

调和方程 / Laplace 方程

中文自学讲义 (Sample)

以 Evans 为主线, Strauss 补充计算方法, 谷超豪体系补充边值问题与物理背景

本小样展示最终讲义的写法与排版: 不逐句翻译教材, 而是按本科生自学与期末复习的逻辑重组。正式版将系统覆盖 Laplace/Poisson 方程来源、调和函数基本性质、基本解与 Green 函数、典型区域显式解、Neumann 问题、弱解和能量方法、常见题型模板。

2026 年 6 月 5 日

目录

使用说明	3
第一章 Laplace 方程与 Poisson 方程从哪里来	4
1.1 符号和基本对象	4
1.2 三类物理来源	4
1.2.1 稳态热传导	4
1.2.2 静电势	5
1.2.3 稳态扩散	5
1.3 四种常见边值问题	5
第二章 调和函数的基本性质	7
2.1 定义与第一批例子	7
2.2 平均值公式	7
2.3 极值原理与唯一性	9
第三章 典型区域上的显式解	10
3.1 单位圆盘上的 Poisson 公式	10
第四章 常见题型模板（样张）	12
4.1 极值原理证明唯一性	12
4.2 Neumann 兼容条件预告	12

使用说明

本讲义采用如下结构：先从物理守恒律与边值问题出发，再建立调和函数的一组核心定理，最后把定理落到可计算题型上。阅读时要把两个问题始终放在心里：

1. 方程本身告诉我们什么定性信息？例如极值原理、唯一性、比较原理。
2. 在具体区域上怎样算出解？例如 Poisson 核、分离变量、Green 函数。

Evans 的优势在于把调和函数的结构性质讲得非常清楚；Strauss 的优势在于计算方法和典型边值问题；谷超豪《数学物理方程》的课程体系有助于把 Dirichlet、Neumann、Robin 问题和物理模型放在同一张图里理解。

1 Laplace 方程与 Poisson 方程从哪里来

1.1 符号和基本对象

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集，边界记为 $\partial\Omega$ 。未知函数记为

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega.$$

若 u 二阶可微，定义 Laplace 算子

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

在边界点上， ν 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，法向导数记为

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = Du \cdot \nu,$$

其中 $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ 是梯度。

1.2 三类物理来源

1.2.1 稳态热传导

令 $u(x)$ 表示温度。Fourier 定律说热流密度

$$q = -kDu, \quad k > 0,$$

即热量从高温流向低温。在无热源的稳态情形，任意小体积内热量不再积累，因而

$$\operatorname{div} q = 0.$$

若 k 为常数，则得到

$$-k\Delta u = 0, \quad \text{即} \quad \Delta u = 0.$$

若存在体热源 $F(x)$ ，守恒律变为 $\operatorname{div} q = F$ ，于是

$$-\Delta u = f, \quad f = \frac{F}{k}.$$

1.2.2 静电势

令 u 表示电势，电场 $E = -Du$ 。Gauss 定律给出

$$\operatorname{div} E = \rho,$$

其中 ρ 是电荷密度。代入 $E = -Du$ 后得到

$$-\Delta u = \rho.$$

没有电荷时即为 Laplace 方程。

1.2.3 稳态扩散

令 u 表示浓度，Fick 定律说扩散通量 $J = -D_0 Du$ 。稳态且无反应时 $\operatorname{div} J = 0$ ，因此仍得到 $\Delta u = 0$ 。有源项或反应项时会得到 Poisson 型方程或更一般的椭圆方程。

这一节的核心记忆

Laplace 方程表示“没有内部源”的稳态平衡；Poisson 方程表示“内部源项 f 驱动的稳态平衡”。二者的差别不是形式上的一个 f ，而是物理上有没有体源，以及数学上极值原理、表示公式和能量估计怎样被源项修正。

1.3 四种常见边值问题

定义 1.1: Dirichlet、Neumann 与 Robin 问题

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域， f 为区域内给定函数， g, h, α, β 为边界上的给定函数。

1. Dirichlet 问题：给定边界值

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

2. Neumann 问题：给定法向通量

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = h, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

3. Robin 问题：给定边界值与法向导数的线性组合

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

什么时候用，怎么用

Dirichlet 适合边界温度或电势已知；做唯一性时直接比较两个解的差。

Neumann 适合边界热流或电通量已知；先检查兼容条件，再记住解只差一个常数。

Robin 适合边界与外界交换热量，如 Newton 冷却律；通常出现在能量法或 Sturm–Liouville 分离变量中。

2 调和函数的基本性质

2.1 定义与第一批例子

定义 2.1: 调和函数

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集。若 $u \in C^2(\Omega)$ 且

$$\Delta u = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中成立,}$$

则称 u 在 Ω 中为调和函数。

例题 2.1: 判断函数是否调和

判断下列函数在其定义域内是否调和:

$$u_1(x, y) = x^2 - y^2, \quad u_2(x, y) = x^2 + y^2, \quad u_3(x) = \frac{1}{|x|} \quad (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

解. 对 u_1 , 有 $u_{xx} = 2, u_{yy} = -2$, 故 $\Delta u_1 = 0$, 所以调和。对 u_2 , 有 $\Delta u_2 = 2 + 2 = 4$, 所以不和谐。对 u_3 , 令 $r = |x|$, 在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 中

$$\Delta(r^{-1}) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} r^{-1} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (-1) = 0,$$

所以 u_3 在去掉原点后调和。

□

题型模板: 判断是否调和

先确认定义域, 再算二阶偏导并相加。若函数含 $r = |x|$, 优先使用径向函数公式

$$\Delta v(r) = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) \quad (r > 0).$$

不要忘记奇点: $|x|^{2-n}$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 调和, 但在原点不是经典调和函数。

2.2 平均值公式

定理 2.1: 球面平均值公式

设 $u \in C^2(\Omega)$ 且 $\Delta u = 0$ 。若闭球 $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$, 则

$$u(x) = \oint_{\partial B(x, r)} u(y) \, dS(y) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) \, dS(y).$$

证明. 为简洁起见取 $x = 0$ 。记

$$\phi(r) = \oint_{\partial B(0, r)} u(y) \, dS(y) = \oint_{\partial B(0, 1)} u(rz) \, dS(z).$$

对 r 求导并用散度定理:

$$\phi'(r) = \oint_{\partial B(0, 1)} Du(rz) \cdot z \, dS(z) = \frac{1}{|\partial B(0, r)|} \int_{\partial B(0, r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS = \frac{1}{|\partial B(0, r)|} \int_{B(0, r)} \Delta u \, dy = 0.$$

所以 $\phi(r)$ 与 r 无关。令 $r \rightarrow 0^+$, 由 u 连续得 $\phi(r) \rightarrow u(0)$, 结论成立。 $\square$

什么时候用, 怎么用

什么时候用: 题目给出球面或圆周上的值, 要求球心值; 或者需要证明调和函数的定性性质, 如极值原理、Liouville 定理。

怎么用: 先确认整个闭球包含在区域中, 再把中心点值替换成边界平均。若不是球心, 通常先平移坐标; 若是圆盘或球内任意点的值, 往往要用 Poisson 公式而不是简单平均。

例题 2.2: 用平均值公式求点值

设 u 在 $\mathbb{R}^2$ 中调和, 且在圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 上满足

$$u(x, y) = 3 + x^2 - y.$$

求 $u(0, 0)$ 。

解. 由圆周平均值公式,

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (3 + 4 \cos^2 \theta - 2 \sin \theta) \, d\theta.$$

因为 $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2}$, 且 $\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = 0$, 所以

$$u(0, 0) = 3 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

$\square$

2.3 极值原理与唯一性

定理 2.2: 弱极值原理

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界连通开集, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 且 $\Delta u = 0$ 。则

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

证明. 平均值公式表明: 调和函数在任意小球中心的值等于周围球面的平均值。若内部某点达到严格最大值, 则周围球面平均也必须等于该最大值, 这迫使球面上处处都取最大值。沿连通区域逐步传播, 可知 u 为常数。非严格情形可对 $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon |x|^2$ 使用 $\Delta u_\varepsilon = 2n\varepsilon > 0$ 后令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 。□

什么时候用, 怎么用

什么时候用: 证明解不可能超过边界数据; 证明 Dirichlet 问题唯一; 排除内部正最大或负最小。

怎么用: 对原函数用极值原理得到上下界; 证明唯一性时令 $w = u - v$, 则 $\Delta w = 0$ 且边界 $w = 0$, 于是 $w \leq 0$ 且 $-w \leq 0$, 所以 $w = 0$ 。

定理 2.3: Dirichlet 问题的唯一性

设 Ω 有界。若 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 都满足

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta v = f, & x \in \Omega, \\ v = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

则 $u = v$ 。

证明. 令 $w = u - v$ 。则

$$\Delta w = 0 \quad \text{于} \Omega, \quad w = 0 \quad \text{于} \partial\Omega.$$

由极值原理,

$$\max_{\overline{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w = 0, \quad \min_{\overline{\Omega}} w = \min_{\partial\Omega} w = 0.$$

故 $w \equiv 0$, 即 $u = v$ 。□

3 典型区域上的显式解

3.1 单位圆盘上的 Poisson 公式

设

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq r < 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

为单位圆盘。若边界值

$$u(1, \theta) = g(\theta)$$

给定，则单位圆盘 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, \\ u(1, \theta) = g(\theta) \end{cases}$$

的解可写为

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \varphi) g(\varphi) d\varphi,$$

其中

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}, \quad 0 \leq r < 1,$$

称为 Poisson 核。

什么时候用，怎么用

什么时候用：区域是圆盘，给定圆周上的 Dirichlet 数据，要求圆盘内调和函数。

怎么用：若 g 是三角多项式，优先用 Fourier 形式：

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

则

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

若 g 较复杂，再使用积分形式。

例题 3.1: 圆盘 Dirichlet 问题

求单位圆盘中满足

$$\Delta u = 0, \quad u(1, \theta) = 2 + \cos 3\theta - 4 \sin 2\theta$$

的调和函数。

解. 边界数据已经是 Fourier 形式。根据圆盘内调和函数的径向衰减规律, $\cos k\theta$ 与 $\sin k\theta$ 项在内部对应乘上 r^k , 所以

$$u(r, \theta) = 2 + r^3 \cos 3\theta - 4r^2 \sin 2\theta.$$

这比直接代 Poisson 积分更快, 也是 Strauss 风格计算题中最常用的处理方式。 $\square$

4 常见题型模板（样张）

4.1 极值原理证明唯一性

模板

若 u, v 是同一 Dirichlet 问题的两个经典解：

1. 令 $w = u - v$;
2. 写出 $\Delta w = 0$ 与 $w|_{\partial\Omega} = 0$;
3. 用极值原理得 $w \leq 0$;
4. 对 $-w$ 再用极值原理得 $w \geq 0$;
5. conclude $w \equiv 0$.

对于 Poisson 方程，源项相同才能直接相减为调和方程；若源项不同，则转为比较原理。

4.2 Neumann 兼容条件预告

Neumann 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = h, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

不能任意给定 f 与 h 。若存在足够光滑的解，则由散度定理

$$\int_{\Omega} f \, dx = \int_{\Omega} (-\Delta u) \, dx = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS = - \int_{\partial\Omega} h \, dS.$$

因此必要条件为

$$\boxed{\int_{\Omega} f \, dx + \int_{\partial\Omega} h \, dS = 0.}$$

这也解释了为什么 Neumann 问题的解至多只差一个常数：边界只规定法向导数，不能决定电势或温度的零点。

正式版会继续补全

完整讲义中，本节后面将加入 Green 函数、矩形分离变量、弱解与能量方法，并在末章集中给出十类常见题型的“识别信号、解题步骤、易错点”。