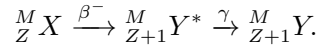


问题 1. 某陨石长期受宇宙射线照射，宇宙射线以恒定速率 P 产生放射性核素 X 。核素 X 发生 β^- 衰变生成激发态 Y^* ，随后 Y^* 发生 γ 衰变生成稳定核 Y ：



已知 X 的半衰期为 $T_X = 30.0 \text{ d}$ ， Y^* 的半衰期为 $T_{Y^*} = 10.0 \text{ d}$ 。在 $t = 0$ 前，陨石长期暴露在宇宙射线下，体系已达到稳定状态。 $t = 0$ 时陨石被埋入地下，宇宙射线停止照射，此后 $P = 0$ 。

设 $N_X(t)$ 和 $N_{Y^*}(t)$ 分别表示时刻 t 时陨石中 X 和 Y^* 的原子核数目。已知测量时发现

$$\frac{N_{Y^*}(t)}{N_X(t)} = \frac{5}{12}.$$

设 X 的衰变常数为 λ_X ， Y^* 的衰变常数为 λ_Y 。求：

1. 写出 $t = 0$ 时 $N_X(0)$ 与 $N_{Y^*}(0)$ 并解出 $t > 0$ 时 $N_X(t)$ 与 $N_{Y^*}(t)$ ；
2. 估计陨石被埋入地下已经过了多少天；
3. 说明 β^- 衰变和 γ 衰变分别怎样改变原子核。

解答. 设 $N_Y(t)$ 表示 $N_{Y^*}(t)$ 。衰变常数为 $\lambda_X = \frac{\ln 2}{30.0 \text{ d}}$ ， $\lambda_Y = \frac{\ln 2}{10.0 \text{ d}}$ ，所以 $\lambda_Y = 3\lambda_X$ 。

1. 在 $t = 0$ 以前，宇宙射线不断以速率 P 产生 X ，体系达到稳定状态，所以有 X 的产生速率等于衰变速率： $P = \lambda_X N_X(0)$ ，因此 $N_X(0) = \frac{P}{\lambda_X}$ 。

对 Y^* 而言，它由 X 的衰变产生，又以 λ_Y 衰变消失，稳定时有 $\lambda_X N_X(0) = \lambda_Y N_Y(0)$ ，因此 $N_{Y^*}(0) = \frac{\lambda_X N_X(0)}{\lambda_Y} = \frac{P}{\lambda_Y}$ 。

埋入地下后，宇宙射线停止照射，所以 $P = 0$ 。此时方程为

$$\frac{dN_X}{dt} = -\lambda_X N_X, \quad \frac{dN_Y}{dt} = \lambda_X N_X - \lambda_Y N_Y.$$

先解第一个方程：

$$N_X(t) = \frac{P}{\lambda_X} e^{-\lambda_X t}.$$

再代入第二个方程，得到

$$N_{Y^*}(t) = \frac{P}{\lambda_Y} e^{-\lambda_Y t} + \frac{\lambda_X N_X(0)}{\lambda_Y - \lambda_X} (e^{-\lambda_X t} - e^{-\lambda_Y t}).$$

由于 $\lambda_X N_X(0) = P$ ， $\lambda_Y = 3\lambda_X$ ，令 $\lambda_X = \lambda$ ，则

$$N_X(t) = \frac{P}{\lambda} e^{-\lambda t},$$

$$N_{Y^*}(t) = \frac{P}{\lambda} \left(\frac{1}{2} e^{-\lambda t} - \frac{1}{6} e^{-3\lambda t} \right).$$

2. 由上式可得

$$\frac{N_{Y^*}(t)}{N_X(t)} = \frac{\frac{P}{\lambda} \left(\frac{1}{2} e^{-\lambda t} - \frac{1}{6} e^{-3\lambda t} \right)}{\frac{P}{\lambda} e^{-\lambda t}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} e^{-2\lambda t}.$$

题目给出

$$\frac{N_{Y^*}(t)}{N_X(t)} = \frac{5}{12}.$$

所以

$$2\lambda t = \ln 2.$$

又 $\lambda = \lambda_X = \frac{\ln 2}{30.0 \text{ d}}$, 所以

$$t = \frac{\ln 2}{2\lambda_X} = \frac{\ln 2}{2 \cdot \frac{\ln 2}{30.0}} = 15.0 \text{ d}.$$

因此陨石被埋入地下已经过了约 15 天。

3. β^- 衰变中, 原子核内一个中子转化为一个质子, 并放出一个电子和一个反中微子, 所以质量数不变, 原子序数增加 1。因此

$${}^M_Z X \longrightarrow {}^M_{Z+1} Y^*.$$

γ 衰变中, 处于激发态的原子核放出 γ 光子, 回到较低能级或基态。它只改变原子核的能量状态, 不改变质量数, 也不改变原子序数。因此

$${}^M_{Z+1} Y^* \longrightarrow {}^M_{Z+1} Y.$$

问题 2. 铍原子的基态电子排布为: $1s^2 2s^2$, 其中最外层两个价电子都处在 $2s$ 轨道上。在 LS 耦合下, 如果只考虑这两个 $2s$ 价电子, 形式上可以写出两个原子态 $(2s2s)^1 S_0$ 和 $(2s2s)^3 S_1$, 请回答:

1. 为什么 $(2s2s)^3 S_1$ 态不允许存在?
2. 简要说明: 为什么泡利不相容原理会限制同一轨道上最多只能容纳两个电子?
3. 判断铍原子的基态原子态。

解答. 1. $(2s2s)^3 S_1$ 是三重态, 说明两个电子的总自旋为 $S = 1$, 这对应两个电子自旋平行, 即 $m_{s1} = m_{s2}$, 于是两个电子的四个量子数 (n, l, m_l, m_s) 完全相同。

但是泡利不相容原理要求: 在一个原子中, 不可能有两个电子具有完全相同的四个量子数。所以: $(2s2s)^3 S_1$ 违反泡利不相容原理, 不允许存在。

2. 同一轨道意味着电子的前三个量子数已经确定, 电子还可以通过自旋磁量子数 m_s 来区分, 而电子的自旋磁量子数只有两个可能值:

$$m_s = +\frac{1}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2}$$

因此, 在同一轨道上最多只能放两个电子, 而且这两个电子必须自旋相反。如果再放第三个电子, 它必然会和前面某个电子具有完全相同的四个量子数, 这就违反泡利不相容原理。

3. 两个 $2s$ 价电子处在同一轨道上, 必须自旋反平行, 因此总自旋为 $S = 0$ 。两个 s 电子的轨道角动量量子数都是 $l_1 = 0, l_2 = 0$, 所以总轨道角动量为 $L = 0$ 。此时 $J = 0$, 因此铍原子的基态原子态为 $(2s2s)^1 S_0$, 或者写成 $1s^2 2s^2 {}^1 S_0$ 。

问题 3. 一束单色中子照射某晶体。已知该中子的德布罗意波长为 $\lambda_n = 0.180 \text{ nm}$, 实验发现, 当中子束与某组晶面的夹角为 $\alpha_1 = 21.1^\circ$ 时, 出现一级加强衍射。

1. 求这组晶面的晶面间距 d 。
2. 若改用波长为 $\lambda_X = 0.154 \text{ nm}$ 的 X 射线照射同一组晶面, 是否可能出现二级加强衍射? 若可以, 求二级衍射角。
3. 粉末法衍射图样为什么不是一个点, 而是一组同心圆环?

解答. 1. 由布拉格衍射公式: $2d \sin \alpha = n\lambda$, 有

$$d = \frac{n\lambda}{2 \sin \alpha} = \frac{1 \cdot 0.180 \text{ nm}}{2 \cdot \sin 21.1^\circ} = 0.25 \text{ nm}$$

因此，这组晶面的间距为： $d = 0.250 \text{ nm}$ 。

2. 由布拉格衍射公式：

$$\sin \alpha_2 = \frac{2\lambda_X}{2d} = \frac{0.154}{0.250} = 0.616 < 1$$

所以可能出现二级加强衍射，二级衍射角为 $\alpha_2 = \arcsin 0.616$ 。

3. 粉末样品中有大量取向随机的小晶粒。对于某一组晶面，总有一些小晶粒刚好满足布拉格衍射条件。由于这些小晶粒方向分布在空间各个方向上，衍射波形成圆锥面，落到底片或探测器上就成为一组同心圆环。