

线性微分方程组与高阶线性微分方程：理论与方法详解

摘要

本文系统整理线性微分方程组（包括高阶线性微分方程）的核心理论，并详细说明每个定理的用法，辅以详尽实例。内容分为三个层次：

1. **一般理论（变系数）**：解的存在唯一性、齐次解空间的线性结构（维数 n 、基本解组）、朗斯基行列式与刘维尔公式、非齐次方程的常数变易法。
2. **常系数情形**：矩阵指数函数的定义与性质、利用若尔当标准形或待定指数函数法求解基解矩阵。
3. **高阶线性微分方程**：化为一阶方程组、特征多项式法求解常系数高阶方程。

每个定理后均配有“用法说明”和具体数值例子，帮助读者掌握实际计算步骤。

1 核心主旨概述

1. **主旨一（最重要）**：线性微分方程组（含高阶方程）存在统一的理论框架——解的存在唯一性、齐次解构成 n 维线性空间、朗斯基行列式判定线性无关、非齐次方程通解结构（常数变易法）。这些是进一步研究的基础。
2. **主旨二**：常系数线性微分方程组可通过矩阵指数函数 e^{xA} 获得显式解，结合若尔当标准形或特征向量法可将解表示为初等函数（指数、多项式、三角函数）的有限组合。
3. **主旨三**：高阶线性微分方程可化为一阶方程组，从而继承所有理论；特别地，常系数高阶方程直接采用特征多项式法求解，无需构造矩阵指数。

2 线性微分方程组的一般理论（变系数）

2.1 基本形式与记号

考虑 n 阶线性微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j + f_i(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

其中 $a_{ij}(x), f_i(x)$ 在区间 (a, b) 上连续。引入

$$\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

则方程组简化为向量形式

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x). \quad (1)$$

当 $\mathbf{f}(x) \equiv \mathbf{0}$ 时称为齐次方程组，否则为非齐次。

2.2 存在唯一性定理

定理 2.1 (存在唯一性定理). 对于任意给定的初值 $x_0 \in (a, b)$ 和 $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ ，初值问题

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

在区间 (a, b) 上存在唯一解。

注 2.1 (用法说明). 该定理是后续所有理论的基石，它保证了解的存在区间就是系数连续的最大区间，且初值条件与解一一对应。在应用中，只要系数函数连续，我们就能放心地寻找通解，而不会出现解突然“爆炸”或丢失的情况。

例 2.1 (存在唯一性实例). 考虑一阶线性方程 $y' = \frac{1}{x}y + 1$ ，区间 $(0, \infty)$ 上系数连续。定理保证：对任意 $x_0 > 0$ 和初值 $y(x_0) = y_0$ ，解存在唯一。实际求解得 $y = x \ln x + Cx$ ，确实处处存在。

2.3 齐次线性微分方程组

记齐次方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} \quad (2)$$

的解集合为 S 。

2.3.1 线性性质 (叠加原理)

引理 2.2 (叠加原理). 若 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in S$, 则对任意常数 C_1, C_2 , $C_1\mathbf{y}_1 + C_2\mathbf{y}_2 \in S$.

证明. 直接代入验证即可。 $\square$

因此 S 是一个线性空间。

2.3.2 解空间的维数

引理 2.3. 线性空间 S 的维数等于 n 。

证明思路. 固定 x_0 , 定义映射 $H: \mathbb{R}^n \rightarrow S$, $\mathbf{y}_0 \mapsto \mathbf{y}(x)$ (初值问题的解)。由存在唯一性, H 是双射且线性, 故为同构, 从而 $\dim S = \dim \mathbb{R}^n = n$. $\square$

注 2.2 (用法说明). 这个引理告诉我们: 齐次方程组恰好有 n 个线性无关的解, 任何其他解都可以表示为它们的线性组合。因此, 求解齐次方程组的任务就是找到 n 个线性无关的解 (即基本解组)。

2.3.3 基本解组与通解

定义 2.1. 齐次方程组(2)的 n 个线性无关的解称为一个**基本解组**。若 $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 是一个基本解组, 则通解为

$$\mathbf{y} = C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x), \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

2.3.4 朗斯基行列式与线性无关性判别

给定 n 个解 $\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)$, 构造矩阵 $\mathbf{Y}(x) = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$, 其行列式

$$W(x) = \det \mathbf{Y}(x)$$

称为**朗斯基行列式**。

定理 2.4 (刘维尔公式). 朗斯基行列式满足

$$W(x) = W(x_0) \exp \left(\int_{x_0}^x \operatorname{tr}[\mathbf{A}(s)] \, ds \right), \quad a < x < b,$$

其中 $\operatorname{tr}[\mathbf{A}(x)] = \sum_{i=1}^n a_{ii}(x)$ 是矩阵的迹。

证明. 对 $W(x)$ 求导, 利用行列式的微分法则和方程组(2), 可得 $W' = (\operatorname{tr} \mathbf{A})W$, 积分即得。 $\square$

由刘维尔公式立即得到: $W(x)$ 要么恒为零, 要么恒不为零 (因为指数因子永不为零)。

定理 2.5 (朗斯基判别法). 解组 $y_1, \dots, y_n$ 线性无关 $\iff W(x) \neq 0$ (对某个 (从而所有) $x \in (a, b)$).

注 2.3 (用法说明). 实际判别时, 只需计算朗斯基行列式在某一点 x_0 的值 (通常选方便的点, 如 $x_0 = 0$), 若 $W(x_0) \neq 0$, 则解组线性无关, 构成基本解组; 若 $W(x_0) = 0$, 则解组线性相关。注意: 对于非解的函数组, $W(x_0) = 0$ 不能直接推出线性相关, 但这里针对的是解组, 结论成立。

例 2.2 (朗斯基判别法应用). 验证方程组

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \frac{1}{2} \sin 2x - 1 \\ \frac{1}{2} \sin 2x + 1 & \sin^2 x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

的两个解 $\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos x \\ e^x \sin x \end{pmatrix}$ 和 $\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ 是否构成基本解组?

解法: 计算朗斯基行列式在 $x = 0$ 的值:

$$W(0) = \begin{vmatrix} e^0 \cos 0 & -\sin 0 \\ e^0 \sin 0 & \cos 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

因此两解线性无关, 构成基本解组。通解为 $y = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x)$ 。

2.4 非齐次线性微分方程组

定理 2.6 (常数变易法). 设 $\Phi(x)$ 是齐次方程组(2)的一个基解矩阵 (即列向量构成基本解组), 则非齐次方程组(1)的通解为

$$y = \Phi(x) \left(c + \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s) f(s) ds \right),$$

其中 c 是任意常数列向量。满足初值 $y(x_0) = y_0$ 的特解为

$$y = \Phi(x) \Phi^{-1}(x_0) y_0 + \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s) f(s) ds.$$

注 2.4 (用法说明). 常数变易法的步骤:

1. 求出齐次方程的一个基解矩阵 $\Phi(x)$ (即 n 个线性无关的解向量作为列)。
2. 计算 $\Phi^{-1}(x)$ 。
3. 计算积分 $\int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s) f(s) ds$ 。
4. 乘以 $\Phi(x)$ 并加上齐次通解部分。

注意: 该公式理论上完整, 但实际计算中求 $\Phi^{-1}(x)$ 的积分往往困难, 故仅适用于简单情况或理论分析。

例 2.3 (常数变易法完整示例). 使用前面例子中的基解矩阵 $\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos x & -\sin x \\ e^x \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, 求解非齐次方程组

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

详细步骤:

1. 验证 $\Phi(x)$ 确为基解矩阵 (已在例中验证 $W(0) = 1 \neq 0$)。

2. 计算 $\Phi^{-1}(x)$ 。由 $\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos x & -\sin x \\ e^x \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, 其行列式

$$\det \Phi(x) = e^x \cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot e^x \sin x = e^x (\cos^2 x + \sin^2 x) = e^x.$$

利用逆矩阵公式 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, 得

$$\Phi^{-1}(x) = \frac{1}{e^x} \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -e^x \sin x & e^x \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \cos x & e^{-x} \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

3. 计算积分:

$$\int_0^x \Phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} ds = \int_0^x \begin{pmatrix} e^{-s} \cos s \cdot \cos s + e^{-s} \sin s \cdot \sin s \\ -\sin s \cdot \cos s + \cos s \cdot \sin s \end{pmatrix} ds = \int_0^x \begin{pmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. 初值条件 $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 对应 $c = \Phi^{-1}(0)y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

5. 特解部分: $\Phi(x) \int_0^x \cdots = \begin{pmatrix} e^x \cos x & -\sin x \\ e^x \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^x - 1) \cos x \\ (e^x - 1) \sin x \end{pmatrix}$ 。

6. 加上齐次部分 $\Phi(x)c = \begin{pmatrix} e^x \cos x & -\sin x \\ e^x \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ 。

7. 最终解:

$$y(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (e^x - 1) \cos x \\ (e^x - 1) \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^x - 1) \cos x - \sin x \\ (e^x - 1) \sin x + \cos x \end{pmatrix}.$$

3 常系数线性微分方程组

当系数矩阵 A 为常数矩阵时, 方程组变为

$$\frac{dy}{dx} = Ay + f(x). \quad (3)$$

此时可利用矩阵指数函数给出显式解。

3.1 矩阵指数函数

定义 3.1. 矩阵指数函数定义为幂级数

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots,$$

该级数对任意矩阵绝对收敛。

重要性质：

- 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ ，则 $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$ 。
- $e^{\mathbf{A}}$ 可逆，且 $(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$ 。
- 对可逆矩阵 $\mathbf{P}$ ， $e^{\mathbf{PAP}^{-1}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{A}}\mathbf{P}^{-1}$ 。

3.2 齐次常系数方程组的基本解矩阵

定理 3.1. $\Phi(x) = e^{x\mathbf{A}}$ 是齐次方程组 $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 的一个基解矩阵，且满足 $\Phi(0) = \mathbf{E}$ (标准基解矩阵)。

证明. 逐项求导得 $\frac{d}{dx}e^{x\mathbf{A}} = \mathbf{A}e^{x\mathbf{A}}$ ，且 $\det(e^{0\cdot\mathbf{A}}) = \det \mathbf{E} = 1 \neq 0$ 。 □

于是非齐次方程(3)的解为

$$\mathbf{y} = e^{x\mathbf{A}}\mathbf{c} + \int_{x_0}^x e^{(x-s)\mathbf{A}}\mathbf{f}(s)ds, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \implies \mathbf{y} = e^{(x-x_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x e^{(x-s)\mathbf{A}}\mathbf{f}(s)ds.$$

3.3 计算 $e^{x\mathbf{A}}$ 的实用方法

3.3.1 方法一：若尔当标准形法

任何矩阵 $\mathbf{A}$ 可化为若尔当标准形 $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ ，则 $e^{x\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{x\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1}$ 。若尔当块 $\mathbf{J}_i$ (特征值 λ_i ，阶数 n_i) 对应的指数为

$$e^{x\mathbf{J}_i} = e^{\lambda_i x} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ 0 & 1 & x & \cdots & \frac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 3.1 (若尔当形法示例). 计算 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵指数。 $\mathbf{A}$ 已经是若尔当块 ($\lambda = 1$, $n = 2$)，直接应用公式：

$$e^{x\mathbf{A}} = e^x \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix}.$$

3.3.2 方法二：待定指数函数法（特征向量法）

当 $\mathbf{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量时（例如特征值互异），可直接构造基解矩阵。

定理 3.2. 设 $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ 是 $\mathbf{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量，对应的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ （可重复），则

$$\Phi(x) = (e^{\lambda_1 x} \mathbf{r}_1, e^{\lambda_2 x} \mathbf{r}_2, \dots, e^{\lambda_n x} \mathbf{r}_n)$$

是齐次方程组的一个基解矩阵。

注 3.1 (用法说明). 步骤：

1. 求特征多项式 $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$ ，得到特征值。
2. 对每个特征值 λ_i ，求特征向量 $\mathbf{r}_i$ 满足 $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{r}_i = 0$ 。
3. 若所有特征值互异，则特征向量自动线性无关，直接构造基解矩阵。
4. 若特征值有重根但仍有足够多的线性无关特征向量（即 $\mathbf{A}$ 可对角化），同样适用。

例 3.2 (特征值互异情形). 求解 $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 5 & -28 & -18 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -16 & -10 \end{pmatrix} \mathbf{y}$ 。

详细步骤：

1. 计算特征多项式： $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda(1 - \lambda^2)$ ，故特征值 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ （互异）。
2. 求特征向量：
 - $\lambda = 0$: 解 $(\mathbf{A} - 0\mathbf{E})\mathbf{r} = 0$ ，得 $\mathbf{r}_1 = (-2, -1, 1)^T$ 。
 - $\lambda = 1$: 解 $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{r} = 0$ ，得 $\mathbf{r}_2 = (2, -1, 2)^T$ 。
 - $\lambda = -1$: 解 $(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{r} = 0$ ，得 $\mathbf{r}_3 = (3, 0, 1)^T$ 。
3. 构造基解矩阵： $\Phi(x) = (e^{0 \cdot x} \mathbf{r}_1, e^{1 \cdot x} \mathbf{r}_2, e^{-1 \cdot x} \mathbf{r}_3)$ 。
4. 通解： $\mathbf{y} = C_1 \mathbf{r}_1 + C_2 e^x \mathbf{r}_2 + C_3 e^{-x} \mathbf{r}_3$ 。

例 3.3 (复特征值处理). 求解 $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$ 。

详细步骤：

1. 特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ ，根 $\lambda = 1 \pm i$ 。
2. 求特征向量：对 $\lambda = 1 + i$ ，解 $(\mathbf{A} - (1 + i)\mathbf{E})\mathbf{r} = 0$ ，得 $\mathbf{r}_1 = (1, i)^T$ ；对 $\lambda = 1 - i$ ，得 $\mathbf{r}_2 = (i, 1)^T$ 。

3. 构造复值基解矩阵: $\Phi(x) = (e^{(1+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, e^{(1-i)x} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix})$ 。

4. 提取实值解: 第一列 $e^{(1+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^x(\cos x + i \sin x) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + ie^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$, 其实部和虚部即为两个实值线性无关解。

5. 实值通解: $y = C_1 e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ 。

4 高阶线性微分方程

n 阶线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (4)$$

可通过引入新变量 $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$ 化为一阶方程组:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

因此前两节的所有理论可直接应用, 只需关注第一个分量即可得到关于 y 的结论。

4.1 齐次高阶方程的一般理论

设 $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 是齐次方程 ($f \equiv 0$) 的 n 个解, 则它们的朗斯基行列式为

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

刘维尔公式简化为 $W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x a_1(s) ds\right)$, 因为此时 $\text{tr } \mathbf{A}(x) = -a_1(x)$ 。

例 4.1 (已知一个解求通解 (二阶)). 对二阶方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, 若已知一个非零解 $\varphi(x)$, 则另一个线性无关解为

$$\psi(x) = \varphi(x) \int \frac{1}{\varphi(x)^2} \exp\left(-\int p(x) dx\right) dx.$$

通解为 $y = C_1\varphi(x) + C_2\psi(x)$ 。

具体例子：求解 $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ ($x > 0$)。观察得 $\varphi(x) = x$ 是一个解。计算：

$$\int p(x) dx = \int -\frac{2}{x} dx = -2 \ln x, \quad e^{-\int p} = x^2.$$

则 $\psi(x) = x \int \frac{x^2}{x^2} dx = x \int 1 dx = x^2$ (取一个原函数)。故通解 $y = C_1x + C_2x^2$ 。

4.2 非齐次高阶方程的常数变易法

若已知齐次方程的一个基本解组 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ，则非齐次方程(4)的一个特解为

$$\varphi^*(x) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \int_{x_0}^x \frac{W_k(s)}{W(s)} f(s) ds,$$

其中 $W_k(s)$ 是将 $W(s)$ 中第 k 列替换为 $(0, \dots, 0, 1)^T$ 所得的行列式。

对于二阶方程，公式简化为

$$y_p(x) = \int_{x_0}^x \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)}{\varphi_1(s)\varphi_2'(s) - \varphi_2(s)\varphi_1'(s)} f(s) ds.$$

例 4.2 (二阶非齐次方程). 求解 $y'' - 2y' + y = e^x$ 。齐次方程特征方程 $(\lambda - 1)^2 = 0$ ，基本解组 $\varphi_1 = e^x$, $\varphi_2 = xe^x$ 。朗斯基行列式 $W = e^{2x}$ 。代入公式：

$$y_p(x) = \int_0^x \frac{e^s \cdot xe^x - e^x \cdot se^s}{e^{2s}} e^s ds = e^x \int_0^x (x - s) ds = e^x \cdot \frac{x^2}{2}.$$

通解 $y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{x^2}{2}e^x$ 。

4.3 常系数高阶方程

当 $a_1, \dots, a_n$ 为常数时，方程(4)称为常系数线性微分方程。齐次方程

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0$$

的特征方程为 $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$ 。基本解组由特征根决定：

定理 4.1 (特征根法). 设特征根为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ，重数 $n_1, \dots, n_s$ ($\sum n_i = n$)，则基本解组为

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x}; \quad \dots; \quad e^{\lambda_s x}, xe^{\lambda_s x}, \dots, x^{n_s-1}e^{\lambda_s x}.$$

若特征根为复数 $\alpha \pm i\beta$ ，则对应实值解为 $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$ 及其乘以 x 的幂次形式。

注 4.1 (用法说明). 步骤：

1. 写出特征方程，求解所有特征根（包括复根）。

2. 根据每个根的重数, 写出对应的解函数。

3. 将所有解函数线性组合即得通解。

例 4.3 (单根情形). 求解 $y''' - y'' - 2y' = 0$ 。特征方程 $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$, 根 $0, -1, 2$ (均为单根), 基本解组 $1, e^{-x}, e^{2x}$, 通解 $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$ 。

例 4.4 (重根情形). 求解 $y'' + 2y' + y = 0$ 。特征方程 $(\lambda + 1)^2 = 0$, 二重根 $\lambda = -1$, 基本解组 e^{-x}, xe^{-x} , 通解 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$ 。

例 4.5 (复根情形). 求解 $y'' + y = 0$ 。特征方程 $\lambda^2 + 1 = 0$, 根 $\pm i$, 基本解组 $\cos x, \sin x$, 通解 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ 。

5 总结

- 线性微分方程组的一般理论 (存在唯一性、齐次解空间维数、朗斯基判别法、常数变易法) 是处理所有线性系统的通用框架。
- 对于常系数情形, 矩阵指数函数提供了统一的显式解, 通过若尔当标准形或特征向量法可实际计算出初等函数形式的解。
- 高阶线性微分方程可化为一阶方程组, 从而继承全部理论; 常系数高阶方程直接使用特征多项式法, 最为简便实用。