

题目一

1.

考虑一个质量为 m 的粒子, 能量为 E , 从左向右入射到一个一维方势垒上。势垒分布为:

$$U(x) = \begin{cases} U_0, & 0 < x < a \\ 0, & x < 0, x > a \end{cases}$$

其中 $U_0 > 0$, 且 $E < U_0$

写出三个区域的定态波函数的一般形式, 利用边界条件, 推导透射系数 $T = |\frac{C}{A}|^2$ 在宽势垒近似 ($e^{-k'a} \ll 1$) 下的表达式:

$$T \approx \frac{16E(U_0 - E)}{U_0^2} e^{-2k'a}$$

其中 $k' = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$.

2.

一辆质量为 $M = 1500 \text{ kg}$ 的汽车, 以速度 $v = 30 \text{ m/s}$ 行驶, 试图穿过一道厚度为 $d = 0.5 \text{ m}$ 的墙。假设墙对汽车的等效势垒高度 $U_0 = 10^6 \text{ J}$, 墙壁的厚度 d 即为势垒宽度。

(1) 计算此时汽车的德布罗意波长 λ

(2) 估算汽车穿墙的概率, 讨论“穿墙术”在宏观世界不可能发生的原因。

参考答案

1.

由定态薛定谔方程:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi$$

三个区域的波函数分别为:

$$\Phi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad x < 0$$

$$\Phi_2(x) = De^{-k'x} + Fe^{k'x}, \quad 0 < x < a$$

$$\Phi_3(x) = Ce^{ikx}, \quad x > a$$

其中:

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad k' = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$$

在 $x = 0$ 处, 波函数及其一阶导数连续:

$$\Phi_1(0) = \Phi_2(0) \Rightarrow A + B = D + F \quad (1)$$

$$\Phi_1'(0) = \Phi_2'(0) \Rightarrow ik(A - B) = k'(F - D) \quad (2)$$

在 $x = a$ 处:

$$\Phi_2(a) = \Phi_3(a) \Rightarrow De^{-k'a} + Fe^{k'a} = Ce^{ika} \quad (3)$$

$$\Phi_2'(a) = \Phi_3'(a) \Rightarrow k'(Fe^{k'a} - De^{-k'a}) = ikCe^{ika} \quad (4)$$

由 (3)(4) 解出 F 和 D 用 C 表示:

$$2k'Fe^{k'a} = Ce^{ika}(k' + ik) \quad (5)$$

$$2k'De^{-k'a} = Ce^{ika}(k' - ik) \quad (6)$$

由 (1)(2) 消去 B , 得 A 与 F, D 的关系:

$$2ikA = F(k' + ik) - D(k' - ik)$$

将 (5)(6) 代入上式:

$$2ikA = \frac{Ce^{ika}}{2k'} [(k' + ik)^2 e^{-k'a} - (k' - ik)^2 e^{k'a}]$$

因此:

$$\frac{C}{A} = \frac{4ik'ke^{-ika}}{(k' + ik)^2 e^{-k'a} - (k' - ik)^2 e^{k'a}}$$

由于 $e^{-k'a} \ll 1$, 故:

$$\frac{C}{A} \approx \frac{4ik'ke^{-ika}}{-(k' - ik)^2 e^{k'a}}$$

取模平方得透射系数:

$$T = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{16k'^2 k^2}{|k' - ik|^4} e^{-2k'a}$$

由于:

$$|k' - ik|^2 = k'^2 + k^2, \quad |k' - ik|^4 = (k'^2 + k^2)^2$$

且:

$$k'^2 + k^2 = \frac{2mU_0}{\hbar^2}, \quad k'^2 k^2 = \frac{4m^2 E(U_0 - E)}{\hbar^4}$$

代入得:

$$T \approx \frac{16 \cdot \frac{4m^2 E(U_0 - E)}{\hbar^4}}{\left(\frac{2mU_0}{\hbar^2} \right)^2} e^{-2k'a} = \frac{16E(U_0 - E)}{U_0^2} e^{-2k'a}$$

其中:

$$k' = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

2.

(1) 汽车动能:

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 = 6.75 \times 10^5 \text{ J}$$

德布罗意波长:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{Mv} = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{1500 \times 30} \approx 1.47 \times 10^{-38} \text{ m}$$

(2) 已知 $m = 1500 \text{ kg}$, $a = 0.5 \text{ m}$, $V_0 - E = 3.25 \times 10^5 \text{ J}$, 利用第一问的结论.

$$k' = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2 \times 1500 \times 3.25 \times 10^5}}{1.0546 \times 10^{-34}} = \frac{3.1225 \times 10^4}{1.0546 \times 10^{-34}} \approx 2.96 \times 10^{38} \text{ m}^{-1}$$

$$e^{-2k'a} = e^{-2.96 \times 10^{38}} \approx 10^{-1.285 \times 10^{38}}$$

$$\frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} = \frac{16 \times (6.75 \times 10^5) \times (3.25 \times 10^5)}{(10^6)^2} \approx 3.51$$

最终透射概率:

$$P \approx 3.51 \times 10^{-1.285 \times 10^{38}}$$

原因: 透射系数随质量、势垒宽度、能量短缺呈指数衰减。宏观物体质量极大 ($\sim 10^3 \text{ kg}$), 能量短缺也很大 ($\sim 10^5 \text{ J}$), 隧穿概率比宇宙中所有粒子数目的倒数还要小无穷多倍。加之德布罗意波长极短 ($\sim 10^{-38} \text{ m}$), 量子波动性完全被压制, 经典决定论成立。因此, 宏观物体穿墙在实际时间尺度内绝对不可能发生。

题目二

在原子物理和量子化学中, 电子按能量最低原则填充原子轨道。回答下列问题。

(1) 比较以下两组轨道的填充优先级

(a) $4s$ 与 $3d$

(b) $6s$ 与 $4f$

(2) 假设一个描述原子轨道能级高低的量 G , G 越大代表能级越大, 请给出 G 的一个关于 n, l 的线性组合的估计, 使得 $1s$ 到 $7p$ 的填充顺序与对应的 G 的升序一致, 其中 n 为主量子数, l 为角量子数。

(3) 在极强的外部磁场中 (如中子星表面), 上述的规则还成立吗?

参考答案

(1)

(a) $4s$ 优先于 $3d$

(b) $6s$ 优先于 $4f$

(2)

不妨设 $G(n, l) = n + al$, 其中 a 为待定常数. 由 $G(2, 1) < G(3, 0)$ 得:

$$2 + a \times 1 < 3 + a \times 0 \Rightarrow a < 1.$$

由 $G(4, 0) < G(3, 2)$ 得:

$$4 + a \times 0 < 3 + a \times 2 \Rightarrow 4 < 3 + 2a \Rightarrow a > 0.5.$$

由 $G(6, 0) < G(4, 3)$ 得:

$$6 + a \times 0 < 4 + a \times 3 \Rightarrow 6 < 4 + 3a \Rightarrow a > \frac{2}{3} \approx 0.667.$$

取交集得 $\frac{2}{3} < a < 1$. 取 $a = 0.7$, 满足条件。

(3)

强磁场迫使电子在垂直磁场的平面内做回旋运动, 轨道半径被强烈压缩, 电子不再保持原有的三维轨道 (s, p, d 等) 形态, 而是被约束在一维的磁通量线上。强磁场彻底改变了电子的运动方式和能级结构, 因此基于自由原子构建的“构造原理”不再成立。