

其中 DG 表示关于 x_j 的偏导数构成的 $d \times d$ 矩阵, 不包括 t 的导数。

其次，我们考虑“对方程的依赖”通过一个带参数的初值问题族，例如

$$x' = G(x, \alpha), \quad x(0) = \mathbf{b}, \quad (4.80)$$

其中 $\alpha \in V \subset \mathbb{R}^m$ ；为简化记号，我们假设 (4.80) 是自治的。流映射 $\varphi(t, \mathbf{b}, \alpha)$ 关于所有参数是 C^1 的，且 $\partial\varphi/\partial\alpha_j$ 满足线性非齐次初值问题

$$\frac{dw}{dt} = DG(\varphi(t, \mathbf{b}, \alpha), \alpha)w + \frac{\partial G}{\partial\alpha_j}(\varphi(t, \mathbf{b}, \alpha), \alpha), \quad w(0) = \mathbf{0}. \quad (4.81)$$

如上， DG 表示关于 x_j 的导数构成的 $d \times d$ 矩阵；对参数的导数被显式写出。事实上，这个结果不需要单独证明；可以通过“归结为之前情形”的技巧推导，如练习 24 所讨论。

最后，第三个推广涉及高阶导数：可以证明，如果 ODE 属于 C^k 类，那么解算子关于所有变量也有 k 阶连续导数。特别地，在定理 4.6.1 的条件下，如果 $F \in C^2$ ，则

$$x(t, \varepsilon) - x_0(t) - \varepsilon x_1(t) = O(\varepsilon^2).$$

7.8 练习

7.8.1 核心练习

核心练习的主要目的如下：

- 证明一个小的推广：1
 - 未完成的工作：2, 5-7, 10
 - 利用俘获区域证明全局存在性：3
 - 澄清理论的反例：4
 - 初探渐近行为：8, 9
1. (a) 证明定理 4.1.2 的如下变体：若 $\mathbf{F}$ 在 $\mathcal{U}$ 上有界且 $\beta_* < \infty$ ，则当 $t \rightarrow \beta_*$ 时， $\mathbf{x}_*(t)$ 趋于 $\partial\mathcal{U}$ 上的一点。
 (b) 构造一个标量 ODE $x' = f(x)$ 的初值问题，其中 f 有界，其解的最大存在区间 (α_*, β_*) 的两个端点均为有限值。
 2. 证明定理 4.2.3。

提示：必须证明解不能离开 $\mathcal{K}$ 。用证明定理 4.2.2 的相同论证排除在正则点穿越 $\partial\mathcal{K}$ 的可能性。在角点 $\mathbf{P}$ 处，回忆第 B.3.3 节的记号，将 $\mathbf{P}$ 附近的 $\partial\mathcal{K}$ 表示为两条光滑曲线 $\{\phi_1 = 0\}$ 和 $\{\phi_2 = 0\}$ 的交集。取正则点的极限，可得

$$\langle \nabla \phi_k(\mathbf{P}), \mathbf{F}(\mathbf{P}) \rangle \geq 0, \quad k = 1, 2.$$

利用 $\nabla \phi_1(\mathbf{P})$ 与 $\nabla \phi_2(\mathbf{P})$ 线性无关的假设，证明这些不等式之一必为严格的，如 (4.12) 那样。通过推导定理 4.2.2 时使用的简单论证，排除在 $\mathbf{P}$ 点穿越 $\partial\mathcal{K}$ 的可能性。

3. 利用俘获区域分析下列方程的全局存在性：

(a) Lorenz 方程：

$$x' = \sigma(y - x), \quad y' = \rho x - y - xz, \quad z' = -\beta z + xy,$$

其中 σ, ρ, β 是正常数（任意初始条件）。

提示：通过证明如下形式的集合

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - \rho - \sigma)^2 \leq A^2\}$$

当 A 足够大时是一个俘获区域，从而推断全局存在性；即俘获区域由一个精心选择的二次函数的水平集所界定。

(b) 两个相互作用物种的演化方程：

$$x' = x(1 - x - by), \quad y' = \rho y(1 - y - cx),$$

其中 ρ, b, c 是常数， $\rho > 0$ （初始值 $x(0), y(0)$ 均非负）。

讨论：注意每个物种具有受对方存在修正的逻辑斯蒂增长。若 b, c 均为正，则相互作用是竞争的；若均为负，则是共生的。最有趣的情况是当第一象限（开集）内存在共存平衡点时，即 (i) $1 < b, c$ ，(ii) $0 < b, c < 1$ ，以及 (iii) $-1 < b, c < 0$ 。

提示：在情形 (i) 和 (ii) 中，绘制零倾线以证明存在形如 (4.23) 的三角形俘获区域。情形 (iii) 需要稍微复杂一点的区域。

讨论：顺便提一下，我们邀请你计算属于情形 (i) 和情形 (ii) 的方程的几个典型解。你会发现当 $t \rightarrow \infty$ 时它们的行为不同。这种行为目前可能有些神秘，但第 6 章的思想会澄清它。

挑战：一个较难但有教育意义的问题是证明当 $b, c < -1$ 时解可能在有限时间内爆破。试试看！作为这个更难问题的准备，你可以先尝试证明更简单的系统 $x' = xy, y' = xy$ 的爆破。

(c) 简化的活化剂-抑制剂系统

$$(a) \quad x' = \sigma \frac{1}{1+y} x^2 - x, \quad (b) \quad y' = \rho[x^2 - y],$$

即方程 (4.30) 当 $\kappa \rightarrow \infty$ 时的极限 ($x(0), y(0)$ 均非负)。

注记: 为 (4.30) 构造一个俘获区域是直接的; 为 (4.82) 构造一个则要困难得多。但在下面我们将使用更简单的方程 (4.82) 来计算活化剂-抑制剂模型解的性质。

(d) “抑制振荡器” (repressilator)

$$x' = \frac{\mu}{1+y^n} - x, \quad y' = \frac{\mu}{1+z^n} - y, \quad z' = \frac{\mu}{1+x^n} - z,$$

其中 μ 和 n 是正常数 (所有变量的初始值非负)。

提示: 为证明该系统的全局存在性 (该系统将在第 8.7.2 节介绍和分析), 构造如下形式的俘获区域

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq A\};$$

即证明当 A 足够大时, 流在这个单形的四个面上都是向内的。注意 $\mathcal{K}$ 是一个三维区域, 其边界只是分片光滑的。(我们一直回避在高维中定义“分片光滑”, 但无论这个词如何定义, 它无疑适用于这个集合。)因此, 定理 4.2.2 并不能直接用于证明全局存在性。如果你对这个漏洞感到困扰, 可以通过模仿问题 2 来填补它。

4. (a) 关于定理 4.1.2, 给出一个例子说明若 $\beta_* = \infty$, 则一个初值问题的解可以始终停留在一个紧集内。
- (b) 给出一个 C^1 函数的例子, 它满足线性增长估计 (4.4), 但不是 (全局) Lipschitz 的。
- (c) 对于系统

$$x' = x^2 - y^2, \quad y' = 2xy,$$

找出一个在有限时间内爆破但大多数邻近解对所有时间存在的解。

提示: 首先证明对于初始条件 $x(0) = 1, y(0) = 0$, (4.83) 的解在有限时间内爆破。虽然无法求解其他轨道的 (4.83), 但可以定位解曲线, 即找到轨道, 如下: 沿一条轨道, 有 ODE

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

将方程乘以 $(x/y)^2 - 1$ 并整理成

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{y} + y \right) = 0,$$

由此可推出解曲线是通过原点的圆: $x^2 + (y - C)^2 = C^2$, 其中 C 是任意常数。根据这一信息, 论证 (4.83) 在初始条件 $x(0) = 1, y(0) = b$ (其中 $b \neq 0$) 下的解对所有时间存在。

7

5. (a) 证明定理 4.2.1 的如下推广 (参考第 3 章练习 8(a))。

定理 4.7.1. 若 $G: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ 关于 x 和 t 是局部 Lipschitz 的, 且存在非负连续函数 $B(t), K(t)$ 使得

$$|G(x, t)| \leq K(t)|x| + B(t),$$

则初值问题

$$x' = G(x, t), \quad x(0) = b$$

的解对所有时间 $-\infty < t < \infty$ 存在。此外, 对任意有限 $T > 0$,

$$|x(t)| \leq |b|e^{K_{\max}|t|} + \frac{B_{\max}}{K_{\max}}(e^{K_{\max}|t|} - 1), \quad -T \leq t \leq T, \quad (4.85)$$

其中

$$B_{\max} = \max_{|s| \leq T} |B(s)|, \quad K_{\max} = \max_{|s| \leq T} |K(s)|.$$

讨论: 下面明确陈述定理 4.7 将是有用的, 并且将定理 4.2.1 的证明调整到非自治情形也是一种有用的训练。为了完成证明, 需要将命题 4.1.1 和定理 4.1.2 推广到非自治方程。我们邀请你跳过这个不太有回报的任务, 而将这两个结果的推广视为已知。

顺便提一下, 每个线性方程 $x' = A(t)x + g(t)$ 当然满足上述假设, 前提是 $A(t)$ 和 $g(t)$ 连续。因此, 该定理为线性方程的全局存在性提供了另一种证明, 这是第 3 章练习 16 中基于 Picard 迭代的方法的替代。

- (b) 使用定理 4.7.1 证明下列方程的全局存在性:

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -(1/4 + \beta \cos t)x. \end{aligned}$$

⁷形如 $(d/dx)f(x, y) = 0$ 的标量 ODE 被称为恰当的。在此例中, 我们通过一个积分因子使方程成为恰当方程从而可解。这是另一种求解技巧, 我们在 1.3 节中没有涉及; 要了解更多, 见 [?] 的第 1.9 节。

注记：回顾你在第 3 章练习 13 中的计算，你发现该方程的解可能随时间指数增长这个令人惊讶的事实；由本题可得出结论：解的增长速度不会超过指数。

6. 将定理 4.2.2 推广到柱面 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ 上的 ODE。

提示：首先，一些记号：若 $\mathcal{K}$ 是 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ 的子集，定义 $\mathcal{K}_{\text{lift}} \subset \mathbb{R}^2$ 为⁸

$$\mathcal{K}_{\text{lift}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Pi \cdot (x, y) \in \mathcal{K}\},$$

其中 $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ 是自然投影。用不太正式的话说，投影“将平面包裹到柱面上”，而 $\mathcal{K}_{\text{lift}}$ 是从 $\mathcal{K}$ 通过“展开”柱面得到的集合。（见图 4.4。）

所谓 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ 上的 ODE，是指一个二维 ODE

$$\begin{bmatrix} \theta' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{F}(\theta, y), \quad (4.86)$$

其中 $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 关于第一个参数是 2π -周期的，即 $\mathbf{F}(\theta + 2\pi, y) = \mathbf{F}(\theta, y)$ 。我们提议通过将本章理论应用于等价的“提升”平面 IVP

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{F}(x, y), \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \mathbf{b}, \quad (4.87)$$

其中 x 可在 $(-\infty, \infty)$ 上变化，来证明 (4.86) 的初值问题的全局存在性。

假设 $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ 是 (4.86) 的一个紧俘获区域；则 $\mathcal{K}_{\text{lift}}$ 是 (4.87) 的一个俘获区域。由推论 4.2.4，若 $\mathbf{b} \in \mathcal{K}_{\text{lift}}$ ，则 (4.87) 的解在存在期间始终留在 $\mathcal{K}_{\text{lift}}$ 内，设 $0 \leq t < t_*$ 。由紧性，

$$C = \max_{(x,y) \in \mathcal{K}_{\text{lift}}} |\mathbf{F}(x, y)| = \max_{(\theta,y) \in \mathcal{K}} |\mathbf{F}(\theta, y)| < \infty.$$

因此， $|\mathbf{x}(t)| \leq |\mathbf{b}| + Ct$ 对 $0 \leq t < t_*$ 成立。若 t_* 有限，则该估计与定理 4.1.2 矛盾，故 (4.87) 必有全局解。

注记：类似的论证也适用于环面 $\mathbb{T}^2$ 上的 ODE。

7. 证明定理 4.5.4。

提示：需要证明通过使 t_1, t_2 与 α_1, α_2 充分接近， $|\mathbf{w}(t_1, \alpha_1) - \mathbf{w}(t_2, \alpha_2)|$ 可以任意小。只需考虑正时间 $t_k \leq T$ ，其中 $T < T_2$ ，并将 α_k 限制在参数集 $\mathcal{V}$ 的一个紧子集 $\mathcal{N}$ 上。令

$$M = \max_{0 \leq t \leq T} \max_{\alpha \in \mathcal{N}} \|A(t, \alpha)\|. \quad (4.88)$$

⁸下标 “lift” 指的是 $\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ 的一个单连通覆盖空间，位于 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ 的“上方”。

为简便, 将 $\mathbf{w}(t, \alpha_k)$ 简记为 $\mathbf{w}_k(t)$; 即需要证明 $|\mathbf{w}_1(t_1) - \mathbf{w}_2(t_2)|$ 很小。通过加减项 $\mathbf{w}_2(t_1)$ 来估计

$$|\mathbf{w}_1(t_1) - \mathbf{w}_2(t_2)| \leq |\mathbf{w}_1(t_1) - \mathbf{w}_2(t_1)| + |\mathbf{w}_2(t_1) - \mathbf{w}_2(t_2)|. \quad (4.89)$$

为估计第二项, 首先将 Gronwall 不等式应用于 ODE $\mathbf{w}'_2 = A(t, \alpha_2)\mathbf{w}_2$, 得到 $|\mathbf{w}_2(t)| \leq |\mathbf{b}|e^{Mt}$, 然后对该 ODE 积分得

$$|\mathbf{w}_2(t_1) - \mathbf{w}_2(t_2)| \leq M|\mathbf{b}|e^{MT}|t_1 - t_2|.$$

为估计 (4.89) 中的第一项, 将 $\mathbf{w}_k(t)$ 的 ODE 相减, 然后加减 $A(t, \alpha_1)\mathbf{w}_2(t)$, 推出

$$\left| \frac{d}{dt}(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \right| \leq \|A(t, \alpha_1)\| |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2| + \|A(t, \alpha_1) - A(t, \alpha_2)\| |\mathbf{w}_2|.$$

对此不等式积分并应用练习 3.8(a) 中的 Gronwall 不等式推广, 得到

$$|(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)(t)| \leq B \frac{e^{Mt} - 1}{M},$$

其中 M 由 (4.88) 定义, 且

$$B = \max_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{b}|e^{Mt} \|A(t, \alpha_1) - A(t, \alpha_2)\|.$$

将这些不等式与 $A(t, \alpha)$ 关于 α 一致连续的事实结合, 完成证明。

注记: 定理 4.5.4 可推广到 (Lipschitz 连续的) 非自治非线性方程, 如 $x' = G(x, t, \alpha)$ 。这类结果最方便的证明是利用练习 24 中提出的技巧。

8. 对于 $0 < \sigma < \rho/(1 - \rho)$ 时的恒化器方程 (4.21), 使用零倾线证明第一象限内所有初始条件的解当 $t \rightarrow \infty$ 时趋于平衡点 $(0, \sigma)$ 。

提示: 回忆单调函数当 $t \rightarrow \infty$ 时有极限。

注记: 本题和下一题涉及本书后半部分重点讨论的问题, 即 ODE 解的渐近行为。在这些问题中, 可用特殊方法解决。从第 6 章开始, 我们将引入更有效的工具来研究这类渐近行为。

7.8.2 微分定理的应用

9. **引言:** 本练习旨在建立信心; 通过显式解验证具体例子中的公式 (4.79) 和 (4.81)。这也是为下面一些计算所做的有益准备。

(a) 使用分离变量法求解初值问题

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha + \cos t}{x}, \quad x(0) = b,$$

其中 $b \neq 0$ 。

(b) 对解求导以计算 $\partial x / \partial b$ 。

(c) 定义 $G(x, t, \alpha) = (\alpha + \cos t)/x$ 如 (4.91) 所示, 计算 DG , 写出初值问题 (4.79), 并证明 (b) 部分的答案满足该初值问题。

(d) 对 (a) 部分的解求导以计算 $\partial x / \partial \alpha$ 。

(e) 写出初值问题 (4.81), 并证明 (d) 部分的答案满足该初值问题。

注记: 在本问题中使用流的记号可能更一致, 但当涉及显式计算时, 我们通常发现使用 x 而不是 φ 更直观。注意我们称为 x 的量依赖于 t, b 和 α , 但我们故意不严谨地没有显式指出所有这些依赖关系。